

- Första delen av kursen baseras på senaste upplagan av "Matematisk statistik - med övningar" av Ulla Blomqvist
- Matematisk statistik handlar om statistisk metodkonstruktion - metoder för att inhämta data på ett tillförlitligt sätt säga något om de underliggande mekanismer som har genererat det insamlade datamaterialet
- Kurser i matematisk statistik fokuserar på att förstå konstruktionen av olika metoder snarare än deras praktiska tillämpning
- Sannolikhets teori vs statistik:
 - inom sannolikhets teorin studerar man slumpmässiga, s.k. "stokastiska", modeller som ger upphov till olika datastrukturer, med olika egenskaper
 - inom statistiken hanterar man, grovt uttryckt, det omvända scenariot: finn egenskaper hos den "underliggande" modell som har genererat data

Utgångspunkten är ett slumpmässigt försök av ngt slag:

Slumpen (vad det nu är) ger upphov till ett utfall ("svart löda" som genererar utfall)

Det

- Ett resultat av ett slumpmässigt försök kallas utfall.
- Samlingen Ω av alla möjliga utfall för ett försök kallas utfallsrum och en delmängd $A \subseteq \Omega$, dvs en viss samling utfall, kallas för en händelse.
- Ω kallas diskret om det innehåller ett ändligt eller uppräkneligt ändligt antal utfall; i det försträmda fallet kallas Ω även ändligt.
Om Ω inte är diskret kallas det kontinuerligt.

Ex: Tärningstest med symmetrisk färdig
Utfall: $1, 2, \dots, 6$

Utfallsrum: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Exempel på händelser: $A = \{1\}$, dvs händelsen att få en 1:a, $B = \{2, 4, 6\}$, dvs händelsen att slå jämnt, $C = \{1, 2, 5, 6\}$, dvs händelsen att nej får en 3:a eller en 4:a.

Diskret eller kontinuerligt?

Ex: Tiden från nu till nästa jätaljarmning (3)

$\Omega = (0, \infty)$ (skala: sekunder)

$A = (0, 60]$, dvs som mest en minut

$B = [120, \infty)$, dvs åtminstone två minuter

Diskret eller kontinuerlig?

Det

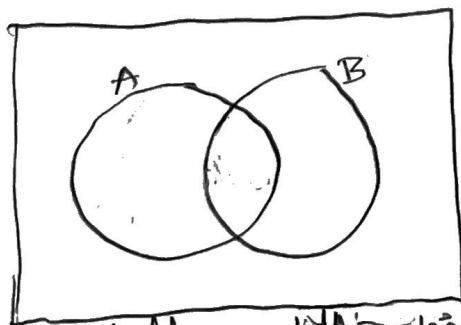
• Sannolikheten för en händelse $A \subseteq \Omega$ betecknas med $P(A)$ och uppfyller

- $0 \leq P(A) \leq 1$, med $P(\Omega) = 1$ och $P(\emptyset) = 0$ där tomma mängden, $\emptyset$, betecknar händelsen som inte innehåller något utfall.

Det är faktiskt så att P är en funktion som man kan stoppa in händelser $A \subseteq \Omega$ i och ut kommer

- ett tal mellan 0 och 1; ju högre talet, dvs sannolikheten för A är, desto troligare är det att A inträffar.

• Man använder ofta Venn-diagram för att illustrera händelser.



$A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ och } \omega \in B\}$ "A och B" (with an arrow pointing to the intersection area in the diagram)

$A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ eller } \omega \in B\}$ "A eller B"

$A^c = \Omega \setminus A = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ tillhör inte } A\}$
"Komplementet till A", A inträffar inte

Öv: Rita formerna/markera $A \cap B$, $A \cup B$ och A^c (5 min)

$A \cap B$: utfall som tillhör både A och B
 $A \cup B$: ——— || ——— A eller B (inkl. de som tillh. båda)

För ändliga utfallsrum, när alla utfall är lika sannolika kan $P(A)$ beräknas med

$$P(A) = \frac{\text{antal händelser i } A}{\text{antal händelser i } \Omega} =$$
$$= \frac{\text{antal gynnsamma fall}}{\text{antal möjliga fall}} = \frac{G}{M}$$

Ex (tärningstest igen)

$$P(A) = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, P(\Omega) = 1$$

$$A \cup B = \{1\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 4, 6\}, P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$A \cap B = \{1\} \cap \{2, 4, 6\} = \emptyset, P(A \cap B) = 0$$

$$B \cap C = \{2, 4, 6\} \cap \{1, 2, 5, 6\} = \{2, 6\}, P(B \cap C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Ex (slingling av två rättvisa kronor)

H: krona, T: klave

Vad är utfallsrummet?

Hur ser händelsen att få minst en krona ut?

Vad är sannolikheten för denna händelse?

Lösning:

$$\Omega = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$$

$$A = \{(H, H), (H, T), (T, H)\}, P(A) = \frac{3}{4}$$

Vi säger att A och B är disjunkta (eller uteslutande uteslutande) om $A \cap B = \emptyset$, dvs om A och B inte har några gemensamma utfall.



I ett Venn-diagram kan vi tänka på $P(A)$ som den storlek som P tilldelar området A.

Om A och B är disjunkta gäller

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

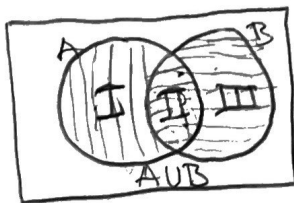
och mer allmänt gäller

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$

för parvis disjunkta $A_1, A_2, A_3, \dots$



Men vad händer med $P(A \cup B)$ i det allmänna fallet, dvs om A och B inte nödvändigtvis är disjunkta?



$P(A)$ utgörs av storl. I och II

$P(B)$ utgörs av storl. II och III

$P(A \cup B)$ utgörs av storl. I, II och III

Eftersom II är storl. $P(A \cap B)$ så får vi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

"Additionssatsen"

eftersom $P(A) + P(B)$ tar med $P(A \cap B)$ 2 ggr.

Notera att I är storl. på $A \cap B^c$ och III är storl. på $B \cap A^c$. Alltså gäller även $P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) + P(A \cap B)$

Ex Antag utfallsrummet

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 10\}$$

Antag att det är lika sannolikt att dra vilket som helst av dessa heltal.

Låt $A = \{\text{dra ett jämnt tal}\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
och $B = \{\text{dra ett tal som är jämnt delbart med 3}\} = \{3, 6, 9\}$.

$$\Rightarrow A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}, A \cap B = \{6\}$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{5}{10} + \frac{3}{10} - \frac{1}{10} = \frac{7}{10} \end{aligned}$$

Uppg. 2.5

Händelserna C och D har givna $P(C) = \frac{7}{12}$ och $P(D) = \frac{9}{16}$. Kan C och D vara disjunkta?

Lösning

Antag $C \cap D = \emptyset$ vilket ger att $P(C \cap D) = 0$.

$$\Rightarrow P(C \cup D) = P(C) + P(D) = \frac{7}{12} + \frac{9}{12} = \frac{16}{12} > 1$$

vilket inte kan gälla eftersom sannolikheter inte kan vara större än $1 = P(\Omega)$ och $C \cup D \subseteq \Omega$.

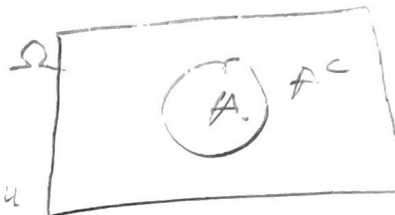
$\Rightarrow C$ och D kan ej vara disjunkta

Notera att $A \cap A^c = \emptyset$ och $A \cup A^c = \Omega$

$$\Rightarrow 1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) + \underbrace{P(A \cap A^c)}_{=0}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{P(A) = 1 - P(A^c)}$$

"Komplementsatsen"



Notera även att $(A^c)^c = A$

Ex

- Av 100 produkter i ett lager är 35 av en ny modell. 40 produkter i lagret är blå och de övriga är svarta. Man finner att det finns 27 blå produkter av den nya modellen.

- Finn sannolikheten att en slumpmässigt vald produkt är svart och av den gamla modellen.

Lösning:

$A = \{\text{ny modell vald}\}$, $B = \{\text{blå produkt vald}\}$

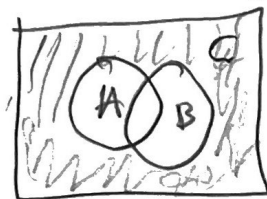
$$P(A) = 0.35, P(B) = 0.4, P(A \cap B) = 0.27$$

$C = \{\text{svart produkt av gamla modellen vald}\}$

$$\text{Vi ser att } C = (A \cup B)^c$$

$$\Rightarrow P(C) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) =$$

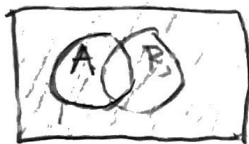
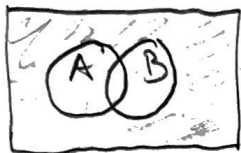
$$= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - 0.35 - 0.4 + 0.27 = 0.52$$



De Morgans lagar säger att

$$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c \Rightarrow P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B)$$

$$A^c \cup B^c = (A \cap B)^c \Rightarrow P(A^c \cup B^c) = P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cap B)$$



Uppg. 2.1

Händelserna A och B med $P(A) = \frac{1}{2} = P(B)$,

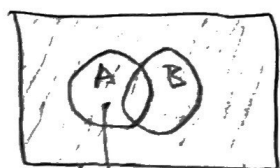
$$P(A \cup B) = \frac{2}{3}$$

a) $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

b) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

c) $P(A^c \cup B) = 1 - (P(A) - P(A \cap B)) = 1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{3})$



$$= 1 - \frac{3-2}{6} = \frac{5}{6}$$

Den del som hör till endast A

d) $P(A \cap B^c) = P((A^c)^c \cap B^c) \underset{\text{De Morgan}}{=} 1 - P(A^c \cup B) \underset{\text{Uppg. c)}}{=} 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$



"Vad har allt utanför B gemensamt med A?" Detta är komplementet till händelsen i c)

e) $P(A^c \cup B^c) \underset{\text{De Morgan}}{=} 1 - P(A \cap B) \underset{\text{b)}}{=} 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

f) $P(A^c \cap B^c) \underset{\text{De Morgan}}{=} 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

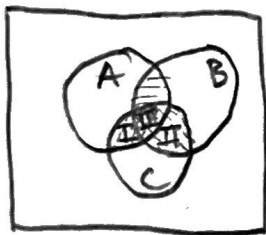
Vi har sett att sannolikheten för en union av parvis disjunkta händelser ges av summan av händelsernas individuella sannolikheter.

Men vad händer om händelserna inte nödvändigtvis är disjunta?

För tre händelser A, B, C :

● Additionssatsen:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$



- Börja med A och B: $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B)$
- Lägger vi till $P(C)$ så måste vi dra bort I, II, III vilka ges av
 $III = P(A \cap B \cap C)$, $II = P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$
 $I = P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)$

$$\Rightarrow P(A \cup B \cup C) = (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) + P(C) - (P(A \cap B \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C))$$

- Fundering: Om de är disjunkte? $\Rightarrow P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$
- Sats 2.2" i boken ger uttrycket för $n \geq 2$
- godtyckliga händelser.

Ex Vid textiltillverkning har man observerat tre sorters fel i väven, fel i mönstret, fel i sömmaden. Förkortat:

Fel

$A = \{\text{fel i väven}\}$
 $B = \{\text{fel i mönstret}\}$
 $C = \{\text{fel i sömmaden}\}$
 $A \cap B$
 $A \cap C$
 $B \cap C$
 $A \cap B \cap C$

Relativ frekvens

0.11
 0.08
 0.08
 0.04
 0.05
 0.03
 0.01

Vad är s.k. ett en slumpmässigt vald vara innehåller något av de tre felen?
 $P(A \cup B \cup C) = 0.11 + 0.08 + 0.08 - 0.04 - 0.05 - 0.03 + 0.01 = 0.16$

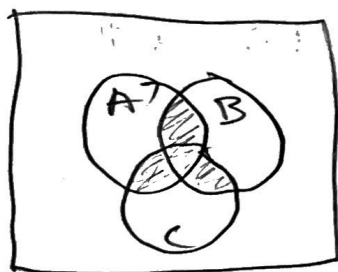
Uppg. 2.22

Visa att $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = 1/2$

$$\Rightarrow P(A \cap B \cap C) \geq \frac{1}{4}$$

Lösning.

Vi behöver ett uttryck som involverar $P(A \cap B \cap C)$. Additionssatsen kräver dock kunskap om $P(A)$, $P(B)$ och $P(C)$.



Låt $D = \{\text{Även om två av } A, B, C\} = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$$P(D) = P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - 2P(A \cap B \cap C)$$

(kan även erhållas genom additionssatsen)

Eftersom $P(D) \leq 1$ så får vi

$$1 \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2P(A \cap B \cap C) \Leftrightarrow -2P(A \cap B \cap C) \leq -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B \cap C) \geq \frac{1}{4}$$

I många fall påverkar inträffandet av en viss händelse inträffandet av en annan händelse.

Ex

En burk med 4 blåa och 3 röda bollar.

$A = \{\text{Plocka upp en blå boll}\}$ utförs utan återgång.

Vi ser att om A har inträffat så påverkar det sannolikheten för $B = \{\text{Plocka upp en röd boll}\}$

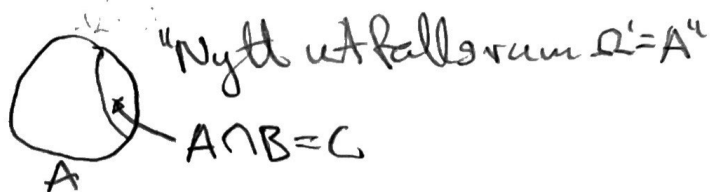
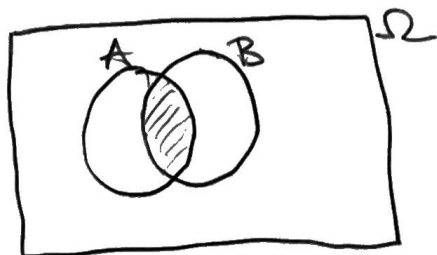
Beroenden mellan händelser bestäms ofta via betingade sannolikheter

Def

Den betingade sannolikheten för en händelse B givet händelsen A definieras

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \left(\Leftrightarrow \begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B|A)P(A) \\ P(A \cap B) &= P(A|B)P(B) \end{aligned} \right)$$

för A sådana att $P(A) > 0$.



Slk för B : $\frac{P(B)}{P(\Omega)} = \frac{P(B)}{1} = P(B)$
Relativ storlek

slk för $B|A$: $\frac{P(C)}{P(\Omega')} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
Relativ storlek

Vi befinner oss i utfallsrummet där A alltid inträffar. Vad är slk för B i detta "nya" utfallsrum? Svar: $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B|A)$

Hur tänker vi kring att två händelser inte påverkar varandra, dvs de är oberoende?

Då borde betingningen på ("tillståndet av informationen") A inte ha någon inverkan på slk för att B skall inträffa.

Dvs, $P(B|A) = P(B) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$

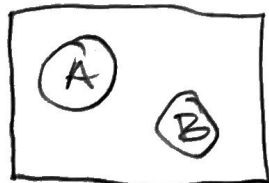
$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Eftersom / fungerar även om $P(A) = 0$ så tar vi detta som vår definition.

Def

Om $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ så säger vi att A och B är oberoende händelser, annars säger vi att A och B är beroende.

För flera händelser: $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \dots P(A_n) \Leftrightarrow$ oberoende



$A \cap B = \emptyset$. Är dessa två oberoende?

Svar: Nej! Om A har inträffat så kan B ej inträffa (och tvärtom)

Ex A och B ober., $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.6$

	A	A ^c	
B	$P(A \cap B)$	$P(A^c \cap B)$	$P(B)$
B ^c	$P(A \cap B^c)$	$P(A^c \cap B^c)$	$P(B^c)$
	$P(A)$	$P(A^c)$	1

→

	0.3 · 0.6	0.42	0.6
	0.12	0.28	0.4
	0.3	0.7	

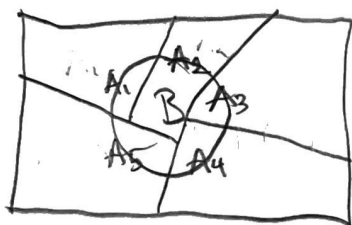
Lagen om total sannolikhet

Om $A_1, \dots, A_n$ är parvis oöfverlappande med positiva sannolikheter och $A_1 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ så gäller

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i \cap B) = P(A_1 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

$$= \sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)$$

for varje handelse B,



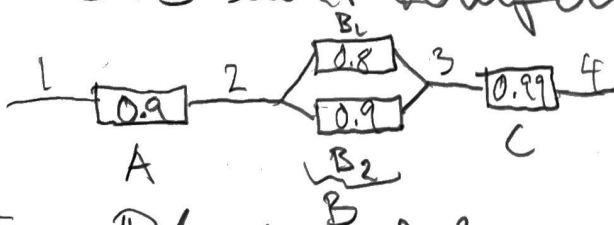
1 det tidigare exemplet
utnyttjade vi att $AUA^c = \emptyset$
och $BUB^c = \emptyset$

Ex

Elektroniskt system med sin för att kompo-
nenterna skall fungera korrekt.

Systemet fungerar korrekt om del A fungerar

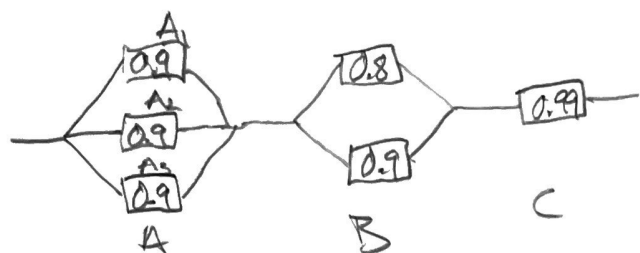
- Samtidig som åtvinstene er av komponentene i del B samt komponent C.



Från P (systemet fungerar) följer att komponenterna fungerar oberoende av varandra.

Lösung: $P(\text{Systeme funktioniert}) = P(\{A \text{ fung.}\} \cap \{B \text{ fung.}\} \cap \{C \text{ fung.}\})$
^{ober.}
 $= P(A \text{ fung.}) P(B \text{ fung.}) P(C \text{ fung.}) = 0,9 \cdot P(\{B_1 \text{ fung.}\} \cup \{B_2 \text{ fung.}\})$
 $= 0,9 (P(\underbrace{B_1 \text{ fung.}}_{=0,8}) + P(\underbrace{B_2 \text{ fung.}}_{=0,9}) - P(\underbrace{B_1 \text{ fung.} \cap B_2 \text{ fung.}}_{\substack{\text{ober.} \\ = P(B_1 \text{ fung.}) P(B_2 \text{ fung.}) = 0,8 \cdot 0,9}})) = 0,873$

Ex Eftersom A är den svaga länken i schemat uppdateras det enl:



Finns $P(\text{systemet funger})$ under antagandet om obero.

Lösning

Vi vet att $P(\text{syst. funger}) = P(A \text{ funger}) \cdot P(B \text{ funger}) \cdot P(C \text{ funger})$

$$P(A \text{ funger}) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P((A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c) = 1 - P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) \\ \stackrel{\text{obero.}}{=} 1 - P(A_1^c)P(A_2^c)P(A_3^c) = 1 - 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.1 = 0.999$$

$$\Rightarrow P(\text{syst. funger}) = 0.999 \cdot 0.98 \cdot 0.99 = 0.9692$$

Om A, B, C är parvis oberoende så innebär det inte nödvändigtvis att de är simultant oberoende, Tex

Ex

Slå två valfria tärningar. Definiera

$A = \{\text{summan är } 7\}$, $B = \{\text{första tärningen visar } 3\}$

$C = \{\text{Andra tärningen visar } 4\}$.

$$P(A) = \frac{\#\{(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)\}}{6 \cdot 6} = \frac{6}{6 \cdot 6} = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{1}{6}, \quad P(C) = \frac{1}{6}$$

$$\left. \begin{aligned} A \cap B &= \{(3,4)\}, P(A \cap B) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(A)P(B) \\ A \cap C &= \{(4,3)\}, P(A \cap C) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(A)P(C) \\ B \cap C &= \{(3,4)\}, P(B \cap C) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(B)P(C) \end{aligned} \right\} \text{Parvis obero.}$$

$$A \cap B \cap C = A \cap \{(3,4)\} = \{(3,4)\}, P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(A)P(B)P(C) \text{ Ej obero.}$$

Bayes sats

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Beweis: $P(A)P(B|A) = P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

- Antag att du får informationen $P(B|A)$ istället för $P(A|B)$ som du vill ha.
- ville ha. Bayes sats löser detta.

Ex

Tre maskiner tillverkar reservdelar.

Maskin A: 40% av produktionen

— 11 — B: 40% — 11 —

— 11 — C: 20% — 11 —

- Av dessa är 1% från A, 2% från B och 3% från C defekta.

- a) $P(\text{slump. vald komponent defekt})$?
- b) Antag att en enhet är defekt. Vad är slk att den kommer från maskin A?

Lösning a) $D = \{\text{en enhet är defekt}\}$

Lagen om total slk: $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D) =$

$$= P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C) = 0.01 \cdot 0.4 + 0.02 \cdot 0.4 + 0.03 \cdot 0.2 = 0.018$$

b) Enl. Bayes sats, $P(A|D) = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \frac{0.01 \cdot 0.4}{0.018} = 0.22$

