

Kontinuerliga grupper

Liealgebror, generatorer, Paulimatriser och allt det där

Daniel Erkensten, December 2022

Kontinuerlige grupper (i fysik)

- Trivialt eksempel: de reelle talen



Sophus Lie (1842-1899)

Kontinuerliga grupper (i fysik)

- Trivialt exempel: de reella talen
- I fysik: grupp teori verktyg för att beskriva symmetrier hos system (rotationsinvarians/Lorentzinvarians...)



Sophus Lie (1842-1899)

Kontinuerliga grupper (i fysik)

- Trivialt exempel: de reella talen
- I fysik: grupp teori verktyg för att beskriva symmetrier hos system (rotationsinvarians/Lorentzinvarians...)
- Uttrycker symmetrier med *icke-kommuterande* matriser



Sophus Lie (1842-1899)

Kontinuerliga grupper (i fysik)

- Trivialt exempel: de reella talen
- I fysik: grupp teori verktyg för att beskriva symmetrier hos system (rotationsinvarians/Lorentzinvarians...)
- Uttrycker symmetrier med *icke-kommuterande* matriser*
- Kontinuerliga grupper omnämns ofta som *Liegrupper*

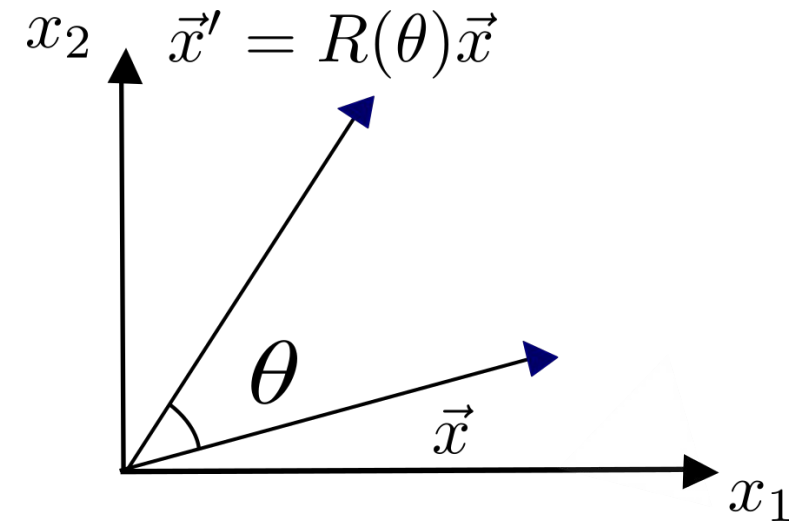


Sophus Lie (1842-1899)

* I fysik skiljer vi ofta inte på grupp teori och representationsteori

Ett första exempel (rotationsgruppen)

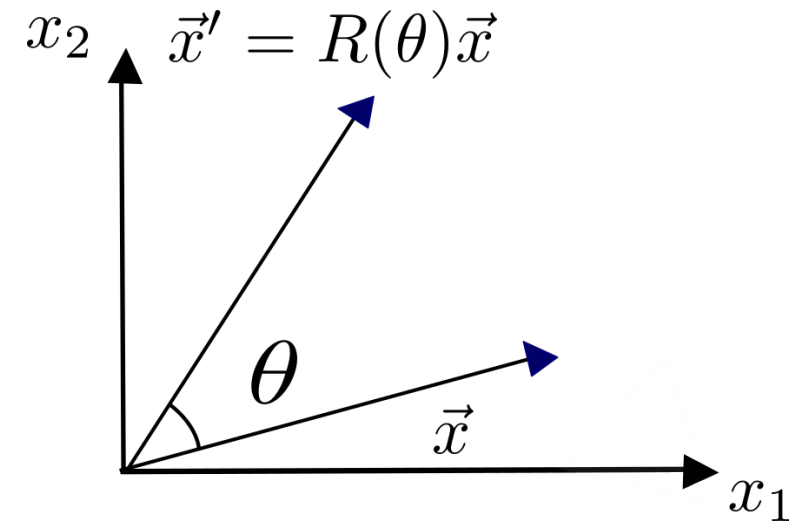
- Vi vill rotera objekt i **två** dimensioner? Hur?



Ett första exempel (rotationsgruppen)

- Vi vill rotera objekt i **två** dimensioner? Hur?
- Rotationsmatris!

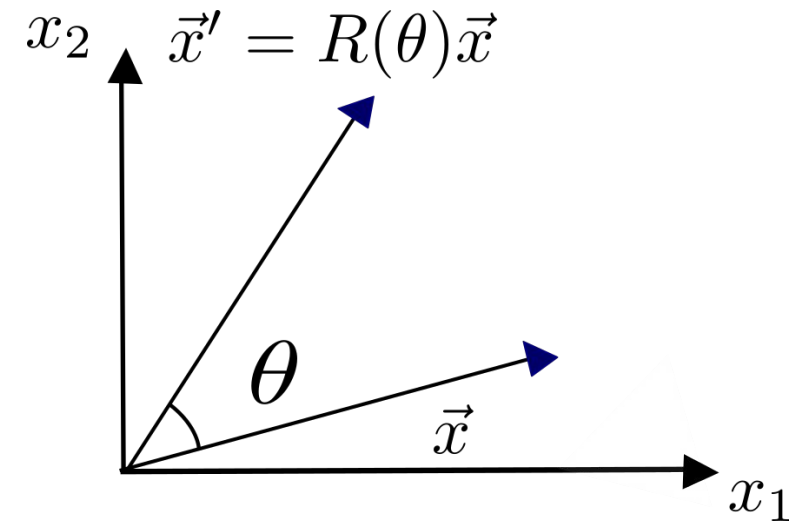
$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



Ett första exempel (rotationsgruppen)

- Vi vill rotera objekt i **två** dimensioner? Hur?
- Rotationsmatris!

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



- Hur roterar vi i **högre dimensioner** då?
Använd att längden av en vektor är *invariant* under rotationer!

Ett första exempel (rotationsgruppen)

- Transformera normen av en vektor med godtycklig matris M !

$$x^T x \rightarrow (Mx)^T (Mx) = x^T M^T M x$$

Ett första exempel (rotationsgruppen)

- Transformera normen av en vektor med godtycklig matris M !

$$x^T x \rightarrow (Mx)^T (Mx) = x^T M^T M x$$

- Resultat: vi kräver att matrisen M ska vara *ortogonal*:

$$M^T M = I$$

Ett första exempel (rotationsgruppen)

- Transformera normen av en vektor med godtycklig matris M !

$$x^T x \rightarrow (Mx)^T (Mx) = x^T M^T M x$$

- Resultat: vi kräver att matrisen M ska vara *ortogonal*:

$$M^T M = I$$

- Ger också krav på determinanten!

$$\det(M) = \pm 1$$

Ett första exempel (rotationsgruppen)

- Exkludera matriser med negativ determinant (dessa kan inte bilda en enskild grupp ty innehåller ej identiteten)
- Sammanfattningsvis: determinant 1 och ortogonal

$$SO(n)$$

Ett första exempel (rotationsgruppen)

- Exkludera matriser med negativ determinant (dessa kan inte bilda en enskild grupp ty innehåller ej identiteten)
- Sammanfattningsvis: determinant 1 och ortogonal

$$SO(n)$$

- *S*: *special* (determinant 1), *O*: *orthogonal* (ortogonal),
- *n*: dimension på matriserna/rummet

Tillbaka till Lie

- Varje Liegrupp associeras till en *Liealgebra*, g , som består av element som uppfyller *Jacobiidentiteten*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad X, Y, Z \in g$$

Tillbaka till Lie

- Varje Liegrupp associeras till en *Liealgebra*, g , som består av element som uppfyller *Jacobiidentiteten*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad X, Y, Z \in g$$

- X, Y, Z betecknas ofta $T_i, i = 1, 2 \dots$ där T_i är *generatorer*

Tillbaka till Lie

- Varje Liegrupp associeras till en *Liealgebra, g* , som består av element som uppfyller *Jacobiidentiteten**

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad X, Y, Z \in g$$

- X, Y, Z betecknas ofta $T_i, i = 1, 2 \dots$ där T_i är *generatorer*
- Hur är dessa relaterade till vår rotationsmatris i exemplet?

* $[,]$ betecknar en så kallad Lie bracket (mer generell än en kommutator, ty Liealgebran är ett vektorrum)

Tillbaka till Lie

- Lies idé: dela upp (rotations)transformationen i *infinitesimala* bidrag:

$$R(\delta\theta) = I + \delta\theta T \leftarrow T, \text{ generator}$$

Tillbaka till Lie

- Lies idé: dela upp (rotations)transformationen i *infinitesimala* bidrag:

$$R(\delta\theta) = I + \delta\theta T \leftarrow T, \text{ generator}$$

- Den totala transformationen fås genom att dela upp den totala vinkeln i N delar:

$$\theta = N\delta\theta$$

Tillbaka till Lie

- Lies idé: dela upp (rotations)transformationen i *infinitesimala* bidrag:

$$R(\delta\theta) = I + \delta\theta T \leftarrow T, \text{ generator}$$

- Den totala transformationen fås genom att dela upp den totala vinkel i N delar:

$$\theta = N\delta\theta$$

- Utför transformationen ovan N gånger och tag $N \rightarrow \infty$

$$R(\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(I + \frac{\theta T}{N} \right)^N = e^{T\theta}$$

Tillbaka till Lie

- Den fulla transformationen erhålls genom exponentiering av generatorn!

$$R(\theta) = e^{\theta T}$$

Tillbaka till Lie

- Den fulla transformationen erhålls genom exponentiering av generatorn!

$$R(\theta) = e^{\theta T}$$

- OBS: viktigt att tolka (matrisvärda!) exponentialen som dess Taylorutveckling:

$$e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} = I + X + \frac{1}{2!}X^2 + \dots$$

Åter till $SO(2)$

- Vill finna generatoren T till $SO(2)$
- Återgå till den definierande ekvationen för rotationsmatrisen och expandera den infinitesimalt!

$$R^T R = I \Rightarrow (I + \delta\theta T)^T (I + \delta\theta T) = I$$

$$T^T + T = 0$$

Åter till $SO(2)$

- Vill finna generatoren T till $SO(2)$
- Återgå till den definierande ekvationen för rotationsmatrisen och expandera den infinitesimalt!

$$R^T R = I \Rightarrow (I + \delta\theta T)^T (I + \delta\theta T) = I$$

$$T^T + T = 0$$

- Lösning:

$$T = c \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, c \in \mathbf{C}$$

- Övning: visa att T med $c = 1$ ger

$$e^{\theta T} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Åter till $SO(2)$

- Hitta generatorn snabbt (allmänt!) genom att notera att

$$\frac{d}{d\theta}R(\theta) = TR(\theta) , \frac{d}{d\theta}R(\theta)|_{\theta=0} = TR(0)$$

$$R(\theta) = e^{\theta T}$$

- OBS: $SO(2)$ har endast **en** generator! I allmänhet har vi grupper med *flera* generatorer

Grupper med flera generatorer

- Inför index a på transformationen (numrerar generatorn!) och expandera!

$$U_a(\delta\theta_a) = e^{T_a\delta\theta_a} = I + T_a\delta\theta_a + \frac{1}{2!}(T_a\delta\theta_a)^2$$

Grupper med flera generatorer

- Inför index a på transformationen (numrerar generatorn!) och expandera!

$$U_a(\delta\theta_a) = e^{T_a\delta\theta_a} = I + T_a\delta\theta_a + \frac{1}{2!}(T_a\delta\theta_a)^2$$

- Gör dubbla transformationer!

$$U_b^{-1}U_a^{-1}U_bU_a = I + \delta\theta_a\delta\theta_b[T_a, T_b] + \dots$$

Grupper med flera generatorer

- Inför index a på transformationen och expandera!

$$U_a(\delta\theta_a) = e^{T_a\delta\theta_a} = I + T_a\delta\theta_a + \frac{1}{2!}(T_a\delta\theta_a)^2$$

- Gör dubbla transformationer!

$$U_b^{-1}U_a^{-1}U_bU_a = I + \delta\theta_a\delta\theta_b[T_a, T_b] + \dots$$

- Högerledet måste ligga i gruppen så att

$$[T_a, T_b] = f^{abc}T_c$$



Strukturkoefficienter!

Grupper med flera generatorer

- Inför index a på transformationen och expandera!

$$U_a(\delta\theta_a) = e^{T_a\delta\theta_a} = I + T_a\delta\theta_a + \frac{1}{2!}(T_a\delta\theta_a)^2$$

- Gör dubbla transformationer!

$$U_b^{-1}U_a^{-1}U_bU_a = I + \delta\theta_a\delta\theta_b[T_a, T_b] + \dots$$

- Högerledet måste ligga i gruppen så att

$$[T_a, T_b] = f^{abc}T_c$$

Strukturkoefficienter!

Exempel 2: SU(2) [Paulimatiserna]

- Paulimatiserna är centrala inom teoretisk fysik och används för att beskriva egenskaper hos spin $\frac{1}{2}$ partiklar (fermioner)



Exempel 2: SU(2) [Paulimatiserna]

- Paulimatiserna är centrala inom teoretisk fysik och används för att beskriva egenskaper hos spin $\frac{1}{2}$ partiklar (fermioner)
- SU(n) – gruppen av alla *unitära* (U) matriser av dimension n med determinant 1



Exempel 2: SU(2) [Paulimatrisona]

- Paulimatrisona är centrala inom teoretisk fysik och används för att beskriva egenskaper hos spin $\frac{1}{2}$ partiklar (fermioner)
- SU(n) – gruppen av alla *unitära* (U) matriser av dimension n med determinant 1
- Paulimatrisona är generatorer till SU(2):

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



Exempel 2: SU(2) [Paulimatiserna]

- Paulimatiserna är centrala inom teoretisk fysik och används för att beskriva egenskaper hos spin $\frac{1}{2}$ partiklar (fermioner)
- SU(n) – gruppen av alla *unitära* (U) matriser av dimension n med determinant 1
- Paulimatiserna är generatorer till SU(2):

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Liealgebra: $[\sigma_a, \sigma_b] = 2i\epsilon_{abc}\sigma_c$



Universalt exempel: Standardmodellen

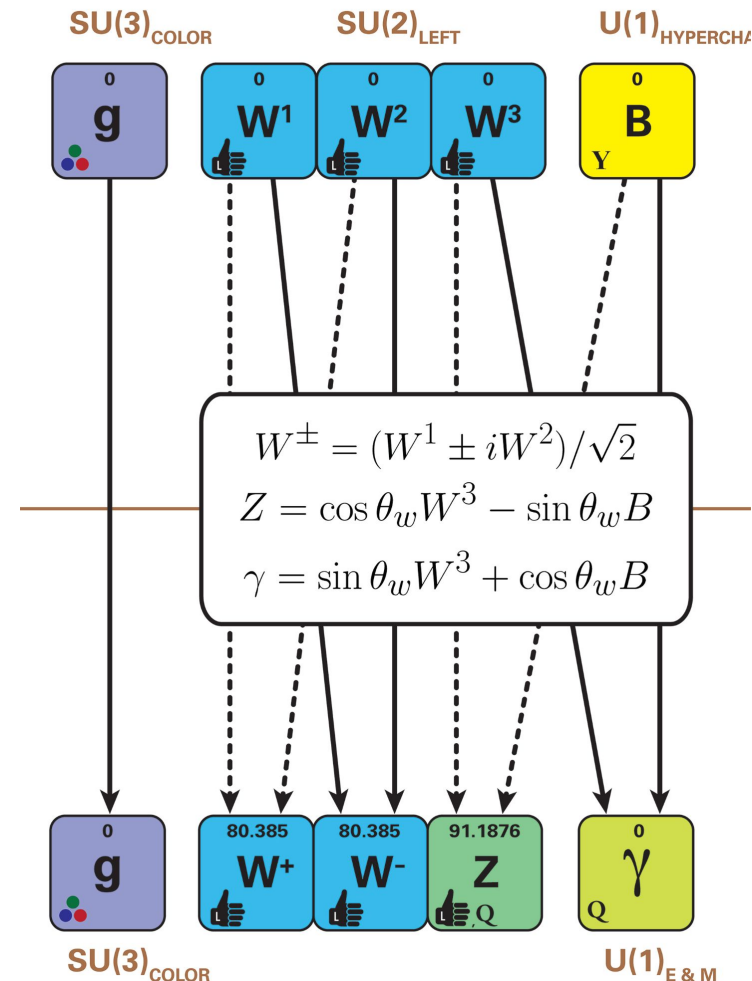
- Standardmodellen beskrivs av en kvantfältsteori med symmetrigrupp

$$U(1) \times SU(2) \times SU(3)$$

$U(1)$: Elektromagnetism (Maxwell!)

$SU(2)$: Svag växelverkan (QED)

$SU(3)$: Stark växelverkan (QCD, kvarkar!)



Universalt exempel: Standardmodellen

- Standardmodellen beskrivs av en kvantfältsteori med symmetrigrupp

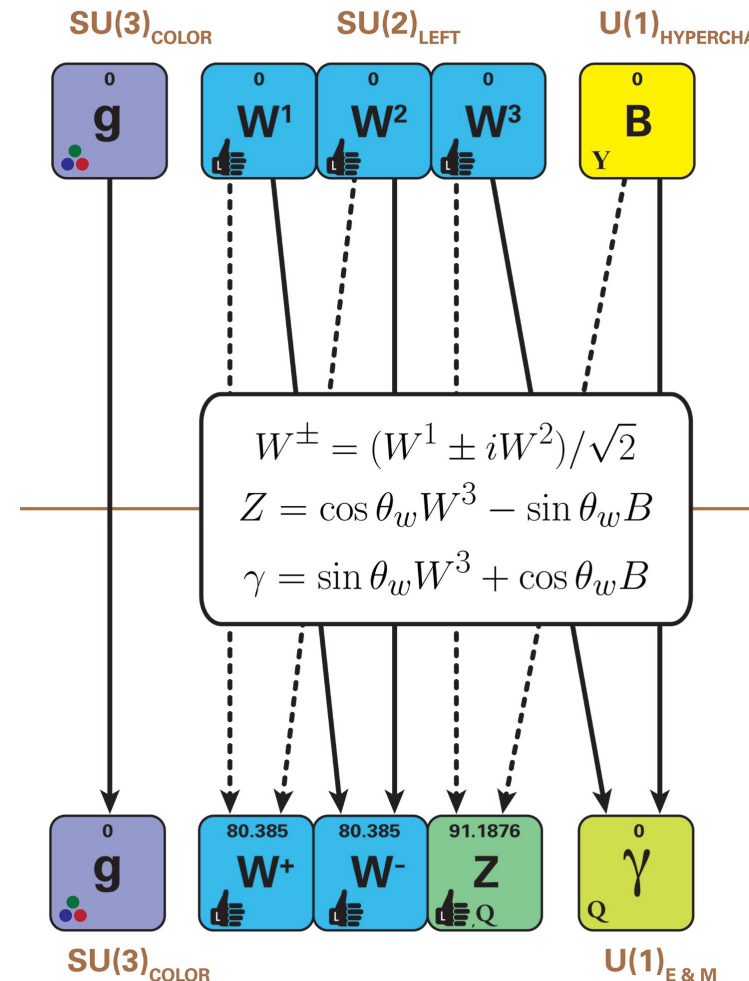
$$U(1) \times SU(2) \times SU(3)$$

U(1): Elektromagnetism (Maxwell!)

SU(2): Svag växelverkan (QED)

SU(3): Stark växelverkan (QCD, kvarkar!)

Saknas en kraft: **gravitation**! Hypoteser: Chern-Simons gauge-teorier, och allt det där...



Sammanfattning

- Kontinuerliga grupper benämns ofta Liegrupper
- Liegrupper associeras med en Liealgebra (kommutatorrelation mellan generatorer)
- Viktiga exempel utgörs av:
 - 1) $SO(N)$ – Special Orthogonal Group (rotationsgruppen)
 - 2) $SU(N)$ – Special Unitary Group
 - 2a) $SU(2)$ – Paulimatiserna (elektrosvag växelverkan, QED)
 - 2b) $SU(3)$ – Gellmannmatiserna (QCD->kvarkar!)

Sammanfattning

- Kontinuerliga grupper benämns ofta Liegrupper
- Liegrupper associeras med en Liealgebra (kommutatorrelation mellan generatorer)
- Viktiga exempel utgörs av:
 - 1) $SO(N)$ – Special Orthogonal Group (rotationsgruppen)
 - 2) $SU(N)$ – Special Unitary Group
 - 2a) $SU(2)$ – Paulimatiserna (elektrosvag växelverkan, QED)
 - 2b) $SU(3)$ – Gellmannmatiserna (QCD->kvarkar!)

och det finns så mycket mer att lära om gruppteori... Se Wikipedia!