

FTF131 Övning V: Patologiska funktioner

by Daniel Erkensten

November, 2022

1 Cauchys patologiska funktion

Här betraktar vi Cauchys *patologiska* funktion:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Vad innebär det att en funktion är patologisk? Det innebär att funktionen beter sig underligt, det vill säga att den har kontraintuitiva egenskaper, som särskiljer den från funktioner som beter sig normalt. Normalt sett förväntar vi oss att en funktion är exempelvis *kontinuerlig* och *deriverbar*, men från den inledande matematiska analysen har vi exempelvis lärt oss att kontinuitet inte behöver medföra deriverbarhet, men att omvändningen gäller. Det kanoniska exemplet som brukar tas upp i sammanhanget är Weierstrass' funktion som är kontinuerlig överallt, men inte deriverbar någonstans.¹ Vad är det då som är patologiskt med (1)? Vi kommer nämligen att visa att Cauchys funktion är både kontinuerlig och oändligt deriverbar. Vi kommer emellertid finna något konstigt när vi betraktar dess Maclaurin-serie². Denna konstighet kommer vi att förstå med hjälp av komplexanalys.

1.1 Kontinuitet

Back to the basics! En funktion $g(x)$ sägs vara kontinuerlig i punkten $x = a$ om gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = g(a), \quad (2)$$

existerar. I fallet ovan gäller det att $f(x)$ är en sammansättning av kontinuerliga funktioner för alla $x \neq 0$. Det räcker alltså att visa att funktionen är kontinuerlig för $x = 0$. Vi startar med vänstergränsvärdet. På grund av att $f(x)$ är kontinuerlig på $(0, \infty)$ kan vi byta plats på gränsvärdet och sammansättningen, det vill säga

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-1/x^2} = \exp\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} -1/x^2\right) \quad (3)$$

För varje $B > 0$ sådant att $1/x^2 > B$ kan vi välja $\delta = 1/\sqrt{B}$ så att $|x - 0| < \delta$. Således gäller det att

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-1/x^2} = e^{-\infty} = 0. \quad (4)$$

Då $f(x)$ är en jämn funktion, följer det direkt att högergränsvärdet beräknas på samma vis:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 0. \quad (5)$$

Det följer alltså att $f(x)$ är kontinuerlig för alla $x \in \mathbb{R}$.

¹Fler kul exempel går att finna på Wikipedia (Sök på "Pathological (mathematics)").

²Den skotske matematikern Colin Maclaurin (1698-1746) blev en av matematikhistoriens yngsta professorer vid den ringa åldern av 27 år, men det är kanske inte så konstigt då han påbörjade sina universitetsstudier redan vid 11 års ålder. Mest känd är han för sin oerhört användbara Maclaurin-serie, som är ett specialfall av Taylor-serien i $x = 0$.

1.2 Deriverbarhet

En funktion $g(x)$ är enligt derivatans definition deriverbar i punkten $x = a$ om följande gränsvärde existerar:

$$\lim_{h \rightarrow a} \frac{g(a+h) - g(a-h)}{2h} = g'(a) . \quad (6)$$

Notera att vi här vi använt en central differenskvot för derivatan. Precis som tidigare kan vi notera att $f(x)$ är sammansatt av elementära deriverbara funktioner för $x \neq 0$ och behöver bara kolla derivatan i $x = 0$:³

$$f^{(1)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{2h} = 0 , \quad (7)$$

eftersom $f(x)$ är en jämn funktion. Cauchys patologiska funktion är alltså oändligt deriverbar för alla $x \neq 0$ samt minst en gång deriverbar i punkten $x = 0$ och $f'(0) = 0$. Vi fortsätter att beräkna högre ordningens derivator i $x = 0$:

$$\begin{aligned} f^{(2)}(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(1)}(h) - f^{(1)}(-h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - 2f(0) + f(-2h)}{4h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-1/(4h^2)}}{2h^2} = 0 \\ f^{(3)}(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3h) - 3f(h) + 3f(-h) - f(-3h)}{8h^3} = 0 \\ f^{(4)}(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4h) - 4f(2h) + 6f(0) - 4f(-2h) + f(-4h)}{(2h)^4} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f(4h) - 8f(2h)}{(2h)^4} = 0 \end{aligned}$$

där det första gränsvärdet lätt visas genom substitutionen $t = 1/(4h)$, $h^2 = 1/(4t^2)$, där $t \rightarrow \infty$. I allmänhet finner man att den n :te derivatan hos en funktion $g(x)$ ges av

$$g^{(n)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(2h)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k g((2k-n)h) , \quad (8)$$

vilket kan visas med hjälp av induktion⁴. Från uttrycket ovan (och beräkningar baserade på symmetrin hos f enligt ovan) finner man att $f^{(n)}(0) = 0$, det vill säga $f(x)$ är oändligt deriverbar för alla $x \in \mathbb{R}$ (inklusive nollan!). Givet att $f^{(n)}(0) = 0$ finner vi direkt att funktionens Maclaurin-utveckling ges av

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 . \quad (9)$$

Notera dock att $f(x) > 0$ för alla $x \neq 0$, så Maclaurin-utvecklingen stämmer alltså enbart i en enda punkt, nämligen $x = 0$. Här ser vi det patologiska i Cauchys funktion: f är kontinuerlig och oändligt deriverbar, som ju är typiskt för de flesta funktioner vi känner till, ändå konvergerar Maclaurin-serien bara i en enda punkt. Hur förstår vi detta? Genom att betrakta funktionen f i det komplexa talplanet.

³Vi inför här en annan notation för derivatan: $f^{(n)}(x)$ betecknar den n :te derivatan av $f(x)$. Vi hade kunnat fortsätta med "prim-notationen", men den är opraktisk när man vill beräkna högre ordningens derivator.

⁴Detta lämnar vi som övning till läsaren. :)

1.3 Komplex tolkning

Vi betraktar en komplex version av Cauchys patologiska funktion:

$$f(z) = e^{-1/z^2}, z \in \mathbb{C}, \quad (10)$$

där $f(z)$ är analytisk på $|z| \in (0, \infty)$ och vi har god anledning att tro (enligt analysen ovan) att singulariteten i $z = 0$ är hävbar. Vi kollar detta genom att betrakta *Laurentserien* för $f(z)$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\zeta \frac{e^{-1/\zeta^2}}{\zeta^{n+1}}, \quad (11)$$

där C är en positivt orienterad kurva som omsluter singulariteten ($z = 0$) en gång. För att förenkla integralen ovan genomför vi variabelbytet

$$u = \frac{1}{\zeta}, du = -u^2 d\zeta. \quad (12)$$

Speciellt innebär variabelbytet att kurvan C byter orientering (ty vi byter plats på 0 och ∞ genom variabelbytet). För att slippa komma ihåg den negativa orienteringen på C inför vi ett extra minustecken som kancellerar minustecknet från differentialelementet så vi finner

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C du e^{-u^2} u^{n-1}, \quad (13)$$

där vi direkt ser att $c_n = 0$ för alla $n > 0$ eftersom integranden är analytisk överallt. Om vi istället betraktar fallet $n \leq 0$ har integranden en pol av ordning $|n - 1|$ och c_n kan beräknas som residyn så att:

$$c_n = \text{Res}(e^{-u^2} u^{n-1})|_{u=0}, n \leq 0 \quad (14)$$

I allmänhet beräknas residyn till en funktion $g(z)$ med pol av ordning m i $z = 0$ enligt

$$\text{Res}(g(z))|_{z=0} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [z^m g(z)], m \geq 1 \quad (15)$$

Med hjälp av detta uttryck finner vi att

$$c_0 = \lim_{u \rightarrow 0} e^{-u^2} = 1, c_{-1} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{d}{du} (e^{-u^2}) = 0. \quad (16)$$

På samma sätt kan man inse att residyn c_n för alla *udda* negativa heltal n kommer att vara proportionell mot en udda ordningens derivata av e^{-u^2} . Dessa kommer att vara proportionella mot u , och residyn blir alltså lika med noll. För *jämna* negativa n finner vi med hjälp av (15)

$$c_{-2} = -1, c_{-4} = \frac{1}{2}, c_{-6} = -\frac{1}{6}, c_{-8} = \frac{1}{24}, \quad (17)$$

och i allmänhet kan vi gissa oss till att⁵

$$c_{-2k} = (-1)^k \frac{1}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

⁵Kan visas med hjälp av ett induktionsbevis, men vi nöjer oss med en ganska välgrundad gissning här.

Givet (18) kan vi nu skriva ner en sluten form för Laurentserien till $f(z)$:

$$e^{-1/z^2} = 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z^4} - \frac{1}{6z^6} + \frac{1}{24z^8} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{1}{z^2}\right)^k. \quad (19)$$

Vad kan vi dra för slutsatser av detta resultat? Först och främst kan vi notera att vi har oändligt många negativa exponenter, så att singulariteten i $z = 0$ är *essentiell* och ej hävbar och detta förklarar varför Cauchys funktion är patologisk. För det andra noterar vi att serien ovan är precis Maclaurinutvecklingen av e^x med $x = -\frac{1}{z^2}$ (vilket vi kanske kunde gissat på förhand).