

GAMMAFUNKTIONEN ELLER VARFÖR $(-1/2)! = \sqrt{\pi}$

MARTIN HALLNÄS

ABSTRACT. Denna text utgör anteckningar inför en gästföreläsning i kursen MVE235 Matematisk Orientering på Chalmers civilingenjörsprogram Teknisk Matematik den 4:e december 2019.

Inspiration:

Philip J. Davis, *Euler's integral: A historical profile of the Gamma function*, The American Mathematical Monthly, Vol. 66, No. 10 (1959), pp. 849–869.

1. INTERPOLATIONSPROBLEM

Vår historia tar sin början år 1729 i en brevväxling mellan Leonard Euler, då endast 22 år gammal, och Christian Goldbach, en “spindel i nätet” i kontakt med många av dåtidens stora tänkare och upphovsmakare till, den ännu olösta, “Goldbach’s förmodan” (varje positivt jämnt heltal ≥ 4 kan uttryckas som en summa av två primtal). I centrum befinner sig ett till synes enkelt interpolationsproblem som varken Goldbach eller storheter som Daniel Bernoulli eller James Stirling hade lyckats lösa.

Men vad menar vi med *interpolation*?

Example 1.1. *Betrakta de triangulära talen*

n	1	2	3	4
T_n	1	1 + 2	1 + 2 + 3	1 + 2 + 3 + 4

(som ger antalet objekt som kan arrangeras i en liksidig triangel där varje sida innehåller n objekt.) Med elementära tekniker visas formeln

$$T_n = \frac{1}{2}n(n+1),$$

vilken har (åtminstone) två intressanta konsekvenser:

- oavsett n fås T_n efter tre räkneoperationer,
- n behöver ej vara ett (positivt) heltal, t.ex. då $n = 2\frac{1}{2}$ fås

$$T_{2\frac{1}{2}} = 4\frac{3}{8},$$

dvs. formeln interpolerar (med enkla medel) mellan tidigare kända värden.

Example 1.2. För $m = 1, 2, 3, \dots$ definieras

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m \text{ st. termer}}$$

men vad betyder $a^{7\frac{1}{3}}$? Detta interpolationsproblem löses med definition

$$a^0 = 1, \quad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}, \dots$$

vilken motiveras av att potenslagarna fortsatt gäller.

Låt oss återvända till de triangulära talen T_n . Ersätter vi $+$ med $\cdot$ erhåller vi $n!$ (utläses: n fakultet):

n	1	2	3	4	5	6	7
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040

“Intelligenstest”: Vilket tal ska vi skriva mellan 120 och 720? (Med andra ord, $5\frac{1}{2}!$ =?)

Eulers svar: $287,8852\dots$. Hadamards svar: $280,3002\dots$.

Men hur kom Euler och Hadamard fram till sina svar? Vi följer historien och börjar med Euler.

2. GAMMAFUNKTIONEN

Experimenterandes med oändliga produkter observerade Euler

$$\left[\left(\frac{2}{1}\right)^n \frac{1}{n+1}\right] \left[\left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{2}{n+2}\right] \left[\left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{3}{n+3}\right] \cdots = n!$$

och för $n = 1/2$ gav vänsterledet (efter kvadrering och division med 2) John Wallis då berömda produkt

$$\left(\frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3}\right) \left(\frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5}\right) \left(\frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7}\right) \left(\frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 9}\right) \cdots = \frac{\pi}{2}.$$

Alltså, produkten gav heltal då n var ett heltal och ett uttryck innehållande π då $n = 1/2$. Talet π associeras vanligtvis med cirklar och deras areor, som i sin tur associeras med integraler, och Euler kände redan till integraler som uppvisade samma typ av fenomen. Så startade Eulers jakt på en integralrepresentation för $n!$, se t.ex. Davis (1959) för en detaljerad beskrivning av Eulers resonemang. Slutresultatet blev den nu berömda formeln

$$n! = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt.$$

Övning: Bevisa Eulers integralformel för $n!$ genom att använda partiell integration samt induktion över n .

Adrien Marie Legendre (1752–1833) modifierad integralen och introducerade Gammafunktionen

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Grundläggande resultat från analysen ger att $\Gamma(x)$ är väldefinierad för alla reella tal $x > 0$ och vi har

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

Vi kan nu förklara föreläsningens titel:

$$(-1/2)! = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

Bevis. Genom variabelbytet $t = u^2$ ($\Rightarrow t^{-1/2}dt = 2du$) fås

$$\Gamma(1/2) = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du = \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2} du$$

vilken kan beräknas med ett klassiskt ‘trick’:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2} du &= \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2} du \int_{-\infty}^\infty e^{-v^2} dv \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-u^2-v^2} dudv \right)^{1/2} \end{aligned}$$

och variabelbytet

$$u = r \cos \theta, \quad v = r \sin \theta, \quad (\Rightarrow dudv = r dr d\theta),$$

ger

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-u^2-v^2} dudv = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^\infty r e^{-r^2} dr = 2\pi \cdot \left[\frac{-1}{2} e^{-r^2} \right]_{r=0}^{r=\infty} = \pi.$$

□

3. TILLÄMPNINGAR

3.1. **Geometri.** Kom ihåg att den vanliga (2-)sfären med radie $r = 1$ ges av

$$S^2 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Generalisering till godtycklig dimension $n = 1, 2, 3, \dots$ ger n -sfären

$$S^n : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1,$$

vilken har arean

$$2\pi^{n/2} / \Gamma(n/2).$$

3.2. **Sannolikhetsteori.** Livslängden (i tid t) för t.ex. elektroniska komponenter modelleras ofta med en gammafördelning

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} t^{\alpha-1} e^{-t/\beta}, \quad (t > 0).$$

3.3. **Talteori.** Riemannhypotesen – ett av “the Millenium Problems”, värt en miljon dollar, och av central betydelse för hur primtalen är distribuerade – handlar om Riemanns zeta-funktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad (s > 1).$$

Två av dess centrala egenskaper är integralformeln

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$$

och reflektionsformeln

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\pi s/2) \Gamma(1-s) \zeta(1-s).$$

4. EN FILOSOFISK SLUTKLÄM

Är $\Gamma(x+1)$ den "bästa" generaliseringen av $n!$ bortom de positiva hela talen?
Hadamard föreslog istället

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(1-x)} \frac{d}{dx} \log [\Gamma((1-x)/2)\Gamma(1-x/2)].$$

Sitt krångligare utseende till trots har den en fördel över gammafunktionen: $F(x)$ är väldefinierad för alla $x \in \mathbb{R}$ medan $\Gamma(x)$ har singulariteter i punkterna $x = 0, -1, -2, \dots$.

Bland gammafunktionens många egenskaper återfinns:

- (1) $\Gamma(x) > 0$, $x > 0$,
- (2) $\Gamma(1) = 1$,
- (3) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

De första två följer direkt från Eulers integralformel och den tredje kan bevisas med hjälp av partiell integration.

Om vi definierar $0! = 1$ har $n!$ samtliga av dessa egenskaper, dvs. $\Gamma(x)$ generaliserar egenskaper hos $n!$ från positiva heltal till reella tal. Detta är ej fallet för $F(x)$ då

$$F(x+1) = xF(x) + \frac{1}{\Gamma(1-x)}$$

(där $1/\Gamma(1-x) = 0$ om och endast om $x = n = 1, 2, \dots$).

Betrakta nu funktionen

$$G(x) = (1 + \sin^2(2\pi x))\Gamma(x).$$

Eftersom $\sin(2\pi x)$ är periodisk med period 1 och $\sin^2(2\pi x) \geq 0$ med likhet då $x = 0$ har även $G(x)$ ovanstående egenskaper. För att entydigt karakterisera $\Gamma(x)$ behövs alltså ytterligare egenskaper men vilka? 1922 visade Bohr och Møllerup att det räcker att kräva logaritmisk konvexitet, dvs. att $\log \Gamma(x)$ är en konvex funktion:

Gammafunktionen är den enda funktionen, definierad för $x > 0$, som har egenskaperna 1–3 samt är logaritmiskt konvex.

Email address: `hallnas@chalmers.se`

MATEMATISKA VETENSKAPER, CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA OCH GÖTEBORGS UNIVERSITET,
412 96 GÖTEBORG