

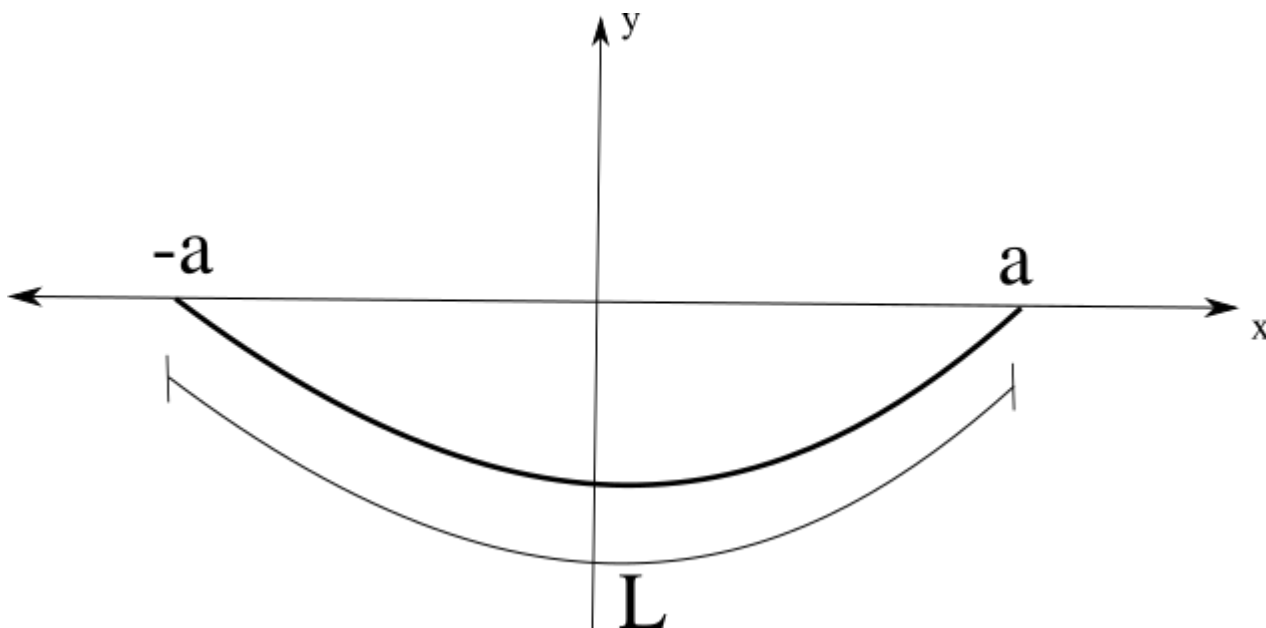
# FTF131 Övning IV: Variationskalkyl

by Daniel Erkensten

November, 2022

## 1 Optimala formen på ett hängande rep

Här betraktar vi ett rep med längd  $L$  som är upphängt i två punkter (på samma höjd) och önskar bestämma repets form, se Figur 1. Detta utgör ett typexempel där vi vill använda variationskalkyl med tvång. Till att börja med, antar vi att repet har en densitet  $\rho$  i enheter kg/m. Nu kan vi frilägga en infinitesimal bit av repet med längd  $ds$  som påverkas



**Figure 1:** Hängande rep med längd  $L$  upphängt i punkterna  $(-a, 0)$  och  $(a, 0)$ .

av en tyngdkraft  $mg = \rho ds g$ . Från detta kan vi teckna den potentiella energin  $dE$  för den infinitesimala biten rep enligt

$$dE = \rho ds g y(x), ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad (1)$$

där linjeelementet  $ds$  kan uttryckas med hjälp av Pythagoras sats. Den totala potentiella energin hos repet fås enkelt genom integration:

$$E = \int dE = \int \rho g y \sqrt{1 + (y')^2} dx. \quad (2)$$

Vi vill nu finna funktionen  $y(x)$  som gör att den potentiella energin minimeras, under bivillkoret att

$$L = \int ds = \int_{-a}^a \sqrt{1 + (y')^2} dx. \quad (3)$$

Vi kräver att  $\delta E = 0$  (variationen av  $E$ ) för att (2) ska vara stationär och nyttjar Lagranges multiplikator metod för bivillkoret, det vill säga, vi betraktar istället

$$\tilde{E} = E - \lambda L = \int_{-a}^a (\rho g y - \lambda) \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad (4)$$

och eftersom  $\lambda$  är konstant följer det att  $\delta\tilde{E} = \delta E = 0$  och vi kan identifiera en funktional

$$F(x, y, y') = (\rho g y - \lambda) \sqrt{1 + (y')^2} . \quad (5)$$

Notera speciellt att funktionalen inte är explicit beroende av variabeln  $x$ . Detta gör att vi kan tillämpa specialfallet av Eulers ekvation, *Beltramiidentiteten*:

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C , \quad (6)$$

där  $C$  är en konstant. Insättning av funktionalen (5) (genomför derivatorna!) ger nu följande ekvation:

$$\frac{\rho g y - \lambda}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C . \quad (7)$$

Detta uttryck kan vi omarrangera så att

$$dx = \frac{C dy}{\sqrt{(\rho g y - \lambda)^2 - C^2}} . \quad (8)$$

Nu återstår det bara att integrera ekvationen ovan. Detta resulterar i

$$x = \int \frac{C dy}{\sqrt{(\rho g y - \lambda)^2 - C^2}} . \quad (9)$$

Integralen i högerledet kan lösas med två substitutioner:

$$\int \frac{C dy}{\sqrt{(\rho g y - \lambda)^2 - C^2}} = \{\rho g y - \lambda = t, \rho g dy = dt\} = \frac{C}{\rho g} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - C^2}} ,$$

vilken i sin tur löses med substitutionen  $t = C \cosh(\xi)$ :

$$\frac{C}{\rho g} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - C^2}} = \{t = C \cosh(\xi) dt = C \sinh(\xi) d\xi\} = \frac{C}{\rho g} \int \frac{C \sinh(\xi) d\xi}{\sqrt{C^2(\cosh^2(\xi) - 1)}} , \quad (10)$$

men  $\cosh^2(\xi) - 1 = \sinh^2(\xi)$  enligt den hyperboliska ettan<sup>1</sup> så det följer att

$$\frac{C}{\rho g} \int \frac{C \sinh(\xi) d\xi}{\sqrt{C^2(\cosh^2(\xi) - 1)}} = \frac{C}{\rho g} \int d\xi = \frac{C}{\rho g} \xi + B = \frac{C}{\rho g} \operatorname{arccosh}\left(\frac{\rho g y - \lambda}{C}\right) + B, \quad (11)$$

där  $B$  är en integrationskonstant. Kombinerar vi (11) med (9) kan vi lösa för  $y(x)$ :

$$x = \frac{C}{\rho g} \operatorname{arccosh}\left(\frac{\rho g y - \lambda}{C}\right) + B \leftrightarrow y(x) = \frac{C}{\rho g} \cosh\left(\frac{\rho g}{C}(x - B)\right) + \frac{\lambda}{\rho g} . \quad (12)$$

Sammanfattningsvis finner vi alltså att den optimala formen på ett upphängt rep beskrivs av funktionen

$$\boxed{y(x) = \frac{C}{\rho g} \cosh\left(\frac{\rho g}{C}(x - B)\right) + \frac{\lambda}{\rho g}} , \quad (13)$$

där konstanterna  $C$ ,  $B$  samt  $\lambda$  bestäms från randvillkoret  $y(\pm a) = 0$  samt bivillkoret (3). De resulterande ekvationerna för dessa konstanter behöver lösas numeriskt, så vi stannar här.

**Kommentar:** det visar sig att en *inverterad* kedja följer samma form som en upphängd kedja. I synnerhet har man nyligen insett att två renässans-kupoler tillhörande Peterskyrkan i Rom (á la Michelangelo) samt katedralen i Florens (á la Brunelleschi) kan beskrivas enligt formen i (13). Se den korta men insiktsfulla publikationen "The relevant role of calculus in renaissance domes' design, before differential geometry was born" av Pavani (länkad separat på kurshemsidan!) för mer detaljer.

<sup>1</sup>Förvånansvärt användbar, men föga nyttjad under kandidatstudierna i fysik.