

FTF131 Övning I: Residykalkyl

by Daniel Erkensten

November, 2022

1 Cauchys principalvärde

I denna kurs kommer vi frekvent att använda oss av Cauchys principalvärde vid integralräkning. Detta är ett sätt att omdefiniera formellt divergenta integraler. I allmänhet kan vi definiera *principalvärdet* $\mathcal{P}$ av integralen $I = \int dx f(x)$ enligt

$$\mathcal{P}(I) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{x_0-\epsilon} f(x) dx + \int_{x_0+\epsilon}^b f(x) dx \right), \quad (1)$$

där x_0 är en ändlig¹ singularitet (oftast *pol*) till $f(x)$. Fallet med flera poler x_i fås enkelt genom summation.

2 Residyintegral I

Betrakta integralen

$$I = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x+1)} \quad (2)$$

Vi noterar att vi integrerar längs den reella axeln och behöver undvika polen i $x_0 = -1$. Det finns även poler i $x = \pm i$, men dessa är ju inte med i vårt integrationsområde! Vi använder (1) och finner

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-1-\epsilon} \frac{dx}{(x^2+1)(x+1)} + \int_{-1+\epsilon}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x+1)} \right) \quad (3)$$

Nu komplexifierar vi integralen ovan och betraktar kurvintegralen $\oint_C f(z) dz$, med $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z+1)}$ och den slutna kurvan $C = L_1 \cup L_2 \cup C_\epsilon \cup C_R$, med beteckningar enligt Figur 1.² Här ser vi att vi kan skriva (i gränsen $\epsilon \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$)

$$I = \int_{L_1} f(x) dx + \int_{L_2} f(x) dx. \quad (4)$$

Vi betraktar emellertid

$$I' = \oint_C f(z) dz = I + \int_{C_\epsilon} f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz. \quad (5)$$

Först beräknar vi integralen över C_ϵ . Här parametriserar vi $z = \epsilon e^{it} - 1$, $t \in [\pi, 2\pi]$. Vi finner då

$$\int_{C_\epsilon} f(z) dz = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{i\epsilon e^{it} dt}{((\epsilon e^{it} - 1)^2 + 1)(\epsilon e^{it})} \rightarrow \frac{i\pi}{2}, \epsilon \rightarrow 0. \quad (6)$$

¹Om vi har en singularitet i $x_0 \rightarrow \infty$, och betraktar integralen $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ gäller det att $\mathcal{P}(I) = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a f(x) dx$.

²Notera att vi kan välja att innesluta eller utesluta polen $x = -1$. Både valen ger naturligtvis samma svar (bra övning att kolla detta!). Vi hade också kunnat sluta kurvan med en halvcirkel i det undre halvplanet, men detta känns mest naturligt.

Vidare visar vi att integralen över den stora cirkelbågen, C_R , går mot noll då $R \rightarrow \infty$ (parametrisera $z = Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$):³

$$\int_{C_R} f(z)dz = \int_0^\pi \frac{id\theta}{(R^2 e^{2i\theta} + 1)(1 + 1/(Re^{i\theta}))} \rightarrow 0, R \rightarrow \infty \quad (7)$$

Slutligen, kan vi lätt beräkna den återstående kurvintegralen enkelt via residysatsen. Vi har bara enkelpoler $z_0 = -1$ samt $z_1 = +i$ som innesluts av kurvan C , och därav följer att (notera moturs orientering på kurvan!)

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i(\text{Res}_{z_0=-1}(f(z)) + \text{Res}_{z_1=i}(f(z))) = 2\pi i\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2i(1+i)}\right) = i\pi + \frac{\pi}{(1+i)}. \quad (8)$$

Detta ger alltså via (5) att

$$i\pi + \frac{\pi}{(1+i)} = I + \int_{C_\epsilon} f(z)dz = I + \frac{i\pi}{2}, \quad (9)$$

Härur följer

$$I = \frac{i\pi}{2} + \frac{\pi}{i+1} = \frac{i\pi(i+1) + 2\pi}{2(i+1)} = \frac{\pi(1+i)}{2(1+i)} = \frac{\pi}{2}, \quad (10)$$

och vi är klara. I slutändan får vi inga imaginära bidrag till integralen, som förväntat. Vi finner alltså att

$$\boxed{I = \frac{\pi}{2}}. \quad (11)$$

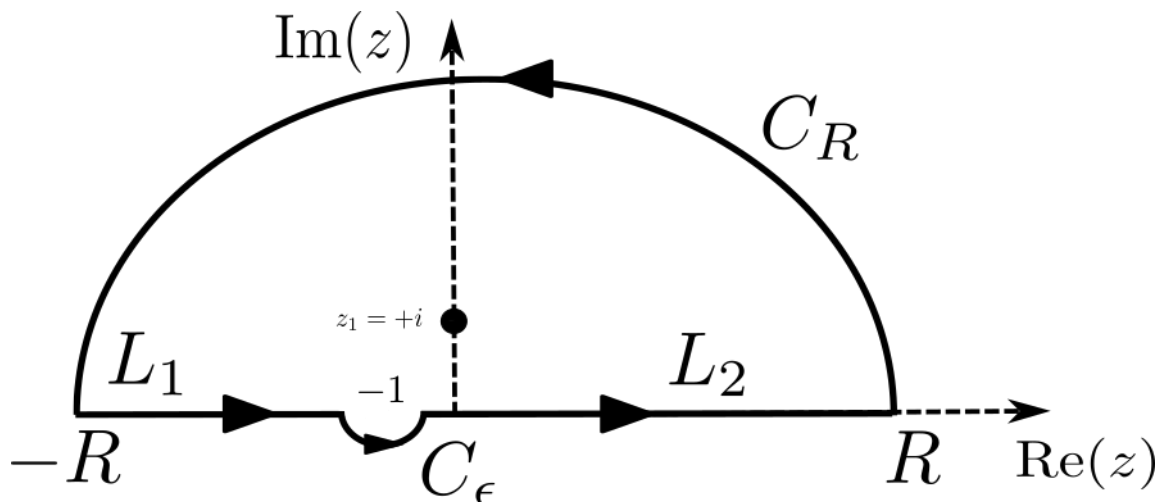


Figure 1: Integrationskurva för exempel 1. Notera att vi bara visar övre halvplanet här. Polen $z_2 = -i$ ligger utanför integrationsområdet.

3 Residyintegral II: Grensnitt

Betrakta integralen⁴

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}}{x+1} dx, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (12)$$

³Alternativt med Jordans lemma: $|f(z)|$ går likformigt mot noll snabbare än $1/|z|$, då $|z| = R \rightarrow \infty$.

⁴Anmärkning: integralen är väldefinierad i gränserna $x \rightarrow 0$ och $x \rightarrow \infty$. Speciellt, för $x \ll 1$, gäller att integranden $f(x) = \frac{x^{-\alpha}}{x+1} \approx x^{-\alpha}$ (som lätt kan integreras) och för $x \gg 1$ gäller att $f(x) \approx x^{-\alpha-1}$ (som också är integrerbar i $x \rightarrow \infty$ för $\alpha > 0$).

Varför är denna integral problematisk? Integranden är *flervärd*. Detta ser vi genom att parametrisera $z = re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ och noterar att för $\theta = 0$ har vi att $z^{-\alpha} = r^{-\alpha}$ emedan för $\theta = 2\pi$ finner vi $z^{-\alpha} = r^{-\alpha}e^{-2\pi i\alpha} \neq r^{-\alpha}$ eftersom $0 < \alpha < 1$. För att råda bot på denna tvetydighet vid integrationen lägger vi ett grensnitt längs den positiva reella axeln, se figur 2. Nu sätter vi $f(z) = z^{-\alpha}/(z+1)$ och betraktar integralen runt $C = C_\epsilon \cup C_R \cup I \cup I_2$. Integralerna runt C_ϵ och C_R beräknas som i föregående uppgift. Det följer att

$$\int_{C_R} f(z)dz \approx \int_0^{2\pi} R^{-\alpha-1}ie^{-i\alpha\theta}d\theta \rightarrow 0, R \rightarrow \infty \quad (13)$$

och analogt

$$\int_{C_\epsilon} f(z)dz \approx \epsilon^{1-\alpha} \int_0^{2\pi} ie^{-i(\alpha-1)\theta}d\theta \rightarrow 0, \epsilon \rightarrow 0 \quad (14)$$

På I har vi $z \approx x$ och således kan vi identifiera vår originalintegral. Analogt har vi $z \approx e^{2\pi i}x$ på I_2 .⁵ Detta resulterar i

$$\int_{I_2} f(z)dz = \int_\infty^\epsilon x^{-\alpha}e^{-2\pi i\alpha}/(x+1) \rightarrow -e^{-2\pi i\alpha}I, \epsilon \rightarrow 0 \quad (15)$$

Nu återstår bara att beräkna den slutna kurvintegralen över C :

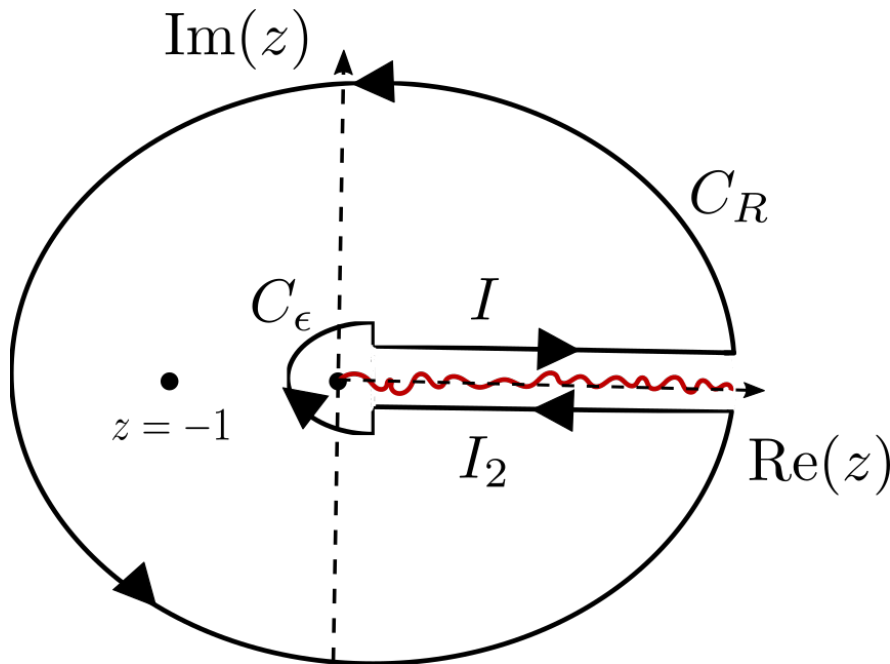


Figure 2: Integration med grensnitt.

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \text{Res}_{z=-1}(f(z)) = 2\pi i e^{-i\pi\alpha} \quad (16)$$

Sammantaget har vi alltså funnit att

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i e^{-i\pi\alpha} = (1 - e^{-2\pi i\alpha})I, \quad (17)$$

varur det följer att

$$I = \frac{2\pi i}{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}. \quad (18)$$

Notera att vi ej får några problem med divergenser på grund av kravet $0 < \alpha < 1$.

⁵Formellt bör man ta $2\pi \rightarrow 2\pi - \epsilon$ och i slutet av räkningen ta gränsen $\epsilon \rightarrow 0$, men vi behöver inte vara så petiga här.

4 Smart kurva

Vi betraktar följande integral

$$I_n = \int_0^\infty \frac{1}{x^n + 1} dx, n > 1, \quad (19)$$

där vi noterar att specialfallet I_3 löstes på föreläsning. Här vill vi finna lösningen för att allmänt $n > 1$ ⁶ Vi börjar med att komplexifiera integralen, det vill säga inför

$$f(z) = \frac{1}{z^n + 1}. \quad (20)$$

Nu önskar vi finna polerna till $f(z)$. Dessa finner vi enkelt genom att kräva att $z^n = -1$ varur det följer att

$$z_k = e^{i\pi(1+2k)/n}, k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (21)$$

Betraktar man dessa poler i det komplexa talplanet finner man att de ligger utplacerade längs med enhetscirkeln. Dess exakta placering beror på n , men den behöver vi ej här. Vi vet emellertid hur polerna är placerade relativt varandra. Hur väljer vi vår integrationskurva? Vi är "smarta" och innesluter bara en enda pol, $z_0 = e^{i\pi/n}$. Detta kan vi göra med en så kallad "pizza curve". Denna slutna kurva γ består av tre delar enligt $\gamma = \Gamma \cup C_R \cup (0, R)$, se figur.

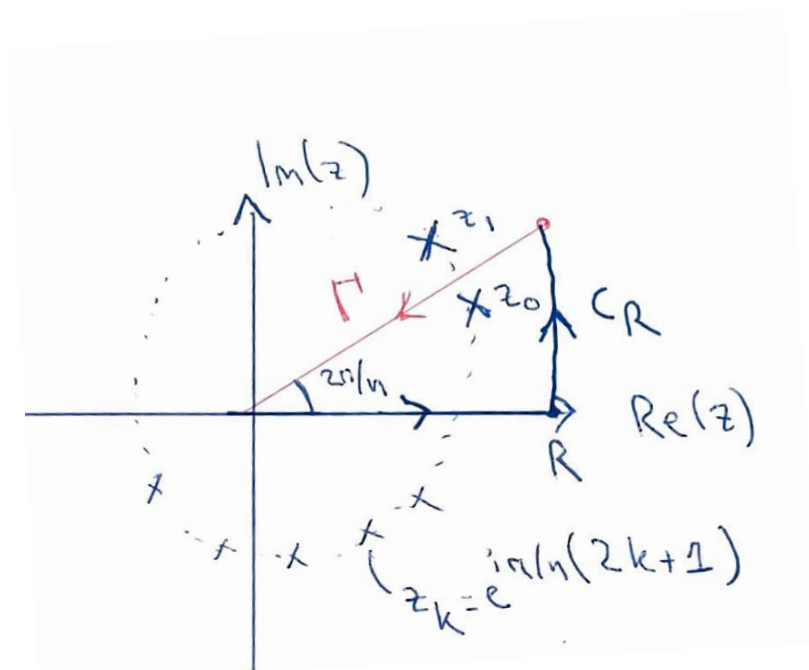


Figure 3: Smart kurva $\gamma : \Gamma \cup C_R \cup (0, R)$. De n polerna ligger utspridda längs med enhetscirkeln.

Vi kan nu skriva

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\gamma} f(z) dz = I_n + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f(z) dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz, \quad (22)$$

⁶Fallet $0 \leq n \leq 1$ konvergerar inte. Det bör ni kunna övertyga er om. Notera också att vi inte kräver att n är ett heltal.

där I_n är integralen vi önskar beräkna. Låt oss visa att integralen över C_R går mot noll då $R \rightarrow \infty$:⁷

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \sim \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi/n} \frac{d\theta}{R^{n-1}} = 0, \quad (23)$$

enligt Jordans lemma (då $n > 1$ enligt ovan). Nu fortsätter vi genom att lösa integralen över Γ . Längs Γ parametriserar vi $z = te^{2\pi i/n}$ (notera att det är radien som varierar nu, och inte vinkeln!) och finner

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_R^0 \frac{e^{2\pi i/n} dt}{(te^{2\pi i/n})^n + 1} = -e^{2\pi i/n} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^n + 1} = -e^{2\pi i/n} I. \quad (24)$$

Vi har således funnit att

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint f(z) dz = (1 - e^{2\pi i/n}) I. \quad (25)$$

Det återstår att beräkna vänsterledet. För detta ändamål behöver vi notera att kurvan γ omsluts med moturs orientering och kan tillämpa residysatsen:

$$\oint_{\gamma} f(z) = 2\pi i \text{Res}(f(z), z_0) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{z^n + 1} = \frac{2\pi i}{ne^{i\pi/n(n-1)}} = -\frac{2\pi i e^{i\pi/n}}{n}, \quad (26)$$

där vi i tredje steget nyttjade L'Hospitals regel⁸. Nu återstår bara att lägga ihop de två ekvationerna ovan och vi enkel algebra (Eulers formel) ger

$$I_n = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}, n > 1. \quad (27)$$

Speciellt gäller det att

$$I_2 = \frac{\pi}{2}, I_3 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}, \quad (28)$$

där I_2 kollas lätt ($f(x) = 1/(1+x^2)$ har primitiven $F(x) = \arctan(x)$) och I_3 behandlades på föreläsning (med exakt samma smarta kurva som ovan med $n = 3$, svarande mot vinkeln $\alpha = 2\pi/3$). Vi har även att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 1, \quad (29)$$

vilket vi visar genom att nyttja standardgränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Korrektheten i detta resultat kan kollas genom att dela upp den reella integralen enligt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^n + 1} = \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{x^n + 1}}_{=1} + \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^n + 1}}_{=0} = 1. \quad (30)$$

⁷Om vi vill vara mer noggranna: $\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{n} \frac{R}{1-R^n} = 0$, där vi nyttjade den omvända triangelolikheten i sista steget. Alternativt använder vi Jordans lemma och når samma slutsats litet snabbare.

⁸Alternativt kan man Taylorutveckla nämnaren till första ordningen kring $z = z_0$ och erhålla samma resultat.

5 Fysikexempel: Fresnelintegraler och Cornuspiraler

Här betraktar vi följande integraler som uppträder i diffraktionsteori och är uppkallade efter Fresnel (ett namn ni bör känna till från optiken):

$$S(t) = \int_0^t \cos(\pi x^2/2) , C(t) = \int_0^t \sin(\pi x^2/2) \quad (31)$$

Enligt Eulers formel kan vi bilda följande funktion:

$$G(t) = S(t) + iC(t) = \int_0^t e^{i\pi x^2/2} dx . \quad (32)$$

Denna linjärkombination beskriver en så kallad Cornuspiral i det komplexa talplanet. Här önskar vi beräkna gränsvärdet

$$I = \lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = \int_0^\infty e^{i\pi x^2/2} dx , \quad (33)$$

genom att välja en *smart kurva* i det komplexa talplanet. Betrakta kurvan i Figur 4 och integralen

$$\oint_{C=L_1 \cup L_2 \cup L_3} e^{i\pi z^2/2} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \underbrace{\int_0^R e^{i\pi x^2/2} dx}_{=I} + \int_{L_2} e^{i\pi z^2/2} dz + \int_{L_3} e^{i\pi z^2/2} dz = 0 . \quad (34)$$

Notera att integralen över den slutna kurvan C är noll enligt residysatsen, eftersom integranden är analytisk och saknar singulariteter. På integralen över L_3 kan vi parametrisera $z = re^{i\alpha}$ och finna

$$\int_{L_3} e^{i\pi z^2/2} dz = e^{i\alpha} \int_\infty^0 e^{i\pi r^2 e^{2i\alpha}/2} dr . \quad (35)$$

För att komma vidare, behöver vi nu specificera vinkeln α . Låt oss ta $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Detta val är lämpligt, eftersom vi då blir av med den imaginära exponenten ovan och återfår en (reell) Gaussisk integral som vi lätt kan lösa. Vi får alltså:

$$\int_{L_3} e^{i\pi z^2/2} dz = \{\alpha = \frac{\pi}{4}\} = -e^{i\pi/4} \int_0^\infty e^{-\pi r^2/2} dr = -e^{i\pi/4} \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}(1+i) , \quad (36)$$

där vi nyttjade den Gaussiska integralen

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} , a > 0 , \quad (37)$$

vars bevis ni bör stött på i kursen i flervariabelanalys. Nu återstår att beräkna integralen över L_2 . På detta cirkelsegment kan vi parametrisera $z = Re^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, \pi/4]$ och finner att

$$\int_{L_2} e^{i\pi z^2/2} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/4} iRe^{i\varphi} e^{i\pi R^2/2(\cos(2\varphi)+i\sin(2\varphi))} d\varphi \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/4} Re^{-\pi R^2/2\sin(2\varphi)} d\varphi , \quad (38)$$

där vi i sista steget använt triangelolikheten för integraler (notera att $|e^{ix}| = 1$ för $x \in \mathbf{R}$). Vidare gör vi substitutionen $2\varphi = t$, varpå vi finner

$$\int_{L_2} e^{i\pi z^2/2} dz \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \frac{R}{2} e^{-\pi R^2/2\sin(t)} dt . \quad (39)$$

Slutligen behöver vi nyttja *Jordans olikhet* för att kunna visa att integralen ovan går mot noll då $R \rightarrow \infty$. Jordans olikhet lyder:

$$\frac{2}{\pi}t \leq \sin(t) \leq t, t \in [0, \frac{\pi}{2}] . \quad (40)$$

Det är lätt att övertyga sig om att en rät linje alltid är mindre än eller lika med $\sin(t)$ på intervallet $t \in [0, \pi/2]$. Med hjälp av olikheten ovan kan vi uppskatta integralen:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \frac{R}{2} e^{-\pi R^2/2 \sin(t)} dt \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \frac{R}{2} e^{-R^2 t} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} (1 - e^{-R^2 \pi/2}) = 0 , \quad (41)$$

och således har vi visat att integralen över L_2 kan uppskattas till noll. Sammanfattningsvis finner vi alltså från (34) att det sökta gränsvärdet blir

$$I = \frac{1}{2}(1 + i) . \quad (42)$$

Speciellt finner vi alltså att integralerna

$$\int_0^\infty \cos(\pi x^2/2) dx = \int_0^\infty \sin(\pi x^2/2) dx = \frac{1}{2} . \quad (43)$$

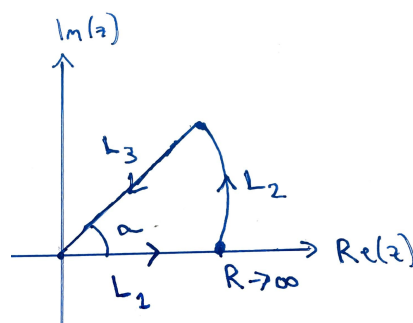


Figure 4: Lämplig kurva för att beräkna Fresnelintegraler.