Dag 2

Kombinatorik

Kom ihåg $P(A) = \frac{\#\text{händelser i } A}{\#\text{händelser}} = \frac{\#\text{gynnsamma fall}}{\#\text{möjliga fall}}$

om alla utfall är lika sannolika.

När vi räknar här så är det viktigt att förhålla sig till om utfallens ordning spelar roll (permutationer) eller ej (delmängder).

Ex "Välj ut tre personer bland sju"

a) Val till arbetsutskott: ordningen personerna blir utvalda på spelar ingen roll - "vi plockar ut en delmängd"

b) Placering på prispallen i en tävling: Ordningen spelar roll eftersom den först utvalda personen (bland 7 tävlande) får guld, den andra silver och den tredje brons - "vi hanterar permutationer"

Ordningen viktig:

Om vi har en uppsättning objekt $\{a_1, \ldots, a_n\}$ så kallas varje ordnade sekvens av dem för en permutation

T.ex $\{a_1, a_2\}$ ger permutationerna (a_1, a_2), (a_2, a_1), där $(a_1, a_2) \neq (a_2, a_1)$

Ex Antal pojkar i en trebarnsfamilj

$\Omega = \{0,1,2,3\}$, $A = \{$familjen har en pojke$\}$

Följande permutationer ger Ω:

$$\{(PPP),(PPF),(PFP),(FPP),\underbrace{(PFF),(FPF),(FFP)}_{=A},(FFF)\}$$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{3}{8}$ om vi antar att det är lika sannolikt att ett barn är en pojke som en flicka

Vi såg att vi till varje av de tre "barnplatserna" har två valmöjligheter $\Rightarrow 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ olika permutationer

Sats (Multiplikationsprincipen)

Man utför $k \geq 1$ operationer där den första har $n_1 \geq 1$ alternativ, ..., den k:te har $n_k \geq 1$ alternativ.

Det totala antalet sätt som de k operationerna kan utföras på, dvs antalet permutationer, är $n_1 n_2 \cdots n_k$

Ex

När vi går ut kan vi välja på två olika jackor, tve olika mössor och fem olika halsdukar. Hur många outfits kan vi välja? Svar: $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ st

Sats (Dragning utan återläggning)

Givet en mängd med $N \geq 1$ element så skall vi plocka ut $n \leq N$ element (sekvensiellt) utan återläggning.
Om vi i slutändan tar hänsyn till ordningen i vilken elementen plockades ut så kan vi skapa $N(N-1)(N-2)\cdots(N-n+1)$ unika sekvenser av element. Om $n=N$ får vi "N fakultet" stycken, dvs $N! = N(N-1)\cdots 2 \cdot 1$, där $0! = 1$

Ex Tre personer går in i en hiss i ett 7-våningshus. Finn P(ingen går av på samma vån)

Lösn:
Totala antalet permutationer, dvs de möjliga ordningarna för pesonernas avstigande, är

$\underset{\text{pers 1}}{7} \cdot \underset{\text{pers 2}}{7} \cdot \underset{\text{pers 3}}{7} = 7^3 = 343$, dvs Ω har $\underset{343}{7^3}$ element (utfall

$A = \{$ingen går av på samma våning$\}$

$N = 7$ och $n = 3$ för dragning utan återläggning

(pers 1 kan välja 7 vån, pers 2 kan välja 6 vån, pers 3 kan välja 5 vån

$\Rightarrow A$ innehåller $N(N-1)\cdots(N-n+1) = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ av utfallen i $\Omega \Rightarrow P(A) = \frac{210}{343} \approx 0.612$

Ex På hur många sätt kan vi ändra på ordningen i ordet OTTO?

Lösn: Notera att varje bokstav betraktas som unik här, dvs $N=4$. Frågan är alltså hur många permutationer med längd 4 som kan skapas. Svar

$N! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 48$ (Notera $O_1T_1T_2O_2 \neq O_1T_2T_1O_2$)

- Om vi istället är intresserade av antalet unika ord då får vi dela
- med antal gånger varje varje bokstav

kan permuteras: $\frac{N!}{n_T!\,n_O!} = \frac{48}{2!\,2!} = \frac{48}{(2\cdot 1)(2\cdot 1)} = 12$

OTTO, OTOT, TTOO, ...

Sats

Givet $n \geq 1$ element av $k \geq 1$ sorter med

- n_1 element av sort 1, ..., n_k element av sort k (notera: $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$) så kan de n
- elementen sorteras på

$$\frac{n!}{n_1!\cdots n_k!}$$

olika sätt.

Ex Sekvensen $\underbrace{12542245}_{\text{8 siffror, en etta, tre tvåor, två fyror, två fem}}$ kan bilda

$$\frac{8!}{1!\,3!\,2!\,2!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot(3\cdot 2\cdot 1)\cdot(2\cdot 1)\cdot(2\cdot 1)} \approx \frac{40320}{6\cdot 2\cdot 2} = 1680$$

När ordningen inte är viktig

Denna del handlar om på hur många sätt vi kan plocka ut delmängder av en viss storlek ur en mängd.

Notera först att vi inte kan ha dubbletter i mängder $\{a,b,a,c\}=\{a,b,c\}=\{a,c,b\}$ och att ordn. inte spelar roll: $\{a,b,c\}\cup\{a,b\}=\{a,b,c\}$

Givet $\Omega=\{a,b,c,d\}$, hur många delmängder $A\subseteq\Omega$ av storlek 2 kan vi plocka ut?

$\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\}$, dvs 6st.

Vi kan plocka ut $n(n-1)\cdots(n-k+1)=\frac{n(n-1)\cdots 1}{(n-k)\cdots 1}=\frac{n!}{(n-k)!}$ ordnade sekvenser av längd k från de n elementen. I fallet ovan $\frac{4!}{(4-2)!}=\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1}=12$.

Eftersom vi är intresserade av delmängder och inte ordnade sekvenser/permutationer delar vi med antal gånger vi kan permutera de k elementen, dvs $k!$ $\Rightarrow \frac{n!}{k!(n-k)!}$ Ex $\frac{12}{2!}=6$

$\Rightarrow$ Antal sätt att välja ut delmängder av storl. k ur en mängd av storl. n, dvs dragning av k element utan återläggning och utan hänsyn till de k elementens inbördes ordning ges av binomialkoefficienten

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Vad är $\binom{n}{n}$? Eftersom det bara finns en delmängd som har samma ~~storlek~~ som hela den ursprungliga mängden Ω, vilket är Ω själv ($\Omega \subseteq \Omega$), så får vi $\binom{n}{n} = 1$, vilket vi också får såhär: $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1}$

- På samma sätt får vi $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{1}{0!} = 1$ och vi noterar att det endast är tomma mängden, $\emptyset$, som har 0 element i sig samt att $\emptyset \subseteq \Omega$.

- Man kan visa att $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ vilket säger att varje mängd av ~~storlek~~ n totalt har 2^n delmängder.

- <u>Ex</u> Dra slumpmässigt 5 ~~kort~~ från en kortlek. Vad är P(alla är ruter)?

- <u>Lösn</u>

Kortleken har 13 ~~kort~~ av varje färg (~~tot.~~ 52). Vi ska alltså välja 5 ruter, 0 hjärter, 0 klöver, 0 spader: $\binom{13}{5}\binom{13}{0}\binom{13}{0}\binom{13}{0} = \frac{13\cdot12\cdot10\cdot9\cdot\cancel{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}}{(5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1)\cancel{(8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1)}} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1287$

Antal sätt att välja 5 ~~kort~~ från en hel kortlek: $\binom{52}{5}$ 2598960

$\Rightarrow P(\text{fem ruter}) = \frac{G}{M} = \frac{1287}{2598960} = 0.000495$

Multiplikationsprincipen

Ex. Dra slumpmässigt fem kort från en kortlek. Vad är P(få med två par)?

Lösn: exempel: {spader 2, ruter 2, hjärter 8, spader 8, ruter ess}

Börja med ett enklare problem:

B = {två 8:or, 2 ess, en dam}

Det finns 4 st 8:or, 4 st ess och 4 damer i leken

vilket ger $\underset{8:or}{\binom{4}{2}}\underset{ess}{\binom{4}{2}}\underset{dam}{\binom{4}{1}}\underbrace{\left[\binom{4}{0}\cdots\binom{4}{0}\right]}_{\text{de andra färgerna, 10 st}} = \frac{4\cdot3}{2}\frac{4\cdot3}{2}4\cdot1^{10} = 144$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{G}{M} = \frac{144}{\binom{52}{5}} = \frac{144}{2598960} = 0.00006$$

Här fixerade vi valörerna men för P(få med två par) så får valörerna vara godtyckliga. Nu skall vi alltså multiplicera G ovan med antal ggr som vi kan välja olika valörer. Vi väljer 2 valörer av 13 för de specificerade korten och 1 valör av de 11 återstående valörerna till det sista kortet. Detta ger

$$G' = \binom{13}{2}\binom{11}{1}G = \frac{13\cdot12}{2}\cdot11\cdot144 = 858\cdot144$$

$$\Rightarrow P(\text{få med två par}) = \frac{G'}{M} = 858\cdot P(B) = 0.0475$$

Notera att vi lika väl hade kunnat välja valören på det sista kortet först, dvs ordn. spelar ingen roll:

$$\binom{13}{1}\binom{12}{2} = 13\cdot\frac{12\cdot11}{2} = \binom{13}{2}\binom{11}{1}$$

Ex: 24 personer finns för att bemanna en expedition. 6 nya personer av dessa skall sköta bemanningen varje kvartal under ett år. Vid varje kvartalskifte byts alla 6 personer ut mot 6 nya. Hur många bemanningsupplägg kan fås för hela året?

- Lösn:

Kvartal 1: $\binom{24}{6}$ möjliga val

- Kvartal 2: $\binom{18}{6}$ — " —

— " — 3: $\binom{12}{6}$ — " —

— " — 4: $\binom{6}{6}$ — " —

$\Rightarrow \binom{24}{6}\binom{18}{6}\binom{12}{6}\binom{6}{6} = 2{,}308\cdot 10^{12}$ möjliga upplägg

Binomialkoefficienter ger Pascals triangel

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \binom{0}{0} & & \\
 & \binom{0}{1} & & \binom{1}{1} & \\
\binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \\
 & & \vdots & &
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}
$$

$$\binom{n}{0}\binom{n}{1}\cdots\binom{n}{k}\cdots\binom{n}{n}$$

$$\vdots$$

Denna innehåller många samband, t.ex

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ (Summan av två grann-koefficienter på en rad är lika med koefficienten under dem.

Ockupationsproblem

Vi har $n \geq 2$ föremål av $k \geq 2$ olika sorter som vi skall placera i n stycken celler/urnor, t.ex. bollar av olika färger samt kulor och staplar.

Vi får förflytta föremålen mellan cellerna och intresserar oss för hur vi kan skapa olika kombinationer.

$$\mathrm{I}\,|\,\overbrace{\mathrm{O}\,|\,\mathrm{I}\,|\,\mathrm{O}\,|\,\mathrm{I}\,|\,\mathrm{O}\,|\,\mathrm{O}\,|\,\mathrm{I}\,|\,\mathrm{O}\,|\,\mathrm{I}}^{9\,st}\,|\,\mathrm{I}$$

5 kulor, 6 staplar

Om vi kräver att de yttersta cellerna innehåller staplar, hur många kombinationer av "inre" staplar och kulor kan skapas?

Det spelar ingen roll om vi väljer positioner till kulorna eller staplarna:

$$\binom{9}{5} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{5!\,4!} = 126 = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4!\,5!} = \binom{9}{4}$$

Generellt gäller:

$$\binom{n-1+r}{r} = \binom{n-1+r}{n-1}$$

r kulor

$n+1$ staplar där vi förevar en i vardera yttercell

$\Rightarrow$ $n-1$ staplar att flytta runt

$\Rightarrow$ $r+n-1$ "lediga" celler mellan de yttre staplarna

När vi inte fixerar objekt i de yttre cellerna:

r vita schackpjäser
n svarta — || —
placeras på rad

Totalt antal kombinationer:

$$\binom{n+r}{r} = \binom{n+r}{n}$$

- Ex: 4 svarta, 4 vita pjäser placeras slumpmässigt i rad. Vad är slh att alla vita står intill varandra?

Lösn:

A = {Alla vita pjäser står intill varandra}

Möjliga komb.: $\binom{4+4}{4} = 70$

Gynsamma fall:
I och med att alla vita skall stå tillsammans så kan vi betrakta dessa som en gemensam pjäs (notera att
A = {Alla svarta står så att det finns en lucka av längd 5 någonstans})
som vi flyttar runt bland 5 celler

$\Rightarrow$ Antal gynsamma fall: $\binom{5}{1} = 5$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{G}{M} = \frac{5}{70} = \frac{1}{14} = 0.0714$$

Ex Hur många "ord" kan skapas mha ALABAMA?

Lösn

Två grupper: A (4st) och icke-A (3st)

Dessa ~~kan~~ kan ställas upp på så här många sätt:

$$\binom{\#A + \#\text{icke-}A}{\#A} = \binom{4+3}{4} = 35 = \binom{4+3}{3} = \binom{\#A + \#\text{icke-}A}{\#\text{icke-}A}$$

Antal sätt att placera A

Antal sätt att placera icke-A

När vi placerat ut alla A:n ställ vi flytta runt alla icke-A, dvs L, B, M. Detta är dragn. utan återläggning av 3 element ur en mängd av 3 element med hänsyn till ordningen: $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

$$\Rightarrow \# \text{olika ord}: \binom{4+3}{4} \cdot 3! = 35 \cdot 6 = 210$$