

FTF131 Övning III: Sadelpunktsmetoden

by Daniel Erkensten

November, 2022

1 Sadelpunktsmetoden

Sadelpunktsmetoden¹ nyttjas för att approximera integraler på följande form:

$$I(r) = \int_{\gamma} g(z) e^{f(z)r} dz , \quad (1)$$

för stora $r > 0$ ($r \in \mathbf{R}$), $f(z)$ och $g(z)$ är *analytiska* funktioner, och γ är en kurva sådan att ändpunkterna inte bidrar till integralen (det vill säga $g(z)e^{f(z)r} \sim 0$ i ändpunkterna).

1.1 Anmärkningar

- Beloppet av integranden är stort när realdelen av $f(z)$ är stor:

$$|g(z)e^{f(z)r}| = |g(z)e^{r\operatorname{Re}(f(z))}| \quad (2)$$

- $f(z)$ är analytisk så vi kan förskjuta integrationskurvan så att den passerar området där realdelen är stor.
- Kan approximera integralen med en utveckling av $f(z)$ i integrationsområdet.

1.2 Varför är sadelpunkter intressant?

Funktionen $f(z)$ är analytisk och har därför (enligt Cauchy-Riemanns ekvationer) real och imaginärdelar som är harmoniska funktioner (visas nedan!). Vi kan skriva

$$f(z) = u(z) + iv(z) , \quad (3)$$

där $u(z)$ och $v(z)$ uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} , \quad (4)$$

varur det följer att

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 , \quad (5)$$

så att $u(z)$ är harmonisk (analog räkning ger $v(z)$ harmonisk) och således har vi inga lokala minima eller maxima i det komplexa planet, endast sadelpunkter.

¹På engelska kallad Saddle-point method eller Method of Steepest Descent. Notera dock att den senare benämningen också används för en viss numerisk metod vid optimeringsproblem.

1.3 Plan

1. Hitta en stationär punkt $z_0 = x_0 + iy_0$ till $u(x, y)$.
2. Taylor-utveckla $f(z)$ runt z_0 till andra ordningen och approximera $g(z) \approx g(z_0)$.
3. Deformera integrationskurvan² så att den passerar genom z_0 i de riktningar där $u(x, y)$ avtar snabbast.
4. Evaluera integralen med hjälp av den kända integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} . \quad (6)$$

2 Detaljer

Antag att $z_0 = x_0 + iy_0$ är en stationär punkt till $u(z) = \operatorname{Re}(f(z))$. Taylorutveckla nu $f(z)$ kring z_0 :

$$f(z) = f(z_0) + \frac{1}{2}f''(z_0)(z - z_0)^2 + \mathcal{O}(z^3) , \quad (7)$$

där vi noterar att första-derivatan i utvecklingen försvinner eftersom z_0 är en stationär punkt. Definiera nu

$$f''(z_0) = \rho e^{i\theta} , z - z_0 = se^{i\varphi} , \quad (8)$$

där s beskriver hur långt bort från z_0 vi är och φ anger riktningen (imaginär/realdel). Med de introducerade definitionerna följer det nu att

$$f(z) \approx f(z_0) + \frac{1}{2}\rho s^2 e^{i\theta+2i\varphi} , \quad (9)$$

vilket ger

$$u(z) \approx u(z_0) + \frac{1}{2}\rho s^2 \cos(\theta + 2\varphi) , v(z) \approx v(z_0) + \frac{1}{2}\rho s^2 \sin(\theta + 2\varphi) \quad (10)$$

Nu vill vi avgöra var $u(z)$ avtar snabbast. Detta ges av dess första-derivata:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = s\rho \cos(\theta + 2\varphi) , \quad (11)$$

vilket är som mest avtagande då

$$\cos(\theta + 2\varphi) = -1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + n\pi - \frac{\theta}{2} . \quad (12)$$

Vi inser här att, för varje givet θ finns det två lösningar för φ som ges av $\varphi = \varphi_0 = \frac{\pi-\theta}{2}$ ($n=0$) och $\varphi = \varphi_0 + \pi = \frac{3\pi-\theta}{2}$ ($n=1$). Detta svarar mot de två *dalriktningarna*. Notera nu att, i dalriktningarna gäller det att $\sin(\theta + 2\varphi) = 0$ så att

$$v(z) \approx v(z_0) . \quad (13)$$

Nu önskar vi deformera integrationskurvan, det vill säga ta originalkurvan γ och deformera denna till γ' . Vad händer med integralen? Ingenting, då integranden i (1) är analytisk och det gäller enligt Cauchys sats att

$$\int_{\gamma \cup \gamma'} g(z) e^{f(z)r} dz = 0 \Leftrightarrow \int_{\gamma} g(z) e^{f(z)r} dz = \int_{\gamma'} g(z) e^{f(z)r} dz . \quad (14)$$

²Här ritas man lämpligen en figur där γ går längs reella axeln och γ' passerar genom z_0 i det komplexa talplanet.

Notera speciellt att vi antagit att ändpunkterna inte får bidra till integralen. Nu är vi redo att skriva ner en slutgiltig formel för sadelpunktsapproximationen av $I(r)$. Sammanfattningsvis har vi funnit att

$$f(z) \approx u(z_0) + iv(z_0) - \frac{1}{2}\rho s^2, g(z) \approx g(z_0), \quad (15)$$

med

$$z - z_0 = se^{i\varphi_0}, dz = e^{i\varphi_0} ds, \quad (16)$$

med specificerad riktning φ_0 . Detta ger att vi kan approximera $I(r)$ enligt

$$I(r) \approx \int_{-\infty}^{\infty} g(z_0) e^{(u(z_0) + iv(z_0) - \frac{1}{2}\rho s^2)r} e^{i\varphi_0} ds = g(z_0) e^{f(z_0)r} e^{i\varphi_0} \int_{-\infty}^{\infty} -e^{\frac{1}{2}\rho s^2 r} ds, \quad (17)$$

där vi satte integrationsgränserna till $\pm\infty$. Eftersom vi bara vill göra en grov uppskattning av integralen är detta okej (det är antaget att exponentialen avtar mycket snabbt då $|s| \gg 0$). Vi nyttjar nu (6) som resulterar i

$$\boxed{I(r) \approx g(z_0) e^{f(z_0)r} e^{i\varphi_0} \sqrt{\frac{2\pi}{r\rho}}}, \quad (18)$$

och vi har erhållit *sadelpunktsapproximationen* av $I(r)$.

3 Exempel: Stirlings formel

Betrakta definitionen av fakultet:

$$I(N) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^N = N!, \quad (19)$$

där N är ett positivt heltal.³ Här vill vi finna en känd approximation av fakulteten för *stora* N , vida känd som Stirlings⁴ formel (som ni säkerligen stött på i tidigare analyskurser). Notera att följande håller:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} x^N = 0, \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} x^N = 0, \quad (20)$$

så att ändpunkterna inte bidrar till integralen. Gör variabelbytet $x = Nz$ för att få integranden på en form som är lämplig för sadelpunktsapproximationen:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^N = N^{N+1} \int_0^{\infty} e^{-Nz} z^N dz = N^{N+1} \int_0^{\infty} e^{N(\ln(z) - z)} dz. \quad (21)$$

Nu identifierar vi, från (1) följande funktioner:

$$g(z) = N^{N+1}, f(z) = \ln(z) - z, \quad (22)$$

och finner följande stationära punkt till $f(z)$:

$$f'(z_0) = \frac{1}{z_0} - 1 = 0 \leftrightarrow z_0 = 1, \quad (23)$$

³Man kan också släppa på restriktionen att N är ett (positivt) heltal och istället låta $N > 0$ och $N \in \mathbf{R}$. På detta vis kan man förlänga definitionen av fakultet till icke-heltal och man finner att $N! = \Gamma(N+1)$, där $\Gamma(\dots)$ är gammafunktionen som helt enkelt definieras av integralen i vårt vänsterled.

⁴Uppkallad efter skotske matematikern James Stirling (1692-1770), som inte bör förväxlas med den skotske ingenjören Robert Stirling (1790-1878) som gav namn till Stirlingmotorn som ni känner till från termodynamiken. Stirling verkar helt enkelt bara vara ett vanligt efternamn i Skottland.

så att

$$f(z_0) = -1, f''(z_0) = \rho e^{i\theta} = -1 \leftrightarrow \rho = 1, \theta = \pi, \quad (24)$$

och vi har även att

$$z - z_0 = z - 1 = se^{i\varphi_0}, \varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} = 0, \quad (25)$$

enligt ekvationen ovan samt (12). Insättningen av $g(z_0)$, $f(z_0)$, φ_0 och ρ ger nu $I(N)$ för stora N :

$$I(N) \approx N^{N+1} e^{-N} \sqrt{\frac{2\pi}{N}} = \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N, \quad (26)$$

och vi har nu härlett Stirlings formel:

$$N! \approx \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N. \quad (27)$$

I Figur 1 har vi undersökt hur väl Stirlings formel approximerar fakulteten ($N!$) och gammafunktionen ($\Gamma(N+1)$). Som förväntat stämmer approximationen dåligt för små N , men blir bättre och bättre ju större N (där ju sadelpunktsmetoden fungerar som bäst).

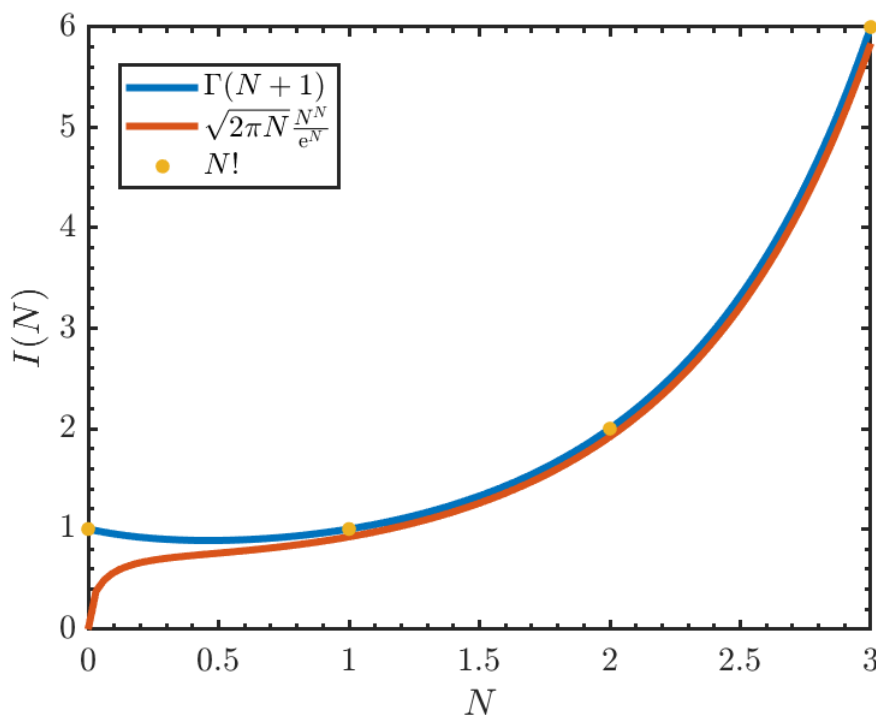


Figure 1: Jämförelse av fakulteten ($N!$), gammafunktionen ($\Gamma(N+1)$) samt Stirlings formel ($\sqrt{2\pi N}(\frac{N}{e})^N$).