MVE235 Matematisk orientering

Hur bra kan det bli? — matematisk optimering

Ann-Brith Strömberg
biträdande professor i matematisk optimering
http://www.chalmers.se/sv/personal/Sidor/ann-brith-stromberg.aspx

Forskargruppen i matematisk optimering
http://www.chalmers.se/en/departments/math/research/research-groups/optimization/Pages/default.aspx

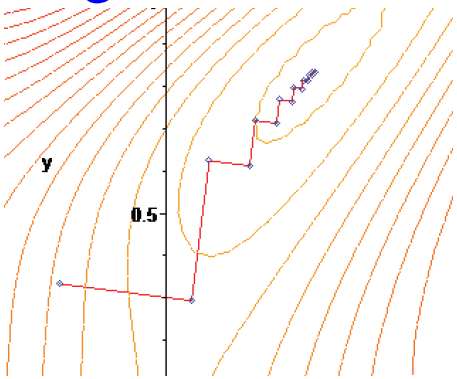
2022-11-22

Översikt

1. Matematisk optimering: bakgrund, definition, tillämpningar
   - Historia
   - Matematisk optimering
   - Tillämpningar
2. Matematik i optimeringsmodeller
   - Linjär optimering
3. Matematisk optimering vid Chalmers/GU
   - Kurser i matematisk optimering vid MV
   - Examensarbeten vid Chalmers/GU inom matematisk optimering

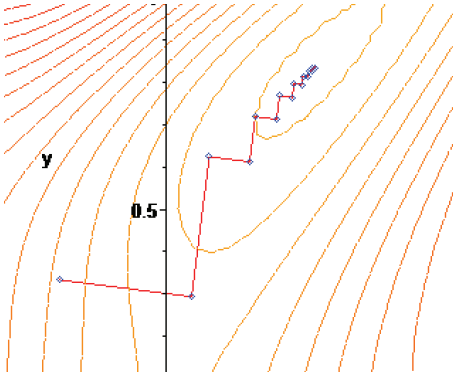
Några nedslag i historien

- C.F. Gauss (1777–1855): *Första optimeringsalgoritmen "brantaste lutning"*

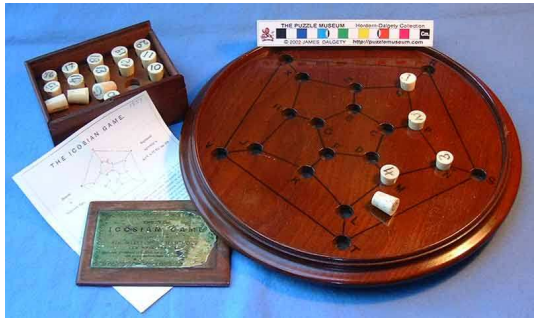


Några nedslag i historien

- C.F. Gauss (1777–1855): *Första optimeringsalgoritmen "brantaste lutning"*

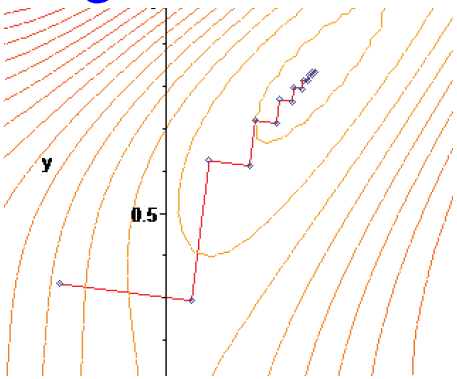


- W.R. Hamilton (1857): *"icosian game": finn en Hamiltoncykel* $\Rightarrow$ *Handelsresandeproblemet*

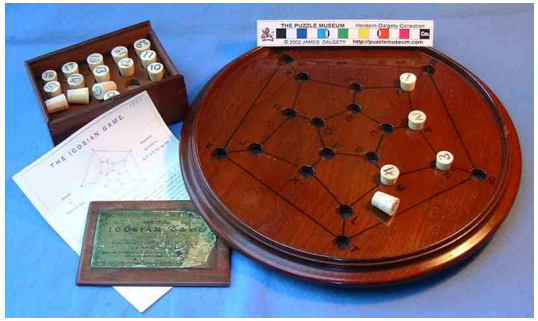


Några nedslag i historien

- C.F. Gauss (1777–1855): *Första optimeringsalgoritmen "brantaste lutning"*



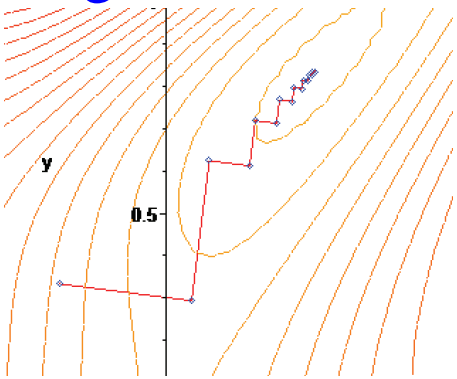
- W.R. Hamilton (1857): *"icosian game": finn en Hamiltoncykel ⇒ Handelsresandeproblemet*



- G.B. Dantzig (1947): *Linjärprogrammering: simplexalgoritmen*
  Program ⇔ militära tränings- och logistikscheman

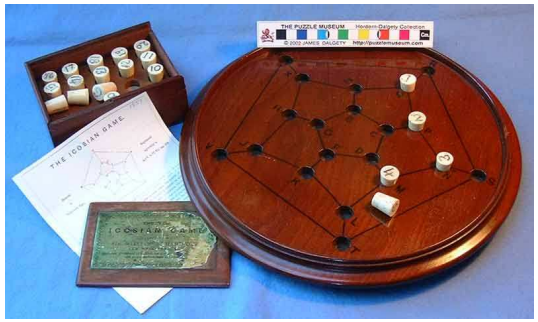
Några nedslag i historien

- C.F. Gauss (1777–1855): *Första optimeringsalgoritmen "brantaste lutning"*



- G.B. Dantzig (1947): *Linjärprogrammering: simplexalgoritmen*
  Program ⇔ militära tränings- och logistikscheman

- W.R. Hamilton (1857): *"icosian game": finn en Hamiltoncykel ⇒ Handelsresandeproblemet*



- Marguerite Frank & Philip Wolfe (1956): *En iterativ metod för lösning av olinjära optimeringsproblem*

Optimering: “Gör något så bra som möjligt”

Optimering: “Gör något så bra som möjligt”

- **Något** — Vilka beslutsalternativ finns?

Optimering: "Gör något så bra som möjligt"

- **Något** — Vilka beslutsalternativ finns?
  - $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om kund } j \text{ besöks } \textit{direkt} \text{ efter kund } i \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

Optimering: "Gör något så bra som möjligt"

- **Något** — Vilka beslutsalternativ finns?
  - $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om kund } j \text{ besöks } \textit{direkt} \text{ efter kund } i \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

- **Möjligt** — Vad begränsar?

Optimering: "Gör något så bra som möjligt"

- **Något** — Vilka beslutsalternativ finns?
  - $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om kund } j \text{ besöks } \textit{direkt} \text{ efter kund } i \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

- **Möjligt** — Vad begränsar?
  - Varje kund ska besökas exakt en gång

Optimering: "Gör något så bra som möjligt"

- **Något** — Vilka beslutsalternativ finns?
  - $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om kund } j \text{ besöks } \textit{direkt} \text{ efter kund } i \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$
- **Möjligt** — Vad begränsar?
  - Varje kund ska besökas exakt en gång
- **Bra** — Vad är ett relevant mål för optimeringen?

Optimering: "Gör något så bra som möjligt"

- **Något** — Vilka beslutsalternativ finns?
  - $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om kund } j \text{ besöks } \textit{direkt} \text{ efter kund } i \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$
- **Möjligt** — Vad begränsar?
  - Varje kund ska besökas exakt en gång
- **Bra** — Vad är ett relevant mål för optimeringen?
  - Minimera totala sträckan / restider / utsläpp / väntetider / ...

Optimering: "Gör något så bra som möjligt"

- **Något** — Vilka beslutsalternativ finns?
  - $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om kund } j \text{ besöks } \textit{direkt} \text{ efter kund } i \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$
- **Möjligt** — Vad begränsar?
  - Varje kund ska besökas exakt en gång
- **Bra** — Vad är ett relevant mål för optimeringen?
  - Minimera totala sträckan / restider / utsläpp / väntetider / ...

Det klassiska handelsresandeproblemet

Optimering: "Gör något så bra som möjligt"

- **Något** — Vilka beslutsalternativ finns?
  - $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om kund } j \text{ besöks } \textit{direkt} \text{ efter kund } i \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$
  - $y_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{om kund } i \text{ besöks av fordon } k \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$
- **Möjligt** — Vad begränsar?
  - Varje kund ska besökas exakt en gång
  - Tidsfönster, transportbehov, lastkapacitet, hämta hos en kund lämna hos en annan, ...
- **Bra** — Vad är ett relevant mål för optimeringen?
  - Minimera totala sträckan / restider / utsläpp / väntetider / ...

Det klassiska handelsresandeproblemet

- Varianter av ruttplaneringsproblem: skolskjuts, hybridfordon, självkörande taxibilar, orderplockning i varulager ...

Exempel på tillämpningsområden

- **Logistik: produktion och transport**
  - Optimera rutter för godstransporter, snöröjning, skolbussar, ...
  - Planera skogsavverkning och -transporter
  - Produktionsplanering, schemaläggning
  - Minimera cykeltid i robotstationer (exv bilindustri)
  - Planera underhåll av maskiner, fordon, infrastruktur, ...

Exempel på tillämpningsområden

- **Logistik: produktion och transport**
  - Optimera rutter för godstransporter, snöröjning, skolbussar, ...
  - Planera skogsavverkning och -transporter
  - Produktionsplanering, schemaläggning
  - Minimera cykeltid i robotstationer (exv bilindustri)
  - Planera underhåll av maskiner, fordon, infrastruktur, ...
- **Energi**
  - Integrera variabel elproduktion (sol och vind) i elsystemet
  - Lokalisering av kraftverk och infrastruktur

Exempel på tillämpningsområden

- **Logistik: produktion och transport**
  - Optimera rutter för godstransporter, snöröjning, skolbussar, ...
  - Planera skogsavverkning och -transporter
  - Produktionsplanering, schemaläggning
  - Minimera cykeltid i robotstationer (exv bilindustri)
  - Planera underhåll av maskiner, fordon, infrastruktur, ...
- **Energi**
  - Integrera variabel elproduktion (sol och vind) i elsystemet
  - Lokalisering av kraftverk och infrastruktur

Exempel på tillämpningsområden

- **Logistik: produktion och transport**
  - Optimera rutter för godstransporter, snöröjning, skolbussar, ...
  - Planera skogsavverkning och -transporter
  - Produktionsplanering, schemaläggning
  - Minimera cykeltid i robotstationer (exv bilindustri)
  - Planera underhåll av maskiner, fordon, infrastruktur, ...
- **Energi**
  - Integrera variabel elproduktion (sol och vind) i elsystemet
  - Lokalisering av kraftverk och infrastruktur
- **Finans**
  - Portföljoptimering; riskhantering; investeringsplanering

Exempel på tillämpningsområden

- **Logistik: produktion och transport**
  - Optimera rutter för godstransporter, snöröjning, skolbussar, ...
  - Planera skogsavverkning och -transporter
  - Produktionsplanering, schemaläggning
  - Minimera cykeltid i robotstationer (exv bilindustri)
  - Planera underhåll av maskiner, fordon, infrastruktur, ...
- **Energi**
  - Integrera variabel elproduktion (sol och vind) i elsystemet
  - Lokalisering av kraftverk och infrastruktur
- **Finans**
  - Portföljoptimering; riskhantering; investeringsplanering
- **Medicin**
  - Beräkna strålriktningar och -intensiteter vid cancerbehandling
  - Rekonstruera bilder från röntgenmätningar

Översikt

1. Matematisk optimering: bakgrund, definition, tillämpningar
   - Historia
   - Matematisk optimering
   - Tillämpningar
2. Matematik i optimeringsmodeller
   - Linjär optimering
3. Matematisk optimering vid Chalmers/GU
   - Kurser i matematisk optimering vid MV
   - Examensarbeten vid Chalmers/GU inom matematisk optimering

Linjär optimering—ett exempel

- En chokladfabrik ska tillverka två produkter – "*vita moln*" och "*mörka drömmar*" – under nästkommande vecka

Linjär optimering—ett exempel

- En chokladfabrik ska tillverka två produkter – "*vita moln*" och "*mörka drömmar*" – under nästkommande vecka
- Introduktionserbjudande för *vita moln*: vinsten per såld bit av *vita moln* är hälften av den för *mörka drömmar*

Linjär optimering—ett exempel

- En chokladfabrik ska tillverka två produkter – "*vita moln*" och "*mörka drömmar*" – under nästkommande vecka
- Introduktionserbjudande för *vita moln*: vinsten per såld bit av *vita moln* är hälften av den för *mörka drömmar*
- Endast en av produkterna kan tillverkas vid samma tillfälle och de två produkterna har samma produktionstakt (# tillverkade bitar/tidsenhet)

Linjär optimering—ett exempel

- En chokladfabrik ska tillverka två produkter – "*vita moln*" och "*mörka drömmar*" – under nästkommande vecka
- Introduktionserbjudande för *vita moln*: vinsten per såld bit av *vita moln* är hälften av den för *mörka drömmar*
- Endast en av produkterna kan tillverkas vid samma tillfälle och de två produkterna har samma produktionstakt (# tillverkade bitar/tidsenhet)
- Marknadsavdelningen: maximalt 75% av veckans tillgängliga produktionstimmar får användas till *mörka drömmar*
- Inköpsavdelningen: maximalt 10 ton glukos finns att tillgå

Linjär optimering—ett exempel

- En chokladfabrik ska tillverka två produkter – "*vita moln*" och "*mörka drömmar*" – under nästkommande vecka
- Introduktionserbjudande för *vita moln*: vinsten per såld bit av *vita moln* är hälften av den för *mörka drömmar*
- Endast en av produkterna kan tillverkas vid samma tillfälle och de två produkterna har samma produktionstakt (# tillverkade bitar/tidsenhet)
- Marknadsavdelningen: maximalt 75% av veckans tillgängliga produktionstimmar får användas till *mörka drömmar*
- Inköpsavdelningen: maximalt 10 ton glukos finns att tillgå
- En veckas produktion av *mörka drömmar* kräver 8 ton glukos
- En veckas produktion av *vita moln* kräver 13 ton glukos

Linjär optimering—ett exempel

- En chokladfabrik ska tillverka två produkter – "*vita moln*" och "*mörka drömmar*" – under nästkommande vecka
- Introduktionserbjudande för *vita moln*: vinsten per såld bit av *vita moln* är hälften av den för *mörka drömmar*
- Endast en av produkterna kan tillverkas vid samma tillfälle och de två produkterna har samma produktionstakt (# tillverkade bitar/tidsenhet)
- Marknadsavdelningen: maximalt 75% av veckans tillgängliga produktionstimmar får användas till *mörka drömmar*
- Inköpsavdelningen: maximalt 10 ton glukos finns att tillgå
- En veckas produktion av *mörka drömmar* kräver 8 ton glukos
- En veckas produktion av *vita moln* kräver 13 ton glukos
- Hur ska produktionen planeras för att vinsten ska bli så stor som möjligt?

Linjär optimering—ett exempel

- En chokladfabrik ska tillverka två produkter – "*vita moln*" och "*mörka drömmar*" – under nästkommande vecka
- Introduktionserbjudande för *vita moln*: vinsten per såld bit av *vita moln* är hälften av den för *mörka drömmar*
- Endast en av produkterna kan tillverkas vid samma tillfälle och de två produkterna har samma produktionstakt (# tillverkade bitar/tidsenhet)
- Marknadsavdelningen: maximalt 75% av veckans tillgängliga produktionstimmar får användas till *mörka drömmar*
- Inköpsavdelningen: maximalt 10 ton glukos finns att tillgå
- En veckas produktion av *mörka drömmar* kräver 8 ton glukos
- En veckas produktion av *vita moln* kräver 13 ton glukos
- Hur ska produktionen planeras för att vinsten ska bli så stor som möjligt?

  Hur många av veckans 50 produktionstimmar ska användas för tillverkning av *mörka drömmar* respektive *vita moln*?

"Gör något så bra som möjligt"

- **Något** — Vilka beslutsalternativ finns?
- **Möjligt** — Vad begränsar?
- **Bra** — Vad är målet för optimeringen?

"Gör något så bra som möjligt"

- **Något** — Vilka beslutsalternativ finns?

$x_1 =$ antal timmar som används för att tillverka *mörka drömmar*
$x_2 =$ antal timmar som används för att tillverka *vita moln*

- **Möjligt** — Vad begränsar?

- **Bra** — Vad är målet för optimeringen?

"Gör något så bra som möjligt"

- **Något** — Vilka beslutsalternativ finns?

  $x_1 =$ antal timmar som används för att tillverka *mörka drömmar*

  $x_2 =$ antal timmar som används för att tillverka *vita moln*

- **Möjligt** — Vad begränsar?
  - Endast en produkt vid samma tillfälle. Totalt 50 timmar.
  - Maximalt 75% av tillgänglig tid till *mörka drömmar*
  - Maximalt 10 ton glukos
- **Bra** — Vad är målet för optimeringen?

"Gör något så bra som möjligt"

- **Något** — Vilka beslutsalternativ finns?

$x_1 =$ antal timmar som används för att tillverka *mörka drömmar*
$x_2 =$ antal timmar som används för att tillverka *vita moln*

- **Möjligt** — Vad begränsar?
  - Endast en produkt vid samma tillfälle. Totalt 50 timmar.

$$\boxed{x_1 + x_2 \leq 50}$$

  - Maximalt 75% av tillgänglig tid till *mörka drömmar*
  - Maximalt 10 ton glukos

- **Bra** — Vad är målet för optimeringen?

"Gör något så bra som möjligt"

- **Något** — Vilka beslutsalternativ finns?

$x_1 =$ antal timmar som används för att tillverka *mörka drömmar*
$x_2 =$ antal timmar som används för att tillverka *vita moln*

- **Möjligt** — Vad begränsar?
  - Endast en produkt vid samma tillfälle. Totalt 50 timmar.

$$\boxed{x_1 + x_2 \leq 50}$$

  - Maximalt 75% av tillgänglig tid till *mörka drömmar*

$$\boxed{x_1 \leq 50 \cdot 0.75 = 37.5}$$

  - Maximalt 10 ton glukos

- **Bra** — Vad är målet för optimeringen?

"Gör något så bra som möjligt"

- **Något** — Vilka beslutsalternativ finns?

$x_1 =$ antal timmar som används för att tillverka *mörka drömmar*
$x_2 =$ antal timmar som används för att tillverka *vita moln*

- **Möjligt** — Vad begränsar?
  - Endast en produkt vid samma tillfälle. Totalt 50 timmar.

$$\boxed{x_1 + x_2 \leq 50}$$

  - Maximalt 75% av tillgänglig tid till *mörka drömmar*

$$\boxed{x_1 \leq 50 \cdot 0.75 = 37.5}$$

  - Maximalt 10 ton glukos

$$\boxed{8 \cdot \tfrac{x_1}{50} + 13 \cdot \tfrac{x_2}{50} \leq 10 \quad \Longleftrightarrow \quad 8x_1 + 13x_2 \leq 500}$$

- **Bra** — Vad är målet för optimeringen?

"Gör något så bra som möjligt"

- **Något** — Vilka beslutsalternativ finns?

$x_1 =$ antal timmar som används för att tillverka *mörka drömmar*
$x_2 =$ antal timmar som används för att tillverka *vita moln*

- **Möjligt** — Vad begränsar?
  - Endast en produkt vid samma tillfälle. Totalt 50 timmar.

$$\boxed{x_1 + x_2 \leq 50}$$

  - Maximalt 75% av tillgänglig tid till *mörka drömmar*

$$\boxed{x_1 \leq 50 \cdot 0.75 = 37.5}$$

  - Maximalt 10 ton glukos

$$\boxed{8 \cdot \tfrac{x_1}{50} + 13 \cdot \tfrac{x_2}{50} \leq 10 \quad \Longleftrightarrow \quad 8x_1 + 13x_2 \leq 500}$$

- **Bra** — Vad är målet för optimeringen?
  - Maximera vinsten

"Gör något så bra som möjligt"

- **Något** — Vilka beslutsalternativ finns?

$x_1 =$ antal timmar som används för att tillverka *mörka drömmar*
$x_2 =$ antal timmar som används för att tillverka *vita moln*

- **Möjligt** — Vad begränsar?
  - Endast en produkt vid samma tillfälle. Totalt 50 timmar.

$$\boxed{x_1 + x_2 \leq 50}$$

  - Maximalt 75% av tillgänglig tid till *mörka drömmar*

$$\boxed{x_1 \leq 50 \cdot 0.75 = 37.5}$$

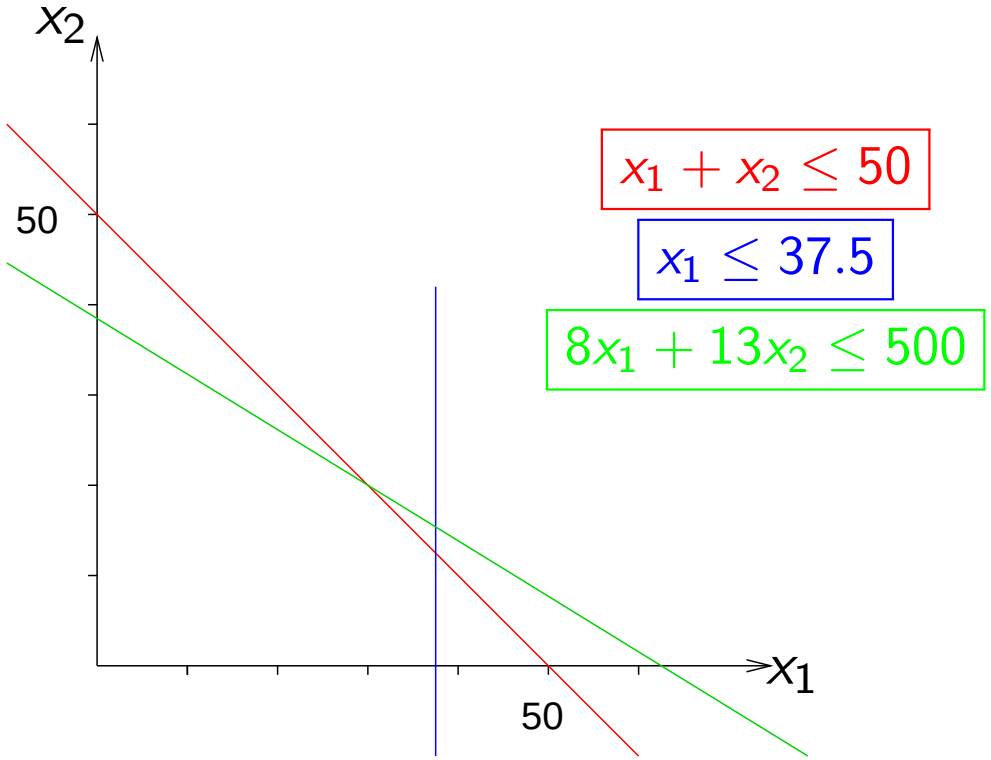
  - Maximalt 10 ton glukos

$$\boxed{8 \cdot \tfrac{x_1}{50} + 13 \cdot \tfrac{x_2}{50} \leq 10 \quad \Longleftrightarrow \quad 8x_1 + 13x_2 \leq 500}$$

- **Bra** — Vad är målet för optimeringen?
  - Maximera vinsten

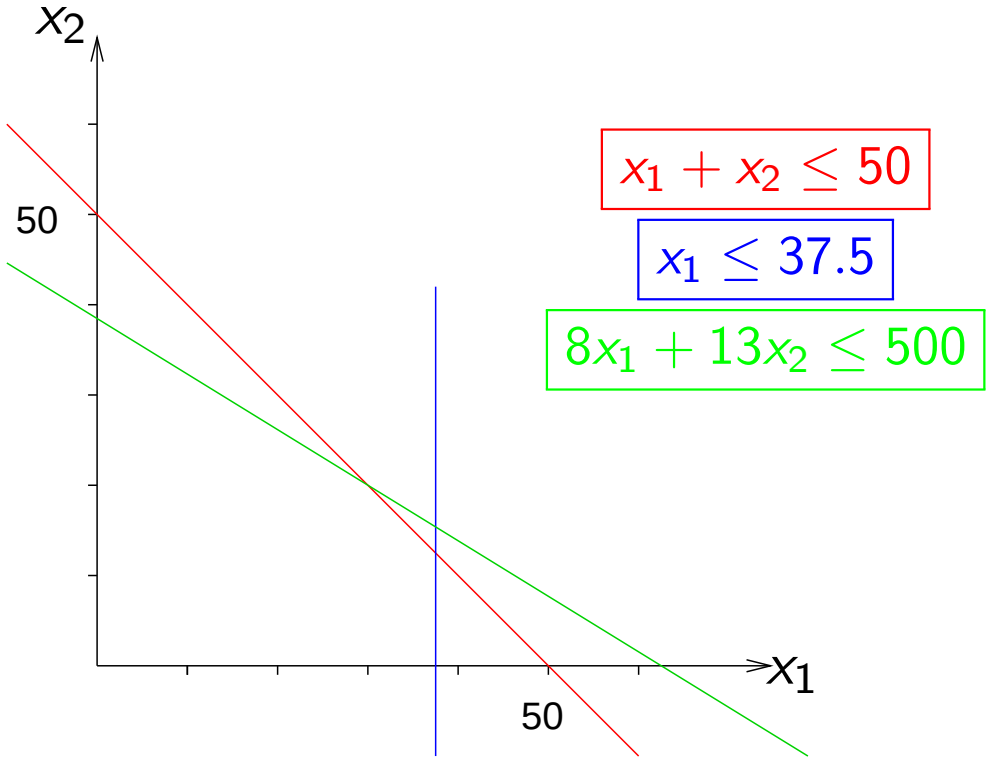
$$\boxed{2x_1 + x_2 \to \max}$$

Grafisk lösning



- Bivillkor: linjära olikheter

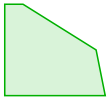
Grafisk lösning

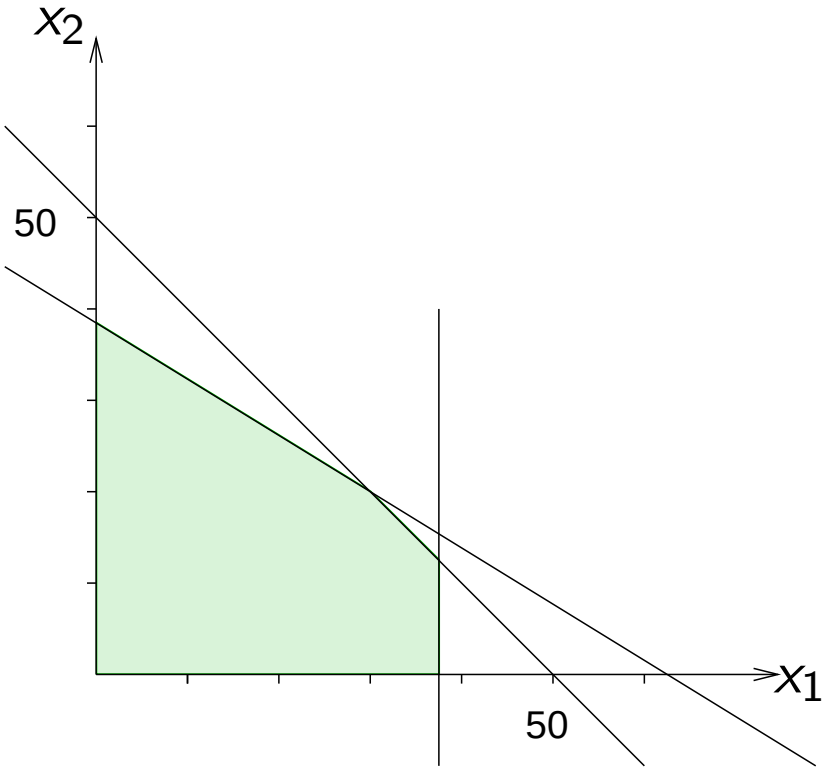


- Bivillkor: linjära olikheter
- Antalet timmar kan inte vara negativt

Grafisk lösning

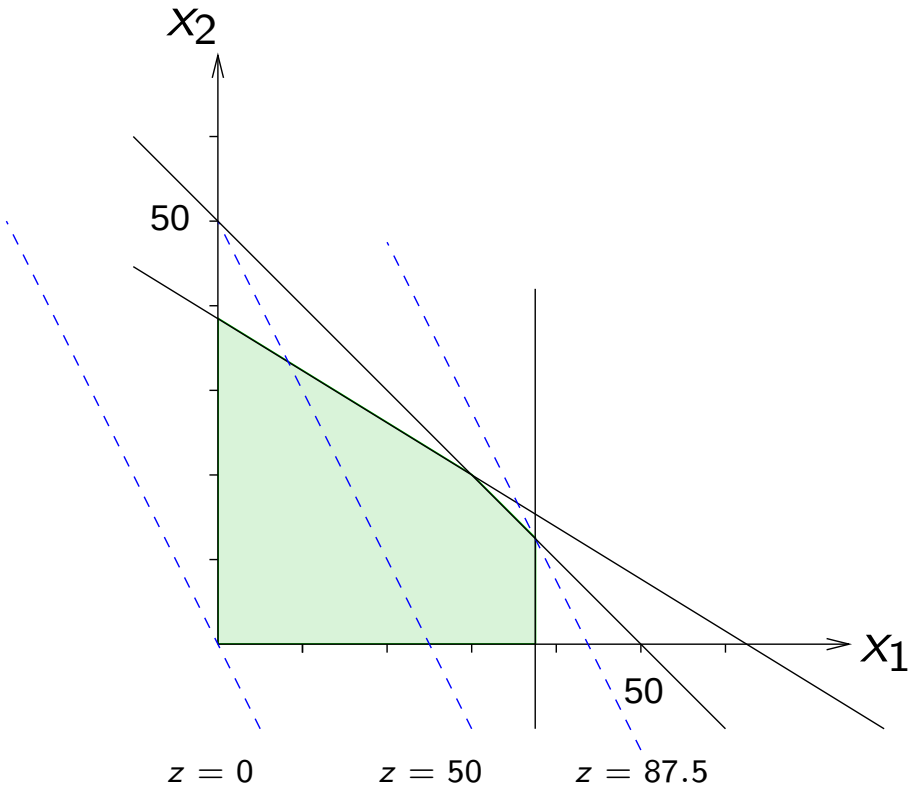
Tillåten mängd





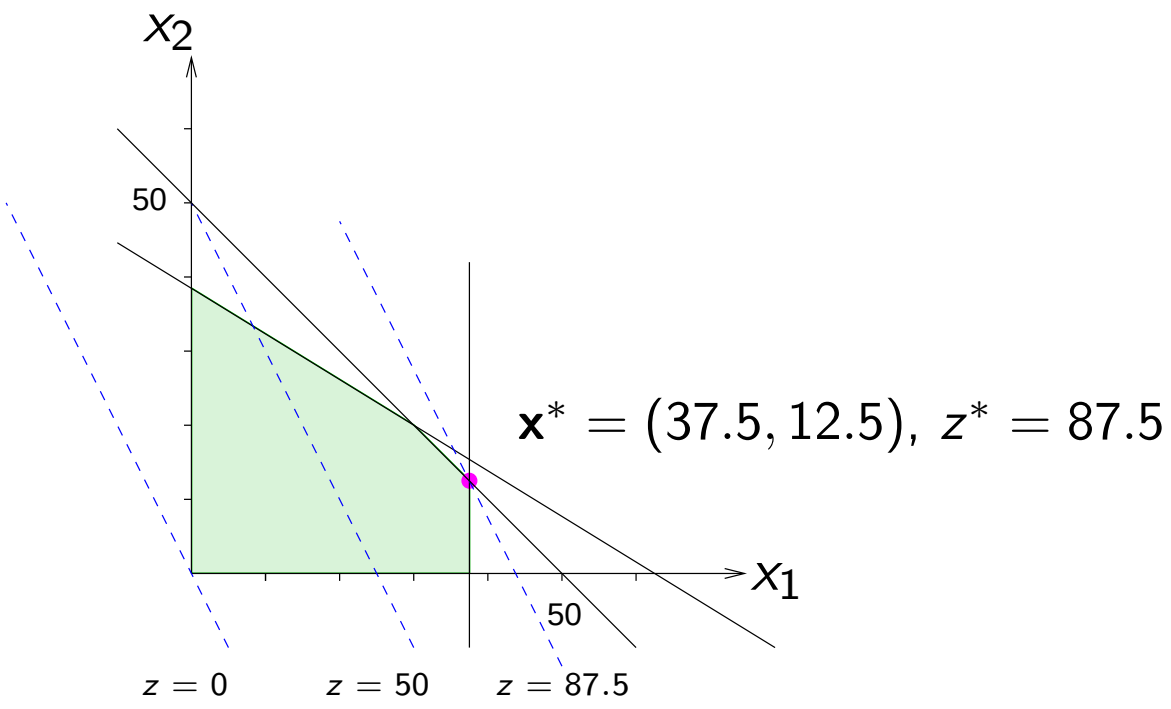
- Bivillkor: linjära olikheter
- Antalet timmar kan inte vara negativt: $\boxed{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0}$

Grafisk lösning



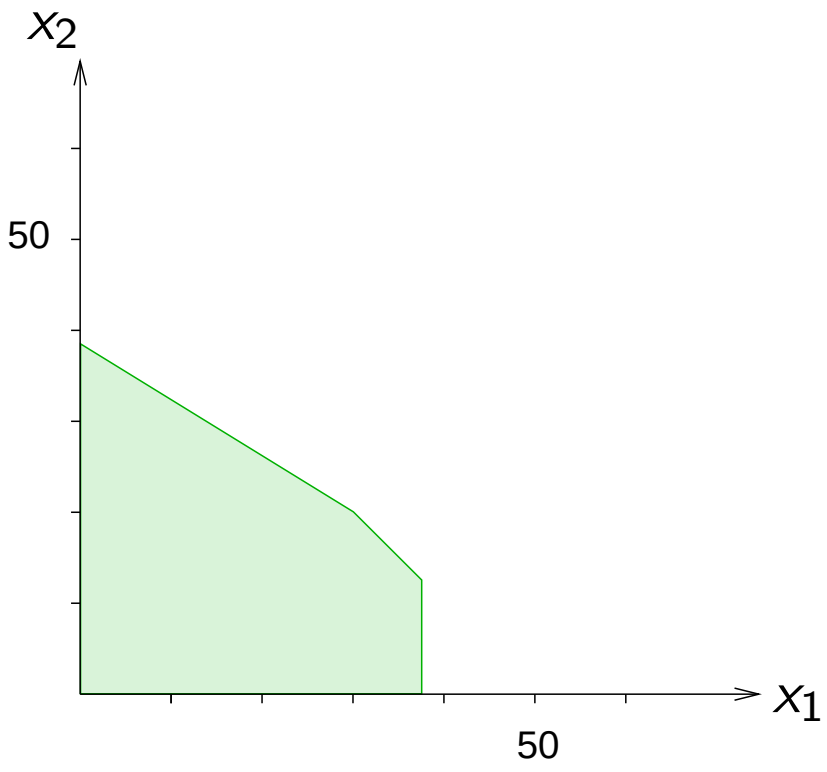
- Bivillkor: linjära olikheter
- Antalet timmar kan inte vara negativt: $\boxed{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0}$
- Maximera målfunktionen: $\boxed{z = 2x_1 + x_2}$

Grafisk lösning



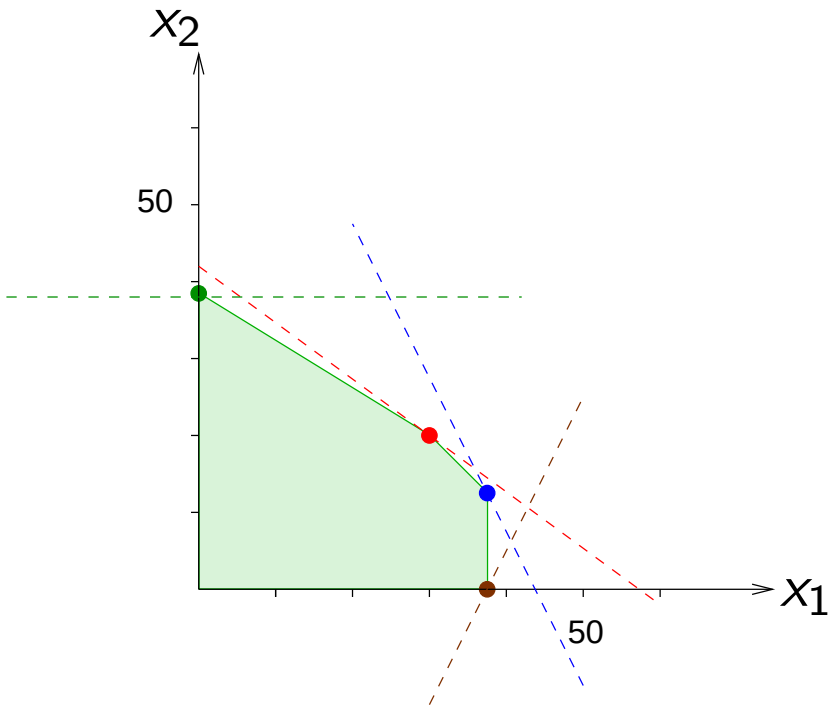
- Bivillkor: linjära olikheter
- Antalet timmar kan inte vara negativt: $\boxed{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0}$
- Maximera målfunktionen: $\boxed{z = 2x_1 + x_2}$
- *Mörka drömmar*: 37.5 timmar. *Vita moln*: 12.5 timmar.

Lösningsmetod?



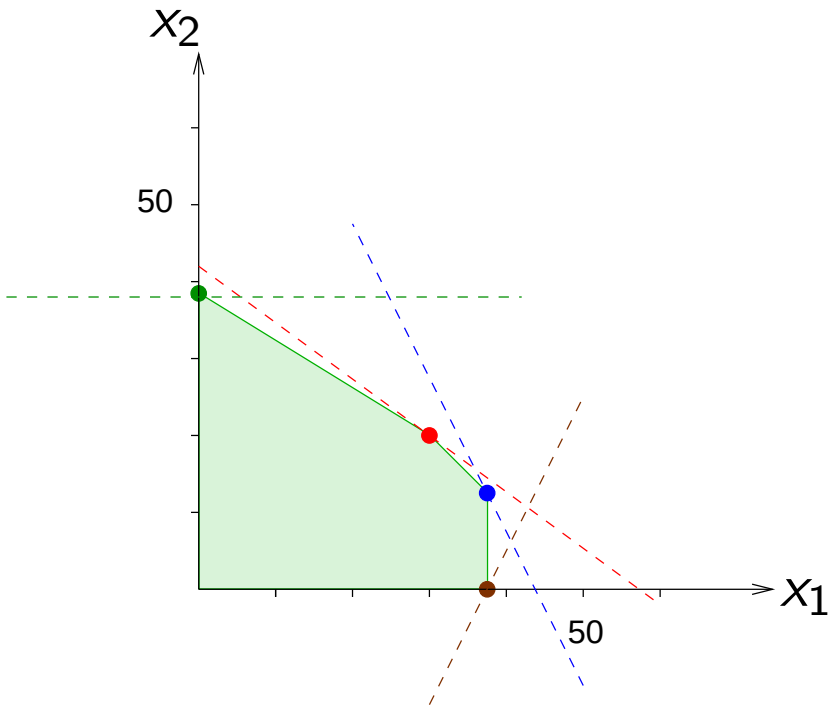
- Antalet tillåtna punkter är oändligt ...

Lösningsmetod?



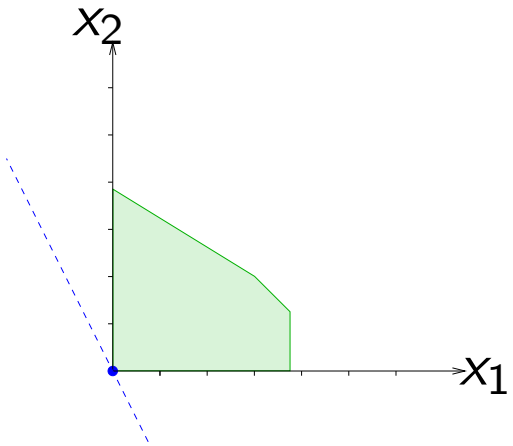
- Antalet tillåtna punkter är oändligt ...
- Men: Linjära samband $\Rightarrow$ optimallösning i minst en extrempunkt

Lösningsmetod?



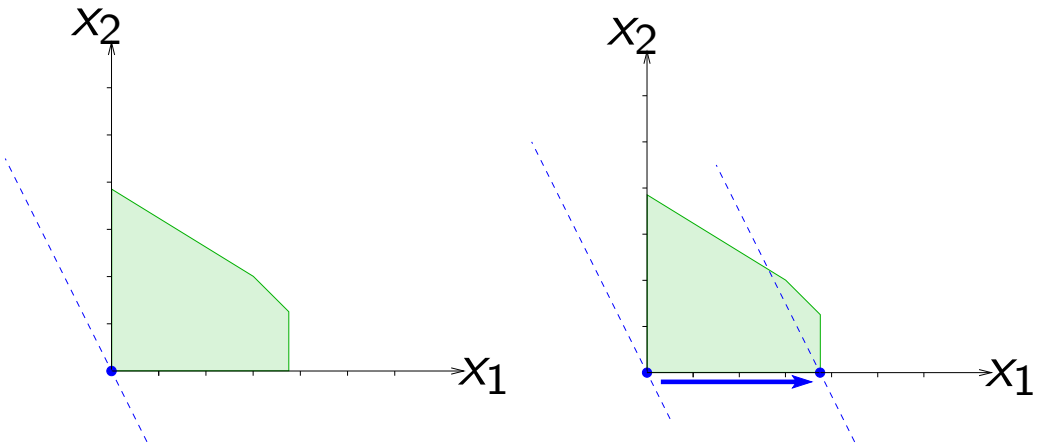
- Antalet tillåtna punkter är oändligt ...
- Men: Linjära samband $\Rightarrow$ optimallösning i minst en extrempunkt
- Metod-idé: sök systematiskt bland extrempunkterna

Lösningsmetod?



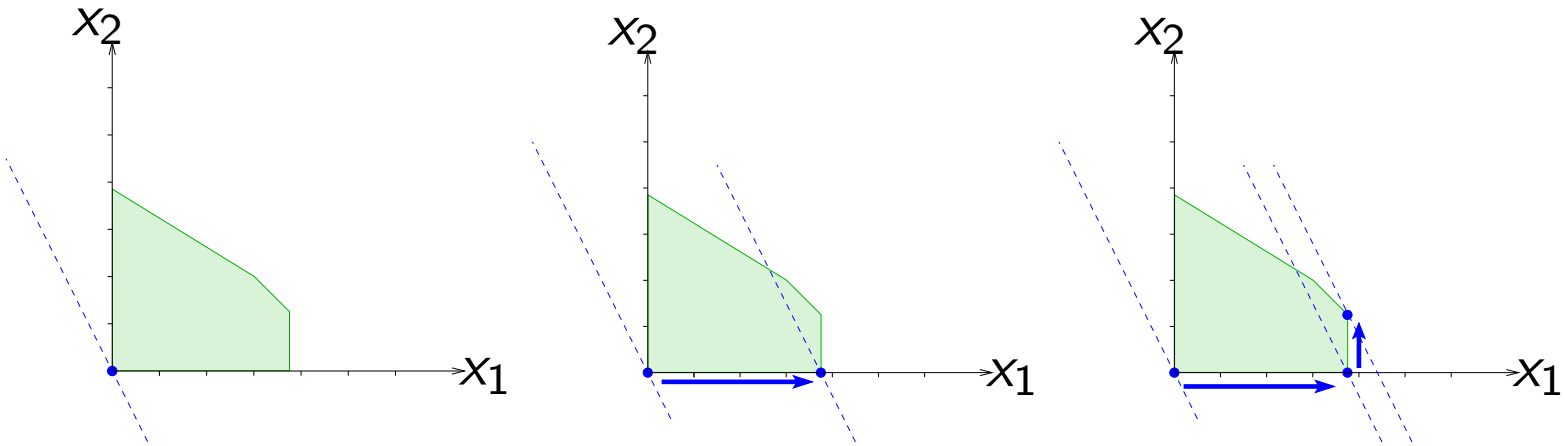
- Antalet tillåtna punkter är oändligt ...
- Men: Linjära samband $\Rightarrow$ optimallösning i minst en extrempunkt
- Metod-idé: sök systematiskt bland extrempunkterna
- Simplexalgoritmen (G.B. Dantzig, 1947)

Lösningsmetod?



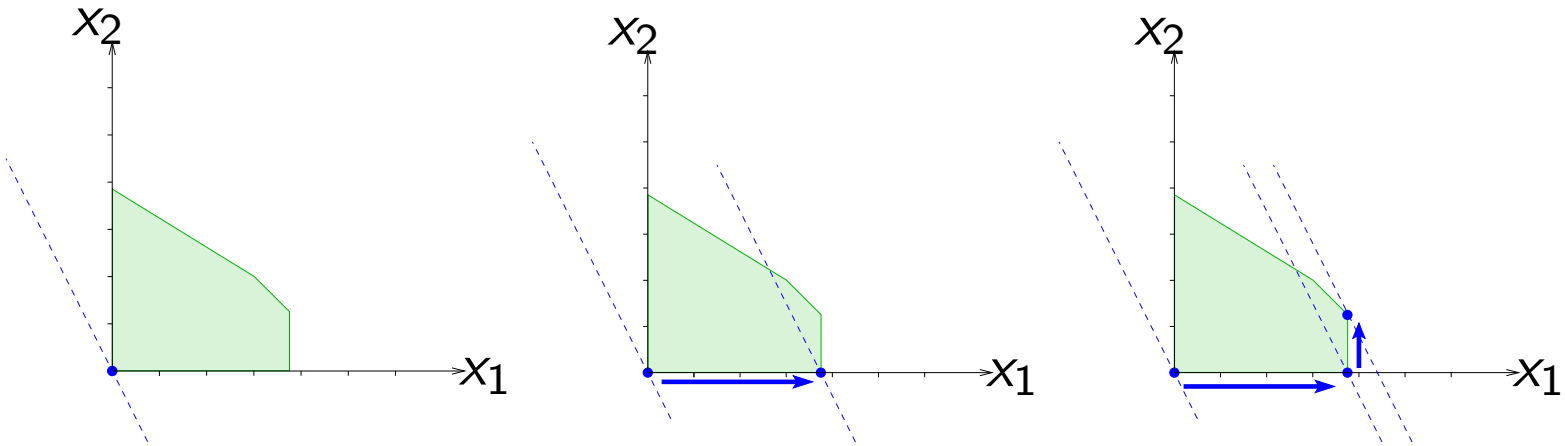
- Antalet tillåtna punkter är oändligt ...
- Men: Linjära samband $\Rightarrow$ optimallösning i minst en extrempunkt
- Metod-idé: sök systematiskt bland extrempunkterna
- Simplexalgoritmen (G.B. Dantzig, 1947)
  - Vandra mellan "närliggande" extrempunkter

Lösningsmetod?



- Antalet tillåtna punkter är oändligt ...
- Men: Linjära samband $\Rightarrow$ optimallösning i minst en extrempunkt
- Metod-idé: sök systematiskt bland extrempunkterna
- Simplexalgoritmen (G.B. Dantzig, 1947)
  - Vandra mellan "närliggande" extrempunkter
  - Marginalförbättring: Varje "ny" extrempunkt har ett bättre målfunktionsvärde än den "förra"

Lösningsmetod?



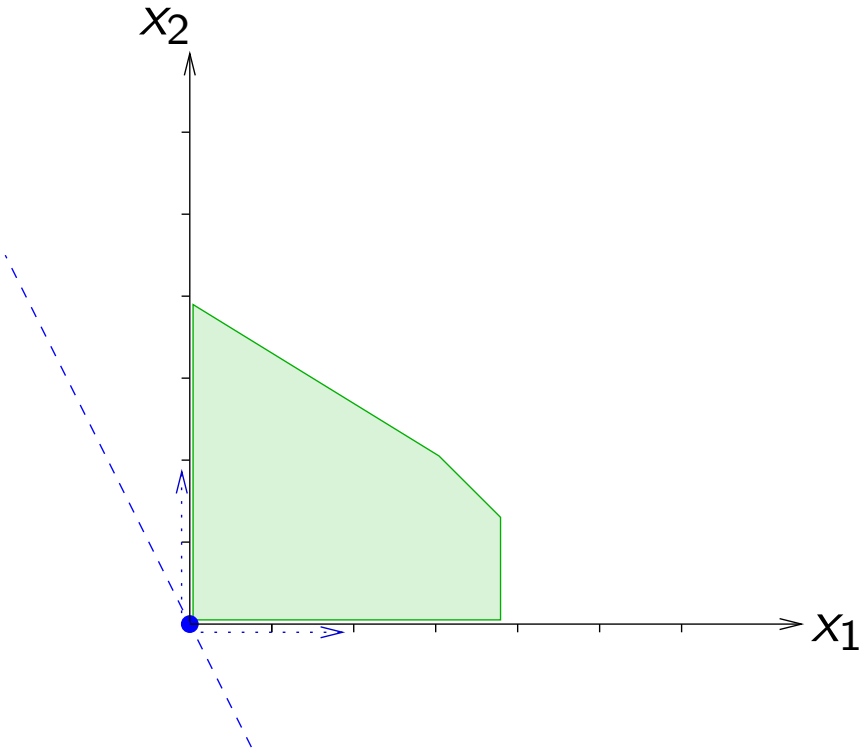
- Antalet tillåtna punkter är oändligt ...
- Men: Linjära samband $\Rightarrow$ optimallösning i minst en extrempunkt
- Metod-idé: sök systematiskt bland extrempunkterna
- Simplexalgoritmen (G.B. Dantzig, 1947)
  - Vandra mellan "närliggande" extrempunkter
  - Marginalförbättring: Varje "ny" extrempunkt har ett bättre målfunktionsvärde än den "förra"
  - Stannar i extrempunkten med bästa möjliga målfunktionsvärde

Simplexmetoden—marginalvärden

$$
\begin{array}{lrcrcrl}
\max & 2x_1 & + & x_2 & & & (0) \\
\text{då} & x_1 & + & x_2 & \leq & 50 & (1) \\
 & x_1 & & & \leq & 37.5 & (2) \\
 & 8x_1 & + & 13x_2 & \leq & 500 & (3) \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 & (4)
\end{array}
$$

- Starta med "ingen produktion alls", dvs $x_1 = x_2 = 0$.
- Följ en kantlinje till nästa extrempunkt
- Marginalvärde då
  - x_1 ökas ($x_1 > 0$): 2
  - x_2 ökas ($x_2 > 0$): 1

$\Rightarrow$ Öka värdet på x_1



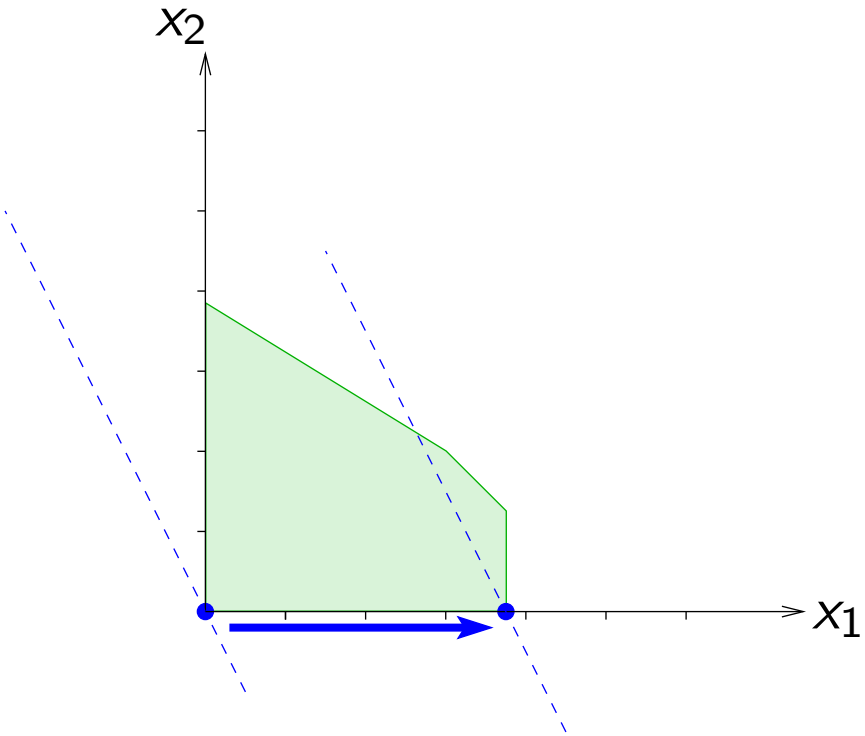
Simplexmetoden—marginalvärden

$$
\begin{array}{lrcrcrl}
\max & 2x_1 & + & x_2 & & & (0) \\
\text{då} & x_1 & + & x_2 & \leq & 50 & (1) \\
 & x_1 & & & \leq & 37.5 & (2) \\
 & 8x_1 & + & 13x_2 & \leq & 500 & (3) \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 & (4)
\end{array}
$$

- Starta med "ingen produktion alls", dvs $x_1 = x_2 = 0$.
- Följ en kantlinje till nästa extrempunkt
- Marginalvärde då
  - x_1 ökas ($x_1 > 0$): 2
  - x_2 ökas ($x_2 > 0$): 1

$\Rightarrow$ Öka värdet på x_1

- Vid $x_1 = 37.5$ blir villkor (2) bindande
- Resulterande punkt: $x_1 = 37.5$, $x_2 = 0$
- Målfunktionsvärde: 75

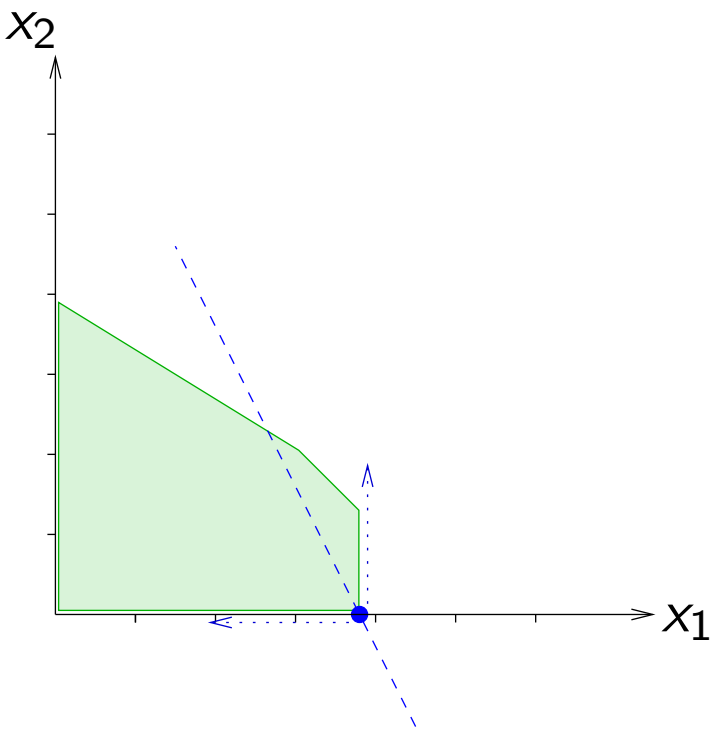


Simplexmetoden—marginalvärden

$$
\begin{array}{lrcrcrl}
\max & 2x_1 & + & x_2 & & & (0) \\
\text{då} & x_1 & + & x_2 & \leq & 50 & (1) \\
 & x_1 & & & \leq & 37.5 & (2) \\
 & 8x_1 & + & 13x_2 & \leq & 500 & (3) \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 & (4)
\end{array}
$$

- I punkten $x_1 = 37.5$, $x_2 = 0$:
- Marginalvärde då
  - x_1 minskas ($x_1 < 37.5$): -2
  - x_2 ökas: ($x_2 > 0$) 1

$\Rightarrow$ Öka värdet på x_2



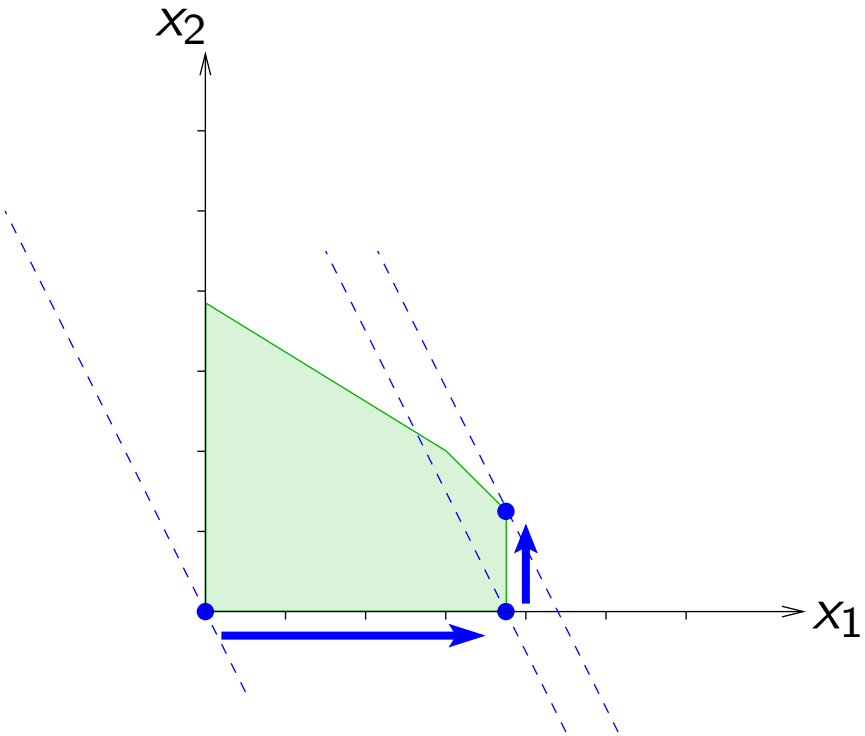
Simplexmetoden—marginalvärden

$$
\begin{array}{lrcrcrl}
\max & 2x_1 & + & x_2 & & & (0) \\
\text{då} & x_1 & + & x_2 & \leq & 50 & (1) \\
 & x_1 & & & \leq & 37.5 & (2) \\
 & 8x_1 & + & 13x_2 & \leq & 500 & (3) \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 & (4)
\end{array}
$$

- I punkten $x_1 = 37.5$, $x_2 = 0$:
- Marginalvärde då
  - x_1 minskas ($x_1 < 37.5$): -2
  - x_2 ökas: ($x_2 > 0$) 1

$\Rightarrow$ Öka värdet på x_2

- Vid $x_2 = 12.5$ blir villkor (1) bindande
- Resulterande punkt: $x_1 = 37.5$, $x_2 = 12.5$
- Målfunktionsvärde: 87.5

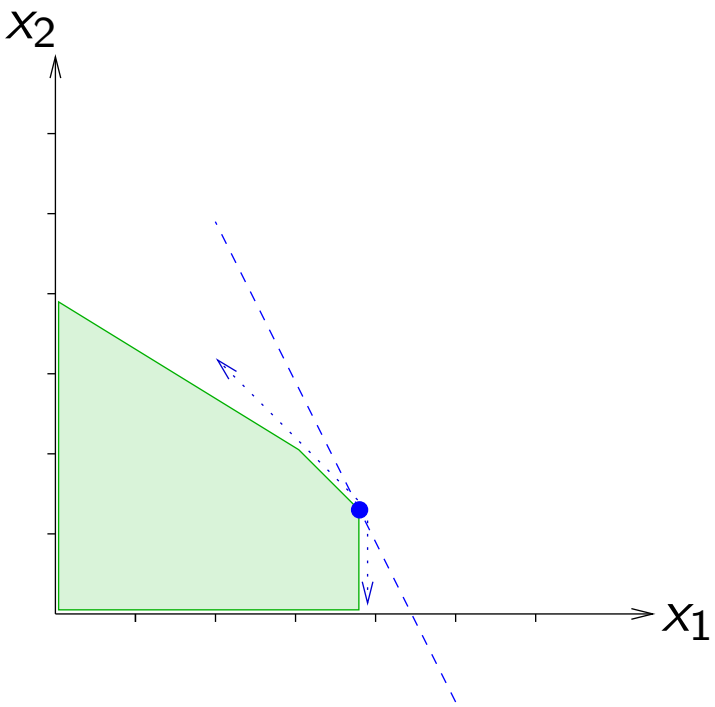


Simplexmetoden—marginalvärden

$$
\begin{array}{lrcrcrl}
\max & 2x_1 & + & x_2 & & & (0) \\
\text{då} & x_1 & + & x_2 & \leq & 50 & (1) \\
 & x_1 & & & \leq & 37.5 & (2) \\
 & 8x_1 & + & 13x_2 & \leq & 500 & (3) \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 & (4)
\end{array}
$$

- I punkten $x_1 = 37.5$, $x_2 = 12.5$:
- Marginalvärde då
  - x_1 minskas ($x_1 < 37.5$, $x_1 + x_2 = 50$): -1
  - x_2 minskas ($x_2 < 50 - x_1$, $x_1 = 37.5$): -1

$\Rightarrow$ Målfunktionsvärdet minskar i båda extremriktningarna



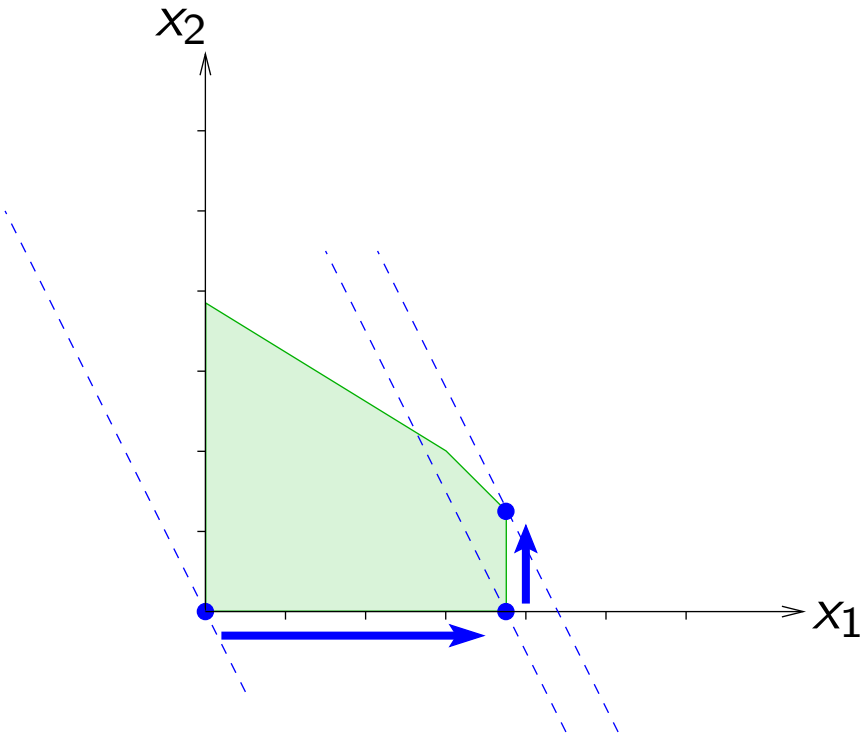
Simplexmetoden—marginalvärden

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\max & 2x_1 + & & x_2 & & (0) \\
\text{då} & x_1 + & & x_2 & \leq 50 & (1) \\
 & x_1 & & & \leq 37.5 & (2) \\
 & 8x_1 + & & 13x_2 & \leq 500 & (3) \\
 & x_1 \ , & & x_2 & \geq 0 & (4)
\end{array}
$$

- I punkten $x_1 = 37.5,\ x_2 = 12.5$:
- Marginalvärde då
  - x_1 minskas ($x_1 < 37.5,\ x_1 + x_2 = 50$): -1
  - x_2 minskas ($x_2 < 50 - x_1,\ x_1 = 37.5$): -1

$\Rightarrow$ Målfunktionsvärdet minskar i båda extremriktningarna

- Optimal punkt: $x_1 = 37.5,\ x_2 = 12.5$
- Optimalt målfunktionsvärde: 87.5



Optimalitetsvillkor

- Linjärt optimeringsproblem:

$$\begin{array}{lrcl} \max & 2x_1 + x_2 & & (0) \\ \text{då} & x_1 + x_2 & \leq 50 & (1) \\ & x_1 & \leq 37.5 & (2) \\ & 8x_1 + 13x_2 & \leq 500 & (3) \\ & x_1 \ , \ x_2 & \geq 0 & (4) \end{array}$$

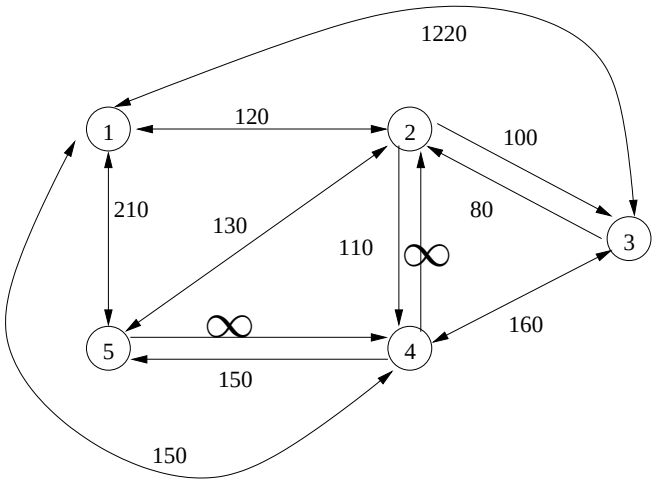
- Punkten $\mathbf{x} = (37.5, 12.5)$, med målfunktionsvärdet 87.5 är optimal p g a
  - att den uppfyller villkoren (1)–(4), samt
  - att ingen annan tillåten punkt har ett högre målfunktionsvärde.
- Dvs, mängden

$$\left\{ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \;\middle|\; \begin{array}{cc} x_1 + x_2 \leq 50, & x_1 \leq 37.5, \\ 8x_1 + 13x_2 \leq 500, & 2x_1 + x_2 > 87.5 \end{array} \right\} = \emptyset$$

Handelsresandeproblemet (traveling salesperson problem, TSP)—ett klassiskt optimeringsproblem

- **Enkel struktur:**
  Besök n städer i den ordning som ger kortast totala sträcka (eller kortast restid, eller minst utsläpp ...)
- Antal möjliga rutter:
  $(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = (n-1)!$
- Algoritmer baserade på *matematisk optimering* kan lösa problemet *utan* att göra en fullständig uppräkning av alla rutter

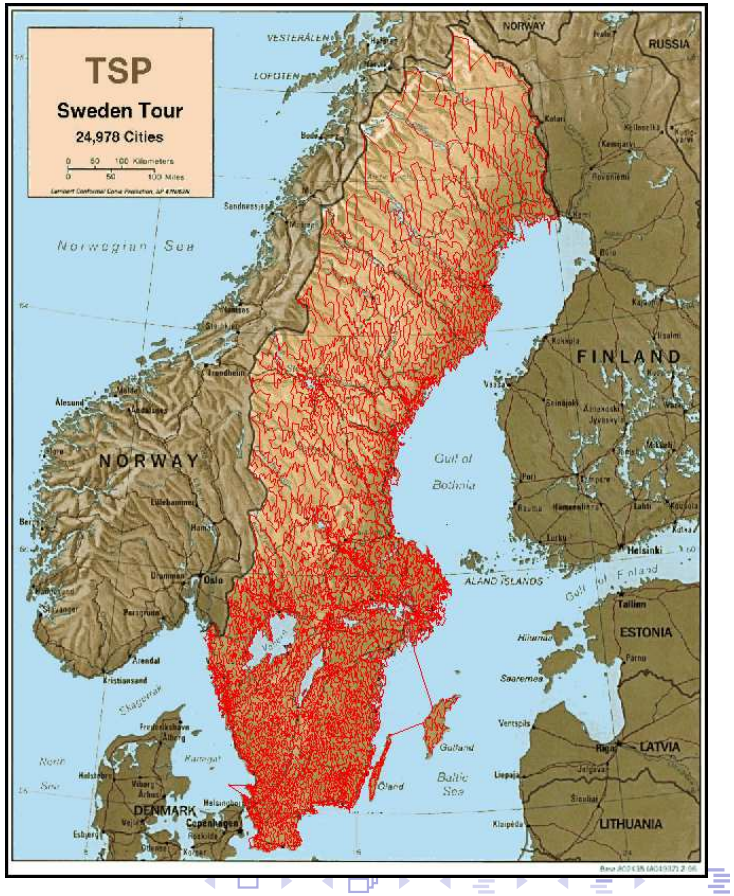
- Trots detta ett väldigt utmanande problem



Historisk utveckling av TSP-lösning—effektiva kombinationer av algoritmer

Optimala lösningar till TSP av olika storlekar hittade:

År	n
1954	49
1962	33
1977	120
1987	532
1987	666
1987	2392
1994	7397
1998	13509
2001	15112
2004	24978
2005/06	85900



Världens största TSP löst "hittills" (2004)

- Ett TSP med 24 978 städer och byar (röda hus) i Sverige
- Optimal rutt: $\approx$ 72 500 km (855597 TSP LIB-enheter)
- Turen med längd 855 597 hittades i mars 2003 mha en heuristik
- I maj 2004 bevisades att ingen kortare tur existerar:
  - Utnyttjade en blandning av olika typer av metoder
  - Det slutliga steget som ökade den undre gränsen från 855 595 till 855 597 krävde $\approx$ 8 CPU-år (parallella beräkningar på ett Linux-kluster)

Världens största TSP löst "hittills" (2004)

- Ett TSP med 24 978 städer och byar (röda hus) i Sverige
- Optimal rutt: $\approx$ 72 500 km (855597 TSP LIB-enheter)
- Turen med längd 855 597 hittades i mars 2003 mha en heuristik
- I maj 2004 bevisades att ingen kortare tur existerar:
  - Utnyttjade en blandning av olika typer av metoder
  - Det slutliga steget som ökade den undre gränsen från 855 595 till 855 597 krävde $\approx$ 8 CPU-år (parallella beräkningar på ett Linux-kluster)
- Nytt rekord 2005/06: 85 900 punkter i en VLSI-tillämpning `www.math.uwaterloo.ca/tsp/pla85900`
- Appar mm: `www.math.uwaterloo.ca/tsp/index.html`

Översikt

1. Matematisk optimering: bakgrund, definition, tillämpningar
   - Historia
   - Matematisk optimering
   - Tillämpningar
2. Matematik i optimeringsmodeller
   - Linjär optimering
3. Matematisk optimering vid Chalmers/GU
   - Kurser i matematisk optimering vid MV
   - Examensarbeten vid Chalmers/GU inom matematisk optimering

Kurser i matematisk optimering vid MV

Grundkurser (ges på engelska)

- MVE166 Linjär och heltalsoptimering med tillämpningar, LP4, år 2
  `https://chalmers.instructure.com/courses/23434`
- TMA947 Olinjär optimering, LP1, år 3
  `https://chalmers.instructure.com/courses/19899`

Fortsättningskurs (MSc)

- TMA521 Large-scale optimization, LP2
  `https://chalmers.instructure.com/courses/20879`

Några masterexamensarbeten inom matematisk optimering

www.chalmers.se/en/departments/math/research/research-groups/optimization/Pages/master-thesis-projects.aspx

Volvo Group Trucks Technology:

- Vehicle routing problems with many available vehicle types
- Optimization of routes for a fleet of plug-in hybrid vehicles

Volvo Car Corporation, Göteborg:

- Dispatching fleets of shared autonomous vehicles

Ericsson AB:

- Models and methods for deploying functions on a many-core grid

Department of Mathematical Sciences:

- Application of logic-based Benders decomposition to battery dimensioning for the routing of hybrid vehicles

Ongoing Warehouse:

- Optimize the pick path via batching in warehouses for the third-party logistics industry

Aviolinx, Stockholm:

- Tail assignment for single and mixed aircraft fleets

Signal Processing and Mathematical Sciences, Chalmers

- Sequentially connected 2D assignment problems solved using

Frågor?