

FTF131 Övning VI: Grupp teori

by Daniel Erkensten

December, 2022

1 Gruppaxiomen

Vi inleder här genom att repetera gruppaxiomen som definierar en grupp:

Definition 1.1. En grupp definieras som en mängd unika element ($\mathbf{G}$) som tillsammans med en operation ($*$) uppfyller följande egenskaper:

Sluten (closure): om a och $b \in \mathbf{G}$, gäller det att $a * b \in \mathbf{G}$

Associativitet (associativity): $\forall a, b, c \in \mathbf{G}$ gäller det att $(a * b) * c = a * (b * c)$

Enhetselement (unit element): $\exists e : e \in \mathbf{G} : a * e = e * a = a$

Inverselement (inverse element): för varje $a \in \mathbf{G} \exists b \in \mathbf{G} : a * b = b * a = e$.

Det enklaste exemplet på en grupp utgörs av alla heltal $\mathbf{Z}$ med operationen addition (+). Speciellt gäller det att summan av två heltal är ett heltal, addition är trivialt associativ och enhetselementet utgörs av talet 0 (addera 0 till vilket tal som helst och du får tillbaka talet du startade med). Inverselementet utgörs av samma tal som du startade med fast med motsatt tecken. För kommande övningar behöver vi också definiera följande egenskaper: *abelsk* (abelian) grupp (och icke-abelsk grupp) samt *delgrupper* (subgroups). Abelska grupper är sådana att gruppelmenten kommuterar under dess gruppoperation, så att $a * b = b * a$. Speciellt utgör $n \times n$ matriser tillsammans med matrismultiplikation ett motexempel till detta, det vill säga dessa utgör en icke-abelsk grupp. Subgrupper (eller även undergrupper) av en grupp definieras enligt: om $\mathbf{G}$ och $\mathbf{H}$ delar samma gruppoperation gäller det att $\mathbf{H}$ är en subgrupp av $\mathbf{G}$ om $a \in \mathbf{H} \Rightarrow a \in \mathbf{G}$. Två triviala subgrupper utgörs av nollelementet (0) och gruppen själv ($\mathbf{G}$).

2 Diskreta (ändliga) grupper

Vi ska börja vår diskussion av gruppteori med hjälp av ett par exempel på ändliga grupper, och sedan gå över till de (mer fysikaliskt intressanta!) kontinuerliga grupperna.

2.1 Delgrupper till Z_6

Mängden $Z_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ och operatoren (+) mod 6 (addition modulo¹ 6) har delgrupperna:

$$\begin{aligned}\{0\} &: (0 + 0) \bmod 6 = 0 \\ \{0, 2, 4\} &: (2 + 2) \bmod 6 = 4, (2 + 4) \bmod 6 = 0, (4 + 4) \bmod 6 = 2 \\ \{0, 3\} &: (3 + 3) \bmod 6 = 0.\end{aligned}$$

2.2 Symmetriska gruppen S_n

Den symmetriska gruppen till en mängd M kan betecknas som $\text{Sym}(M)$ och består av alla *permutationer* av M . Gruppen betecknas även S_n om mängden M 's *kardinalitet* (antal

¹Modulo ges av resten av en division.

element) är lika med n . Speciellt finner vi att

$$S_1 = \{1\} \text{ (1 permutation, identitet)} \quad (1)$$

$$S_2 = \{1, 2\} \text{ (2 permutationer)} \quad (2)$$

De symmetriska grupperna av samma kardinalitet är *isomorfa*. Två typer av notation förekommer i litteraturen för att beskriva element i den symmetriska gruppen ($s(x)$ betecknar permutationen av $x \in M$):

$$1) : \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ s(x_1) & \dots & s(x_n) \end{bmatrix}, S_2 : \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ (tabellnotation)} \quad (3)$$

$$2) : (x \ s(x) \ s^2(x) \ \dots \ s^{m-1}(x)), S_2 : (1)(2), (1, 2) \text{ (cyklisk notation)} \quad (4)$$

Exempel: S_5 på cyklisk form:

Betrakta följande element i S_5 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Denna grupp kan uttryckas på cyklisk form enligt $(1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 4 \rightarrow 2)$

$$(1 \ 3 \ 5)(2 \ 4), \quad (6)$$

eller

$$(1 \ 5)(2 \ 4)(1 \ 3). \quad (7)$$

Exempel: S_6 på cyklisk form Betrakta följande element i S_6 ($1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 6 \rightarrow 4$):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} = (1)(2 \ 3 \ 5)(4 \ 6) = (2 \ 3 \ 5)(4 \ 6). \quad (8)$$

Notera att cykler av längd 1 inte brukar skrivas ut.

Exempel: a) Teckna alla element i S_3

Notera att S_3 betecknar den symmetriska gruppen för $\{1, 2, 3\}$. Elementen i S_3 kan explicit skrivas ut enligt

$$\Pi_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = (1)(2)(3) \quad (9)$$

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = (1)(2 \ 3) \quad (10)$$

$$\Pi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = (2)(1 \ 3) \quad (11)$$

$$\Pi_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = (2 \ 1)(3) \quad (12)$$

$$\Pi_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = (1 \ 3 \ 2) \quad (13)$$

$$\Pi_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = (1 \ 2 \ 3) \quad (14)$$

$$(15)$$

Exempel: b) Delgrupper av S_3

Vi noterar att gruppen själv (S_3) samt Π_0 (identiteten) utgör triviala delgrupper av S_3 . Vidare finner vi att

$$\Pi_1^2 = \Pi_0, \Pi_2^2 = \Pi_0, \Pi_3^2 = \Pi_0, \quad (16)$$

så att

$$\{\Pi_0, \Pi_1\}, \{\Pi_0, \Pi_2\}, \{\Pi_0, \Pi_3\} \quad (17)$$

är delgrupper till S_3 . Slutligen har vi att

$$\Pi_4^2 = \Pi_5, \Pi_5^2 = \Pi_4, \Pi_4\Pi_5 = \Pi_5\Pi_4 = \Pi_0 \quad (18)$$

så att

$$\{\Pi_0, \Pi_4, \Pi_5\}, \quad (19)$$

utgör också delgrupper till S_3 .

Exempel: c) Hur många element har S_n ?

Antalet element i den symmetriska gruppen S_n är lika många som antalet permutationer av n element, det vill säga $n!$. Speciellt fann vi i exempel a) att S_3 har $3! = 6$ element.

Exempel: d) S_n abelsk eller icke-abelsk?

Börja med att betrakta $n = 1$. Eftersom S_1 bara innehåller ett enda element är gruppen trivialt abelsk. Analogt finner vi att S_2 är abelsk. S_3 och S_n för $n \geq 3$ är icke-abelska. Detta inser vi från exempel a) och genom att notera att

$$\Pi_1\Pi_2 = (2\ 3)(1\ 3) = \{\text{byt 2 och 3 i } \Pi_2\} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \Pi_5, \quad (20)$$

samt

$$\Pi_2\Pi_1 = (1\ 3)(2\ 3) = \{\text{byt 1 och 3 i } \Pi_1\} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \Pi_4, \quad (21)$$

men $\Pi_4 \neq \Pi_5$ så att $\Pi_1\Pi_2 \neq \Pi_2\Pi_1$, det vill säga S_3 är icke-abelsk. Samma argument följer för $n \geq 3$.

2.3 Diedergruppen D_3

Diedergruppen² D_n beskriver symmetrigruppen för en regelbunden n -hörning och inkluderar rotationer och reflektioner. Här ska vi undersöka fallet D_3 applicerat på en liksidig triangel.

a) Hur många element har D_3 ?

Vi betecknar varje hörn av vår tre-hörning (triangel) med A , B och C , enligt Figur 1 och undersöker hur dessa hörn transformerar under rotationer och speglingar. Vi har två typer av rotationer, r_1 och r_2 samt tre typer av speglingar, s_1 , s_2 och s_3 . Tillsammans med identiteten erhåller vi sex element i D_3 .

b) Ordningen av elementen i D_3 ?

Ordningen av ett element g i en grupp ges av det minsta heltalet n sådant att $g^n = e$, där e är identiteten. Från figur 1 finner vi direkt att (inför beteckningen $\sigma(g)$ för ordningen av elementet g)

$$\sigma(e) = 1, \sigma(r_1) = \sigma(r_2) = 3, \sigma(s_1) = \sigma(s_2) = \sigma(s_3) = 2, \quad (22)$$

där vi noterar att $r_1^3 = r_2^3 = e$ (rotation av triangeln ett helt varv gör att vi återfår ursprungsconfigurationen) samt $s_1^2 = s_2^2 = e$.

c) Bekräfta att Cayles teorem gäller för D_3

Cayles teorem lyder: "Varje ändlig grupp av ordning n är isomorf med en delgrupp till

²På engelska kallat "Dihedral group".

permutationsgruppen S_n ". Inför vi beteckningarna $A \leftrightarrow 1$, $B \leftrightarrow 2$, $C \leftrightarrow 3$ kan vi direkt inse isomorfin mellan D_3 och S_3 så att:

$$\begin{aligned} e &\leftrightarrow (1)(2)(3) , \\ r_1 &\leftrightarrow (1\ 2\ 3) , \\ r_3 &\leftrightarrow (1\ 3\ 2) , \\ s_1 &\leftrightarrow (1)(2\ 3) , \\ s_2 &\leftrightarrow (2)(1\ 3) , \\ s_3 &\leftrightarrow (3)(1\ 2) . \end{aligned}$$

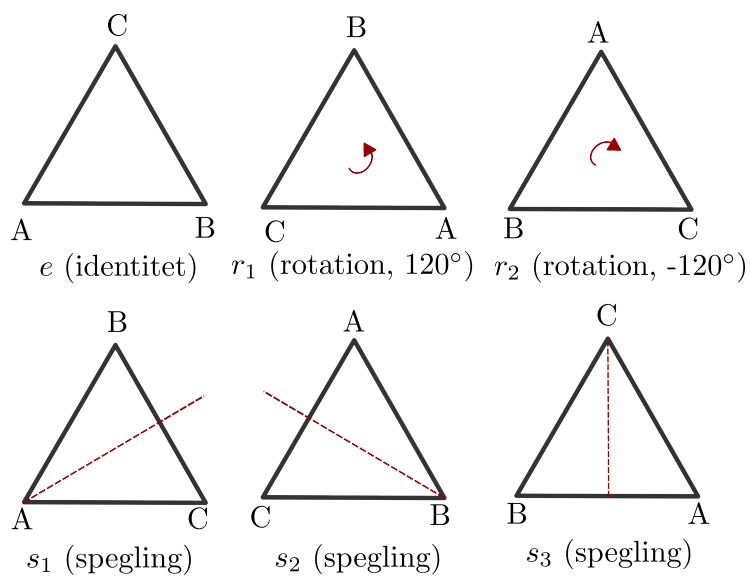


Figure 1: Element i Diedergruppen D_3 som inkluderar identitet, rotationer samt speglingar.