

Sammanfattning FTF131 2022

- Gruppdiskussion kring kursens idéer, begrepp och olika Lösingsstrategier (inga fullständiga lösningar!)
- Redovisa er lösning av något inlämningsproblem
- För betyg 5: individuell problemuppgift efter muntan

Därför är det viktigt att

- Repetera era lösningar på inlämningarna! Se till att ni förstår alla steg och argument.
- Gå igenom kursinnehållet och se till att ni förstår alla begrepp. (Försök förklara nyckelbegreppen för er själva)

Det kan kännas läskigt med munta men. . .

- Testar begreppsförståelse snarare än problemlösning
- Helt okej att få lite hjärnsläpp: examinatorn hjälper till genom att ställa ledande frågor

Det kan kännas läskigt med munta men. . .

- Testar begreppsförståelse snarare än problemlösning
- Helt okej att få lite hjärnsläpp: examinatorn hjälper till genom att ställa ledande frågor

Idag: överblick över kursinnehållet och quiz på det ni (förhoppningsvis) lärt er under kursens gång!

Komplexa kurvintegraler

■ Repetition av residykalkyl

- ▶ Jordans lemma
- ▶ Cauchys sats
- ▶ Residysatsen

■ Komplexifiering av integraler / smarta integrationskurvor

- ▶ Cauchy-principalvärde
- ▶ Grenpunkter och grensnitt
- ▶ Kramers-Kronig-relationerna
- ▶ Sadelpunktsmetoden

- 1) Vad är anledningen till att vi ibland behöver införa ett **grensnitt** när vi vill använda residysatsen på vissa integraler?

2) Vilka av dessa funktioner är **flervärda**?

a) $f_1(z) = z^3$

b) $f_2(z) = \sqrt{z}$

c) $f_3(z) = \frac{1}{1+z^{1/3}}$

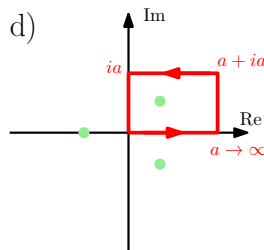
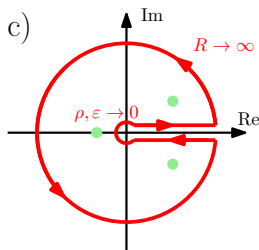
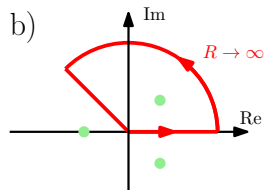
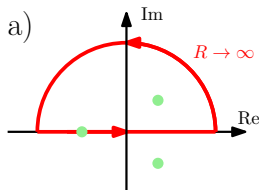
d) $f_4(z) = \log_{10} z$

e) $f_5(z) = \sqrt[3]{e^z}$

f) $f_6(z) = \frac{1}{\sqrt{(z+1)(z-1)}}$

3) Vilken av följande integrationskurvor måste användas för att utvärdera integralen

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}?$$



- 1) Vad är anledningen till att vi ibland behöver införa ett **grensnitt** när vi vill använda residysatsen på vissa integraler?

- 1) Vad är anledningen till att vi ibland behöver införa ett **grensnitt** när vi vill använda residysatsen på vissa integraler?

Svar ► Flervärda funktioner är inte analytiska när man går ett varv kring funktionens *grenpunkt*

- ⇒ går inte att tillämpa residysatsen i hela komplexa planet
- ⇒ inför grensnitt som inte får korsas och som gör att funktionen är kontinuerlig i alla punkter (utom punkter på båda sidor om grensnittet)

2) Vilka av dessa funktioner är **flervärda**?

a) $f_1(z) = z^3$

b) $f_2(z) = \sqrt{z}$

c) $f_3(z) = \frac{1}{1+z^{1/3}}$

d) $f_4(z) = \log_{10} z$

e) $f_5(z) = \sqrt[3]{e^z}$

f) $f_6(z) = \frac{1}{\sqrt{(z+1)(z-1)}}$

2) Vilka av dessa funktioner är **flervärda**?

a) $f_1(z) = z^3$

b) $f_2(z) = \sqrt{z}$

c) $f_3(z) = \frac{1}{1+z^{1/3}}$

d) $f_4(z) = \log_{10} z$

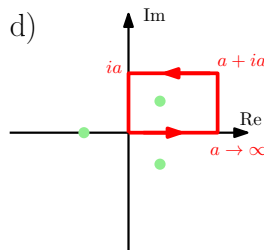
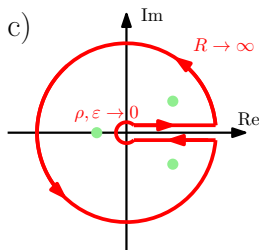
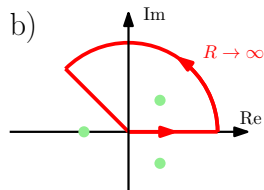
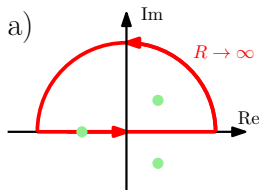
e) $f_5(z) = \sqrt[3]{e^z}$

f) $f_6(z) = \frac{1}{\sqrt{(z+1)(z-1)}}$

Svar f_2 , f_3 , f_4 och f_6 är flervärda

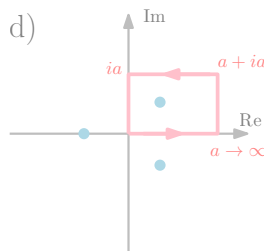
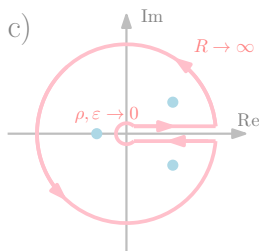
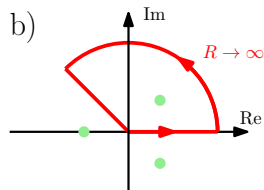
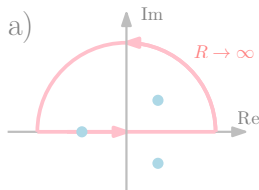
3) Vilken av följande integrationskurvor måste användas för att utvärdera integralen

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}?$$



3) Vilken av följande integrationskurvor måste användas för att utvärdera integralen

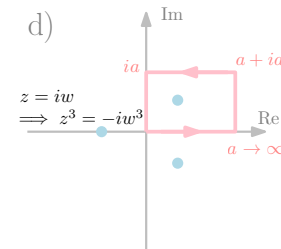
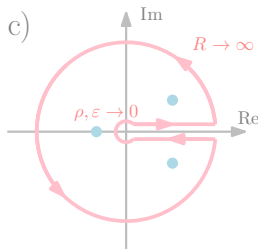
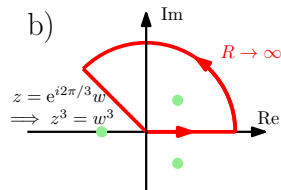
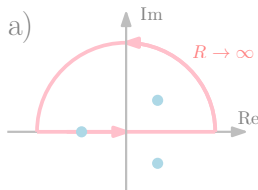
$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}?$$



3) Vilken av följande integrationskurvor måste användas för att utvärdera integralen

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}?$$

- a) Pol på integrationskurvan (residysatsen gäller ej)
- b) Funkar!
- c) Integranden ej flervärd och kancellerar (funkar bättre med en hjälpfunktion $\ln z$)
- d) Går ej att återföra integralen längs imaginär-axeln till integralen längs real-axeln ($w^3 \neq z^3$)



Greenfunktioner

■ Greenfunktioner

- ▶ Vad är en Greenfunktion?
 - ▶ (responsten till en störning hos en linjär differential-operator)
 - ▶ (kombination av "alla" lösningar)

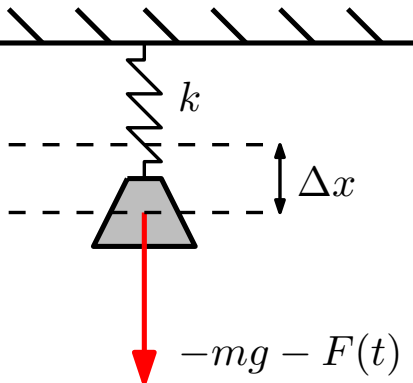
■ Beräkning av Greenfunktioner

- ▶ Fourier-transform
- ▶ Inverstransform m.h.a. residykalkyl
 - ▶ Integrera runt polerna för att tillämpa residysatsen
 - ▶ ... eller använd Feynmans trick (och förskjut polerna)
- ▶ Kausalitet

- 1) Betrakta rörelseekvationen för en massa som hänger vertikalt i en fjäder och påverkas av en (än så länge) ospecificerad, tidsberoende kraft $F(t)$:

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= k(x_0 - x) - mg - F(t), \\ \ddot{x} &\equiv \frac{d^2x}{dt^2}, \end{cases}$$

Vilka substitutioner skulle du göra i ekvationen ovan för att få ekvationen för systemets Greenfunktion?



2) Du vill tillämpa Jordans lemma på integralen

$$G(t, t') = \oint_C \frac{e^{i\omega(t-t')}}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} d\omega.$$

Vilket halvplan (övre eller undre) måste halvcirkel-kurvan läggas i för att integralen ska konvergera för $t > t'$?

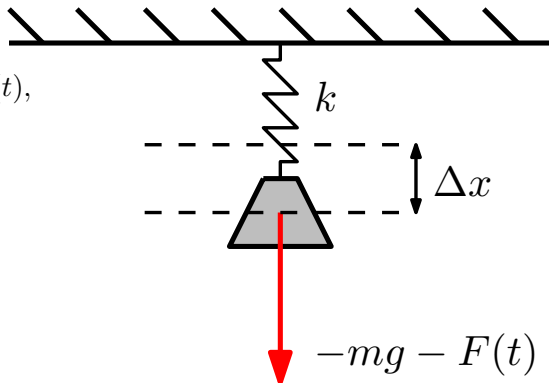
$$G(t, t') = \oint_C \frac{e^{i\omega(t-t')}}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} d\omega.$$

3) Vad krävs för att Greenfunktionen $G(t, t')$ ska vara kausal?

- 1) Betrakta rörelseekvationen för en massa som hänger vertikalt i en fjäder och påverkas av en (än så länge) ospecificerad, tidsberoende kraft $F(t)$:

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= k(x_0 - x) - mg - F(t), \\ \ddot{x} &\equiv \frac{d^2x}{dt^2}, \end{cases}$$

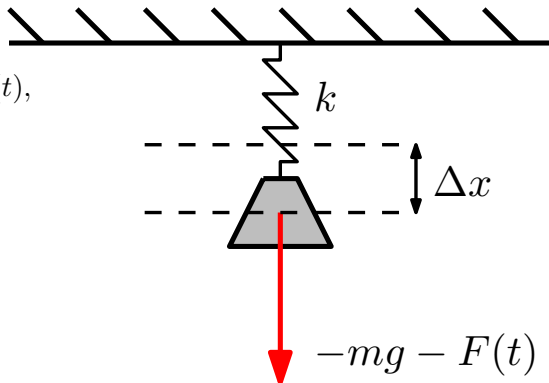
Vilka substitutioner skulle du göra i ekvationen ovan för att få ekvationen för systemets Greenfunktion?



- 1) Betrakta rörelseekvationen för en massa som hänger vertikalt i en fjäder och påverkas av en (än så länge) ospecificerad, tidsberoende kraft $F(t)$:

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= k(x_0 - x) - mg - F(t), \\ \ddot{x} &\equiv \frac{d^2x}{dt^2}, \end{cases}$$

Vilka substitutioner skulle du göra i ekvationen ovan för att få ekvationen för systemets Greenfunktion?



Svar Låt $x \rightarrow G(t, t')$ och $kx_0 - mg - F(t) \rightarrow \delta(t - t')$:

$$\left(m \frac{d^2}{dt^2} + k \right) G(t, t') = \delta(t - t')$$

2) Du vill tillämpa Jordans lemma på integralen

$$G(t, t') = \oint_C \frac{e^{i\omega(t-t')}}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} d\omega.$$

Vilket halvplan (övre eller undre) måste halvcirkel-kurvan läggas i för att integralen ska konvergera för $t > t'$?

2) Du vill tillämpa Jordans lemma på integralen

$$G(t, t') = \oint_C \frac{e^{i\omega(t-t')}}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} d\omega.$$

Vilket halvplan (övre eller undre) måste halvcirkel-kurvan läggas i för att integralen ska konvergera för $t > t'$?

Svar Övre halvplanet, s.a. $\text{Im}(\omega) = \omega_i > 0$ och $\text{Re}(i\omega t) = \text{Re}(-\omega_i t) = -\omega_i t < 0$ (så att exponential-funktionen avtar då $\omega_i \rightarrow \infty$)

$$G(t, t') = \oint_C \frac{e^{i\omega(t-t')}}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} d\omega.$$

3) Vad krävs för att Greenfunktionen $G(t, t')$ ska vara kausal?

$$G(t, t') = \oint_C \frac{e^{i\omega(t-t')}}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} d\omega.$$

3) Vad krävs för att Greenfunktionen $G(t, t')$ ska vara kausal?

Svar (De förskjutna) polerna ω_1 och ω_2 måste båda ligga i övre halvplanet.

Variationskalkyl och integralekvationer

- Variationsprincip
- Eulers ekvation och Euler-Lagranges ekvationer

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

- Beltrami-identiteten ($F = F(y, y') \neq F(x, y, y')$)
- Totalderivata

$$\frac{d}{dx} \equiv \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + y'' \frac{\partial}{\partial y'}.$$

- Brachistochron-problemet
- Variationskalkyl med tvång (Lagranges multiplikator-metod)

- 1) Minsta-verkansprincipen, där verkan $J = \int L(t; q, p, \dot{q}, \dot{p}) dt$ minimeras genom att sätta $\delta J = 0$, med $L =$ kinetisk – potentiell energi, kan användas för att härleda rörelseekvationer för en mängd system inom mekanik.

Vad är det som gör att vi inte bara kan derivera och optimera J på samma sätt som vi vanligtvis gjort i analyskurserna?

■ Fyra klasser av linjära integralekvationer

► Fredholm (1:a och 2:a typen)

$$f(x) = \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt, \quad \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt$$

► Volterra (1:a och 2:a typen)

$$f(x) = \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt, \quad \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt$$

■ Omskrivning av differentialekvation till integralekvation

■ Lösning av integralekvationer

Betrakta följande Fredholm-ekvation av 2:a typen:

$$y(x) = x + \lambda \int_0^1 xzy(z) \, dz$$

Ange *två* sätt som denna ekvation kan eller eventuellt kan lösas på! Vad ställs för krav på λ för att vi ska kunna lösa ekvationen med hjälp av en Neumannserie?

- 1) Minsta-verkansprincipen, där verkan $J = \int L(t; q, p, \dot{q}, \dot{p}) dt$ minimeras genom att sätta $\delta J = 0$, med $L =$ kinetisk – potentiell energi, kan användas för att härleda rörelseekvationer för en mängd system inom mekanik.

Vad är det som gör att vi inte bara kan derivera och optimera J på samma sätt som vi vanligtvis gjort i analyskurserna?

- 1) Minsta-verkansprincipen, där verkan $J = \int L(t; q, p, \dot{q}, \dot{p}) dt$ minimeras genom att sätta $\delta J = 0$, med $L =$ kinetisk – potentiell energi, kan användas för att härleda rörelseekvationer för en mängd system inom mekanik.

Vad är det som gör att vi inte bara kan derivera och optimera J på samma sätt som vi vanligtvis gjort i analyskurserna?

Svar I fallet med minsta-verkansprincipen (och variationskalkyl i allmänhet) är vi intresserade av en optimal kurva/funktion $q(t)$ snarare än det optimala värdet på en variabel.

Betrakta följande Fredholm-ekvation av 2:a typen:

$$y(x) = x + \lambda \int_0^1 xzy(z) \, dz$$

Ange *två* sätt som denna ekvation kan eller eventuellt kan lösas på! Vad ställs för krav på λ för att vi ska kunna lösa ekvationen med hjälp av en Neumannserie?

Betrakta följande Fredholm-ekvation av 2:a typen:

$$y(x) = x + \lambda \int_0^1 xzy(z) \, dz$$

Ange *två* sätt som denna ekvation kan eller eventuellt kan lösas på! Vad ställs för krav på λ för att vi ska kunna lösa ekvationen med hjälp av en Neumannserie?

Svar 1) **Separabel kärna**, 2) **Neumannserie** (givet $|\lambda| < 9$, kom ihåg konvergens endast om $|\lambda| \int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt < 1$)

Grupp- och representationsteori

Gruppteori

- Gruppaxiomen
- Begrepp
 - ▶ Isomorfi
 - ▶ Abelsk/kommutativ grupp
 - ▶ Delgrupper
 - ▶ (Överkurs):Liealgebra, Jacobiidentitet
- Symmetriska gruppen/permutationsgruppen S_n
 - ▶ Tabell- och cykelnotation
 - ▶ Cayleys sats
- Diedergruppen D_3

Representationsteori

- Representation av grupper som matriser
- Reducerbar/irreducibel representation

- 1) Vilka av följande kombinationer av mängder och operationer bildar grupper?
- a) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ och $+$
 - b) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ och $a + b \pmod{7}$
 - c) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ och $a + b \pmod{7}$
 - d) $\{-1, 1\}$ och $\times$ (vanlig multiplikation)
 - e) $\{-1, 0, 1\}$ och $\times$ (vanlig multiplikation)
 - f) $\mathbb{Z}$ och $+$

2) Följande element (på tabellnotation) ingår i symmetriska gruppen S_5 :

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Skriv elementet på cyklisk form.

- 3) Följande matriser utgör en representation för D_3 , symmetrigruppen för en liksidig triangel (se räkneövning 6):

$$U(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U(r_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U(r_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U(s_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U(s_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U(s_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

- 3) Vi kan tillämpa en unitär transform VUV^{-1} på dessa matriser som tar dem till formen

$$U(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U(r_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix},$$

$$U(r_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad U(s_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$U(s_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad U(s_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

Är denna representation av D_3 irreducibel?

- 1) Vilka av följande kombinationer av mängder och operationer bildar grupper?
- a) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ och $+$
 - b) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ och $a + b \pmod{7}$
 - c) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ och $a + b \pmod{7}$
 - d) $\{-1, 1\}$ och $\times$ (vanlig multiplikation)
 - e) $\{-1, 0, 1\}$ och $\times$ (vanlig multiplikation)
 - f) $\mathbb{Z}$ och $+$

- 1) Vilka av följande kombinationer av mängder och operationer bildar grupper?
- a) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ och $+$
 - b) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ och $a + b \pmod{7}$
 - c) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ och $a + b \pmod{7}$
 - d) $\{-1, 1\}$ och $\times$ (vanlig multiplikation)
 - e) $\{-1, 0, 1\}$ och $\times$ (vanlig multiplikation)
 - f) $\mathbb{Z}$ och $+$

Svar

- a) Nej (gruppen är ej sluten, $1 + 6 \notin \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)
- b) Nej (mängden innehåller ingen identitet)
- c) Ja
- d) Ja
- e) Nej (0 har ingen invers)
- f) Ja

2) Följande element (på tabellnotation) ingår i symmetriska gruppen S_5 :

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Skriv elementet på cyklisk form.

2) Följande element (på tabellnotation) ingår i symmetriska gruppen S_5 :

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Skriv elementet på cyklisk form.

Svar $(1\ 3\ 5\ 4)(2) = (1\ 3\ 5\ 4)$.

- 3) Följande matriser utgör en representation för D_3 , symmetrigruppen för en liksidig triangel (se räkneövning 6):

$$U(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U(r_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U(r_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U(s_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U(s_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U(s_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

- 3) Vi kan tillämpa en unitär transform VUV^{-1} på dessa matriser som tar dem till formen

$$U(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U(r_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix},$$

$$U(r_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad U(s_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$U(s_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad U(s_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

Är denna representation av D_3 irreducibel?

3) Vi kan tillämpa en unitär transform VUV^{-1} på dessa matriser som tar dem till formen

$$\begin{aligned}U(e) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & U(r_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \\U(r_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}, & U(s_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\U(s_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}, & U(s_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

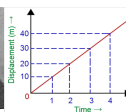
Är denna representation av D_3 irreducibel?

Svar Nej! Representationen är **reducerbar** om matriserna kan skrivas som en direkt-summa av mindre representationer (dvs om matriserna är block-diagonala)

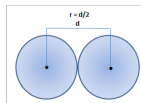
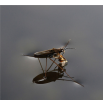
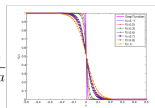
...och sen har ni ju gått igenom en hel del annat med Henrik. Så missa inte att repetera innehållet i Henriks föreläsningar!



$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi = mc\psi$$



$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a}$$



$$E? = EP?_{40320} = 8()$$

Hint: Gubbe 2 bjuder på motstånd. Gamla slides ger resten av personerna.