Formelsamling LMA521/LKT325/LMA522/LMA201

Sannolikhetslära

Additionssatsen: Om A och B är två händelser på ett utfallsrum så gäller att

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

där

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ om A och B är oberoende

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$ om A och B är beroende

$P(B \mid A)$ kallas en betingad sannolikhet.

Bayes sats: $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \mid B) \cdot P(B)}{P(A)}$

A kan ibland utgöras av summan av disjunkta delhändelser, d.v.s.

$$P(A) = P(A_1) + \ldots\ldots + P(A_n)$$

Komplementhändelse: Om utfallsrummet kan delas in i två disjunkta delhändelser, A och A^C, så kallas A^C för komplementhändelsen till A. Vidare gäller att

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

Fyrfältstabell: Om A och B är två händelser på ett utfallsrum så kan sannolikheter för olika snitthändelser skrivas in i en fyrfältstabell enligt nedan

	A	**A^C**	
B	$P(A \cap B)$	$P(A^C \cap B)$	**$P(B)$**
B^C	$P(A \cap B^C)$	$P(A^C \cap B^C)$	**$P(B^C)$**
	$P(A)$	**$P(A^C)$**	

Sambandet mellan sannolikheter för olika snitthändelser fås genom addition av rader eller kolumner, t. ex. $P(A \cap B) + P(A^C \cap B) = P(B)$.

Kombinatorik:

Multiplikationsprincipen: Om man skall utföra k stycken operationer och den första kan utföras på n_1 olika sätt, den andra på n_2 olika sätt osv så blir antal möjliga fall, N

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot .... \cdot n_k$$

Kombinationer: Om man skall välja ut k stycken element bland n stycken utan att den ordning i vilken elementen dras är viktig så blir antalet kombinationer

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ..... \cdot 2 \cdot 1$

För n = 0 definieras 0! = 1

Diskret stokastisk variabel:

Allmän diskret fördelning:

Sannolikhet: $P(\xi = x_k)$

Fördelningsfunktion: $F(x_k) = P(\xi \le x_k) = \sum_{i=1}^{k} P(\xi = x_i)$

Väntevärde: $E(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(\xi = x_i)$

Varians: $Var(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot P(\xi = x_i) - [E(\xi)]^2$

Om ξ är en diskret stokastisk variabel med sannolikhetsfunktionen $p(x)=P(\xi = x)$ på utfallsrummet Ω, då gäller för varje reellvärd funktion g att

$$E[g(\xi)] = \sum_{\Omega} g(x) \cdot p(x)$$

Likformig fördelning: ξ är Likf(N)

N = antal möjliga utfall med lika sannolikheter.

Sannolikhet: $P(\xi = x) = \frac{1}{N}$

Exempel: Antal ögon vid ett tärningskast.

Hypergeometrisk fördelning: ξ är Hyp(N, n, p)

N = begränsad mängd.
Np = antal element av ett visst slag.
p = andel element av ett visst slag.
n = antal slumpmässigt utvalda element ur mängden N.

Sannolikhet: $$P(\xi = x) = \frac{\binom{Np}{x} \cdot \binom{N-Np}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Väntevärde: $E(\xi) = n \cdot p$

Varians: $Var(\xi) = n \cdot p \cdot (1 - p) \cdot \frac{N-n}{N-1}$

Approximationer:

– Om $\frac{n}{N} < 0.1$ så gäller att ξ är ungefär Bin(n, p)

– Om $p + \frac{n}{N} < 0.1$ och $n > 10$ så gäller att ξ är ungefär $Po(n \cdot p)$

– Om $n \cdot p \cdot (1 - p) \cdot \frac{N-n}{N-1} > 10$ så gäller att ξ är ungefär

$N[n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p) \cdot \frac{N-n}{N-1}}]$

Exempel: Plocka kulor ur en urna utan återläggning.

Binomialfördelningen: ξ är Bin(n, p)

n = antal oberoende upprepningar av ett försök.
p = sannolikheten att händelsen A (eller A^C) inträffar i ett sådant försök.

Sannolikhet: $P(\xi = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$
Väntevärde: $E(\xi) = n \cdot p$
Varians: $Var(\xi) = n \cdot p \cdot (1 - p)$

Approximationer:

– Om $n > 10$ och $p < 0.1$ så gäller att ξ är ungefär $Po(n \cdot p)$
– Om $n \cdot p \cdot (1 - p) > 10$ så gäller att ξ är ungefär $N[n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}\,]$

Exempel: Antal klavar vid 20 oberoende kast av ett mynt.

Poissonfördelningen: ξ är Po(λ)

λ = genomsnittligt antal händelser i ett intervall.

Sannolikhet: $P(\xi = x) = e^{-\lambda} \cdot \dfrac{\lambda^x}{x!}$
Väntevärde: $E(\xi) = \lambda$
Varians: $Var(\xi) = \lambda$

Approximationer:
– Om $\lambda > 15$ så gäller att ξ är ungefär $N[\lambda, \sqrt{\lambda}\,]$

Exempel: Antal båtar som anlägger i en hamn under ett dygn.

Kontinuerlig stokastisk variabel:

Allmän kontinuerlig fördelning:

Frekvensfunktion: $f(\xi)$ där $f(x) \geq 0$ och $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Fördelningsfunktion: $F(x) = P(\xi \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

$$P(\xi > x) = \int_{x}^{\infty} f(t)dt = 1 - F(x)$$

$$P(a < \xi \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Väntevärde: $E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$

Varians: $Var(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx - [E(\xi)]^2$

Om ξ är en kontinuerlig stokastisk variabel med frekvensfunktionen f(x), då gäller för varje reellvärd funktion g att

$$E[g(\xi)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x)dx$$

Rektangelfördelning: ξ är R(a, b)

Frekvensfunktion: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$

Fördelningsfunktion: $F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$

Väntevärde: $E(\xi) = \dfrac{a+b}{2}$

Varians: $Var(\xi) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Exponentialfördelning: ξ är Exp(λ)

Frekvensfunktion: $f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

Fördelningsfunktion: $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$

Väntevärde: $E(\xi) = \frac{1}{\lambda}$

Varians: $Var(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}$

Weibullfördelningen: ξ är Weibull(α, β)

Frekvensfunktion: $f(x) = \begin{cases} \frac{\beta \cdot x^{\beta-1}}{\alpha} \cdot e^{-\frac{x^\beta}{\alpha}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

Fördelningsfunktion: $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x^\beta}{\alpha}} & x \geq 0 \end{cases}$

Normalfördelningen: ξ är N(μ, σ)

Frekvensfunktion: $f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Väntevärde: $E(\xi) = \mu$

Varians: $Var(\xi) = \sigma^2$

Fördelningsfunktion för den normerade normalfördelningen:

$$\Phi(z) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

Centrala gränsvärdessatsen:

Vid okänd fördelning

$\sum_{i=1}^{n} \xi_i$ är ungefär N($n \cdot \mu$, $\sigma \cdot \sqrt{n}$) då n är stort

$\bar{\xi}$ är ungefär N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$) då n är stort

Statistik

Beskrivande statistik

Lägesmått

<u>Aritmetiskt medelvärde:</u> $\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} \frac{f_i\, x_i}{n}$

<u>Medianen i ett klassindelat material:</u> $Md = x_a + \frac{\frac{n}{2} - kf}{f} \cdot kb$

x_a = nedre klassgräns
kf = kumulerade frekvensen i klassen före
f = frekvensen i klassen
kb = klassbredden

Spridningsmått

<u>Standardavvikelse:</u> $s = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{k} f_i x_i\right)^2}{n}}{n-1}}$

<u>Kvartilavståndet:</u> $Q = Q_3 - Q_1$ där Q_3 och Q_1 är 3:e respektive 1:a kvartilen.

Konfidensintervall

(OBS: $z_{1-\alpha/2}$ kallas $z_{\alpha/2}$, och $t_{1-\alpha/2}(\nu)$ kallas $t_{\alpha/2}(\nu)$ i gamla formelsamlingen och i gamla tentor.)

Konfidensintervall för μ:

Ett $(1-\alpha)\cdot 100\%$-igt konfidensintervall för μ, för en normalfördelad stokastisk variabel då

a) <u>σ är känd</u> $\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

b) <u>σ är okänd</u> $\bar{x} \pm t_{1-\alpha/2}(\nu) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$ där ν är antal frihetsgrader (df)

Om populationen är ändlig och $\frac{N-n}{N-1} < 0.95$ så blir konfidensintervallet

$$\bar{x} \pm t_{1-\alpha/2}(\nu) \cdot \sqrt{\frac{s^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}}$$

Konfidensintervall för andelen, p:

Ett $(1-\alpha)\cdot 100\%$-igt konfidensintervall för p skrivs

$$\hat{p} \pm z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

där $\hat{p}$ är den skattade andelen i urvalet och n är stort.

Konfidensintervall för σ:

a) Ett $(1-\alpha)\cdot 100\%$-igt ensidigt uppåt begränsat konfidensintervall för σ, för en normalfördelad stokastisk variabel

$$\left[0, \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha}}}\right]$$

b) Ett $(1-\alpha)\cdot 100\%$-igt tvåsidigt konfidensintervall för σ, för en normalfördelad stokastisk variabel

$$\left[\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}}}, \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}}\right]$$

Statistisk försöksplanering

Sammanvägd varians:

Antag att vi har k grupper med en gemensam varians σ^2. Då kan man beräkna en gemensam skattning, s_p^2 för denna varians enligt följande:

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2 + \dots\dots\dots + (n_k - 1)s_k^2}{(n_1 + n_2 + \dots\dots + n_k) - k}$$

där

n_i = antal replikat för grupp i

s_i^2 = stickprovsvariansen för grupp i

Normalfördelningsplot:

Huvud- och samspelseffekter kan ritas in som punkter (x_j, p_j) på ett normalfördelningspapper där

$$p_j = \frac{(j-0.5)\cdot 100}{k}\,\% \qquad j = 1, 2, \dots\dots, k$$

k = antal inritade effekter

Medelfel för en effekt:

Standardavvikelsen för en effekt kan bl. a. erhållas på följande två sätt:

Om man har replikat och kan beräkna en sammanvägd gemensam standardavvikelse, s_p, för observationerna:

$$s_{effekt} = \frac{2s_p}{\sqrt{N}}$$

Om man har samspel av högre ordning:

$$s_{effekt} = \sqrt{\frac{\sum(\text{effekt})^2}{\text{antal effekter}}}$$

Statistisk kvalitetskontroll:

Acceptanssannolikheten, L(p), för enkel provtagning vid attributmetoden:

Antag att man har ett parti som består av N enheter. Av dessa är Np defekta. För att kontrollera kvalitén tas ett slumpmässigt urval om n st enheter från partiet.

$$L(p) = \sum_{x=0}^{c} \frac{\binom{Np}{x}\binom{N-Np}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$L(p) \approx \sum_{x=0}^{c} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad \text{om} \quad \frac{n}{N} < 0.1$$

Genomsnittligt provuttag:

$ASN(p) = n$ (Enkel provtagning)

$ASN(p) = n_1 + n_2(1-B)$ (Dubbel provtagning)

B = Sannolikheten att beslut tas efter första provet

Genomsnittlig kontrollomfattning:

$ATI(p) = nL(p) + N(1-L(p))$ (Enkel provtagning)

$ATI(p) = n_1 A_1 + (n_1+n_2) A_2 + N(1-A_1-A_2)$ (Dubbel provtagning)

A_1 = Acceptanssannolikhet efter första provet

A_2 = Acceptanssannolikhet efter andra provet

Genomsnittlig utgående kvalitet:

$$AOQ(p) = pL(p)\cdot(1-\frac{n}{N}) \qquad \text{(Enkel provtagning)}$$

$$AOQ(p) = \frac{N-n_1}{N}pA_1 + \frac{N-n_1-n_2}{N}pA_2 \qquad \text{(Dubbel provtagning)}$$

$$AOQ(p) \approx pL(p) \qquad \text{(All provtagning)}$$

$$AOQL = \max_{0\le p\le 1} AOQ(p)$$

$\overline{X}$-diagram:

	Kända parametrar	R-metoden	s-metoden
K_u =	$\mu - 3\sigma/\sqrt{n}$	$\overline{\overline{X}} - A_2\overline{R}$	$\overline{\overline{X}} - A_3\overline{s}$
CL =	μ	$\overline{\overline{X}}$	$\overline{\overline{X}}$
$K_ö$ =	$\mu + 3\sigma/\sqrt{n}$	$\overline{\overline{X}} + A_2\overline{R}$	$\overline{\overline{X}} + A_3\overline{s}$

R-diagram:

	Kända parametrar	Okända parametrar
K_u =	$D_1\sigma$	$D_3\overline{R}$
CL =	$d_2\sigma$	$\overline{R}$
$K_ö$ =	$D_2\sigma$	$D_4\overline{R}$

s-diagram:

	Kända parametrar	Okända parametrar
K_u =	$B_5\sigma$	$B_3\overline{s}$
CL =	$c_4\sigma$	$\overline{s}$
$K_ö$ =	$B_6\sigma$	$B_4\overline{s}$

p-diagram:

	Kända parametrar	Okända parametrar
K_u =	$p - 3\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$	$\hat{p} - 3\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$
CL =	p	$\hat{p}$
$K_ö$ =	$p + 3\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$	$\hat{p} + 3\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

c-diagram:

	Kända parametrar	Okända parametrar
K_u =	$c - 3\sqrt{c}$	$\bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}}$
CL =	c	$\bar{c}$
$K_ö$ =	$c + 3\sqrt{c}$	$\bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}}$

Kapabilitet:

$$K = 6\sigma$$

Kapabilitetsindex:

$$C_p = \frac{T_ö - T_u}{6\sigma}$$

$$C_{p_ö} = \frac{T_ö - \mu}{3\sigma}$$

$$C_{p_u} = \frac{\mu - T_u}{3\sigma}$$

Korrigerat kapabilitetsindex:

$$C_{pk} = C_p(1 - CM)$$

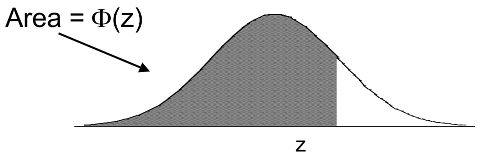
$$CM = \frac{|M - \mu|}{(T_ö - T_u)/2}$$

där M = målvärdet

Normalfördelningens fördelningsfunktion $\Phi(z)$

$\Phi(z) = P(Z \leq z)$ där Z är N(0, 1)

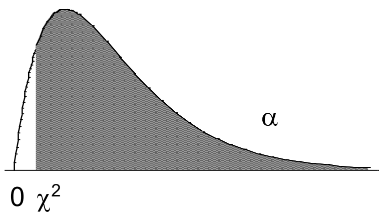
För negativa värden, utnyttja att $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0. 6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

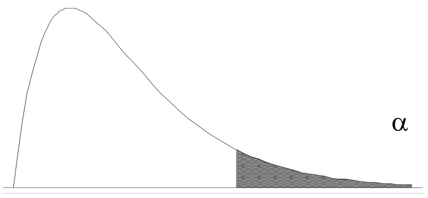
χ^2-fördelningen

kritiska värden, χ^2, för olika frihetsgrader (df)
och signifikansnivån α



df	α 0.995	0. 990	0.975	0.950	0.900
1	0.000039	0.000157	0.000982	0.003932	0.015791
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107
3	0.0717	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844
4	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	1.064
5	0.4117	0.5543	0.8312	1.145	1.610
6	0.6757	0.8721	1.237	1.635	2.204
7	0.9893	1.239	1.690	2.167	2.833
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865
11	2.603	3.053	3.816	4.585	5.578
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.3122
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.042
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939
29	13.121	14.257	16.047	17.708	19.768
30	13.787	14.954	16.791	18.493	20.599
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689
60	35.535	37.485	40.482	43.188	46.459
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329
80	51.172	53.540	57.153	60.392	64.278
90	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291
100	67.328	70.065	74.222	77.930	82.358

χ^2-fördelningen

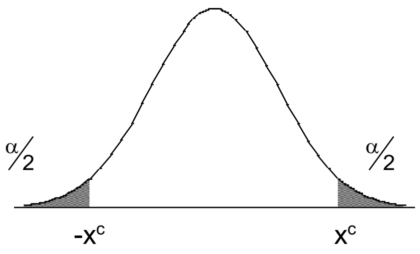


kritiska värden, χ^2, för olika frihetsgrader (df)
och signifikansnivån α

df	α 0.100	0. 050	0.025	0.010	0.005
1	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	6.251	7.814	9.348	11.345	12.838
4	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	9.236	11.071	12.833	15.086	16.750
6	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	24.769	27.587	30.191	33.409	35.719
18	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	32.007	35.173	38.076	41.638	44.181
24	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	34.382	37.653	40.647	44.314	46.928
26	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	36.741	40.113	43.194	46.963	49.645
28	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	39.088	42.557	45.722	49.588	52.336
30	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
40	51.805	55.759	59.342	63.691	66.766
50	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
60	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952
70	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215
80	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321
90	107.567	113.145	118.136	124.116	128.299
100	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

t-fördelningen

kritiska värden, x^c, för olika frihetsgrader (df)
och signifikansnivån α



df	α 0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001
1	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66	318.31	636.61
2	1.89	2.92	4.30	6.96	9.93	22.33	31.60
3	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84	10.21	12.92
4	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60	7.17	8.61
5	1.48	2.02	2.57	3.36	4.03	5.89	6.87
6	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71	5.21	5.96
7	1.41	1.89	2.37	3.00	3.50	4.79	5.41
8	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36	4.50	5.04
9	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25	4.30	4.78
10	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17	4.14	4.59
11	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11	4.02	4.44
12	1.36	1.78	2.18	2.68	3.06	3.93	4.32
13	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01	3.85	4.22
14	1.34	1.76	2.15	2.62	2.98	3.79	4.14
15	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95	3.73	4.07
16	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92	3.69	4.02
17	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90	3.65	3.97
18	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88	3.61	3.92
19	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86	3.58	3.88
20	1.33	1.72	2.09	2.53	2.85	3.55	3.85
21	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83	3.53	3.82
22	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82	3.51	3.79
23	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81	3.48	3.77
24	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80	3.47	3.75
25	1.32	1.71	2.06	2.49	2.79	3.45	3.73
26	1.32	1.71	2.06	2.48	2.78	3.44	3.71
27	1.31	1.70	2.05	2.47	2.77	3.42	3.69
28	1.31	1.70	2.05	2.47	2.76	3.41	3.67
29	1.31	1.70	2.05	2.46	2.76	3.40	3.66
30	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75	3.39	3.65
40	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70	3.31	3.55
60	1.30	1.67	2.00	2.39	2.66	3.23	3.46
120	1.29	1.66	1.98	2.36	2.62	3.16	3.37
∞	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58	3.09	3.29

Konstanter för konstruktion av vissa kontrolldiagram

Provgrupps-storlek, n	$\overline{x}$-diagram			s-diagram				R-diagram			
	A	A_2	A_3	B_3	B_4	B_5	B_6	D_1	D_2	D_3	D_4
2	2.121	1.880	2.659	0	3.267	0	2.606	0	3.686	0	3.267
3	1.732	1.023	1.954	0	2.568	0	2.776	0	4.358	0	2.575
4	1.500	0.729	1.628	0	2.266	0	2.088	0	4.698	0	2.282
5	1.342	0.577	1.427	0	2.089	0	1.964	0	4.918	0	2.115
6	1.225	0.483	1.287	0.030	1.970	0.029	1.874	0	5.078	0	2.004
7	1.134	0.419	1.182	0.118	1.882	0.113	1.806	0.205	5.203	0.076	1.924
8	1.061	0.373	1.099	0.185	1.815	0.179	1.751	0.387	5.307	0.136	1.864
9	1.000	0.337	1.032	0.239	1.761	0.232	1.707	0.546	5.394	0.184	1.816
10	1.949	0.308	0.975	0.284	1.716	0.276	1.669	0.687	5.469	0.223	1.777
11	0.905	0.285	0.927	0.321	1.679	0.313	1.637	0.812	5.534	0.256	1.744
12	0.866	0.266	0.886	0.354	1.646	0.346	1.610	0.924	5.592	0.284	1.716
13	0.832	0.249	0.850	0.382	1.618	0.374	1.585	1.026	5.646	0.308	1.692
14	0.802	0.235	0.817	0.406	1.594	0.399	1.563	1.121	5.693	0.329	1.671
15	0.755	0.223	0.789	0.428	1.572	0.421	1.544	1.207	5.737	0.348	1.652
16	0.750	0.212	0.763	0.448	1.552	0.440	1.526	1.285	5.779	0.364	1.636
17	0.728	0.203	0.739	0.466	1.534	0.458	1.511	1.359	5.817	0.379	1.621
18	0.707	0.194	0.718	0.482	1.518	0.475	1.496	1.426	5.854	0.392	1.608
19	0.688	0.187	0.698	0.497	1.503	0.490	1.483	1.490	5.888	0.404	1.596
20	0.671	0.180	0.680	0.510	1.490	0.504	1.470	1.548	5.922	0.414	1.586

$\overline{x}$-diagram: $\mu \pm A\sigma$, $\overline{\overline{x}} \pm A_2\overline{R}$, $\overline{\overline{x}} \pm A_3\overline{s}$

s-diagram: $B_5\sigma$ och $B_6\sigma$, $B_3\overline{s}$ och $B_4\overline{s}$

R-diagram: $D_1\sigma$ och $D_2\sigma$, $D_3\overline{R}$ och $D_4\overline{R}$

Dubbla provtagningsplaner med OC-kurva genom punkterna (p_1, 1 – α) och (p_2, β) där α = 5% och β = 10%.

1) $n_2 = n_1$

Provtagningsplan nr	$\frac{p_2}{p_1}$	Acceptanstal		Approximativt värde på n_1p då L(p) =			Approximativt värde på ASN(p)/n_1 för p_{95}
		c_1	c_2	0.95	0.50	0.10	
1	11.90	0	1	0.21	1.00	2.50	1.170
2	7.54	1	2	0.52	1.82	3.92	1.081
3	6.79	0	2	0.43	1.42	2.96	1.340
4	5.39	1	3	0.76	2.11	4.11	1.169
5	4.65	2	4	1.16	2.90	5.39	1.105
6	4.25	1	4	1.04	2.50	4.42	1.274
7	3.88	2	5	1.43	3.20	5.55	1.170
8	3.63	3	6	1.87	3.98	6.78	1.117
9	3.38	2	6	1.72	3.56	5.82	1.248
10	3.21	3	7	2.15	4.27	6.91	1.173
11	3.09	4	8	2.62	5.02	8.10	1.124
12	2.85	4	9	2.90	5.33	8.26	1.167
13	2.60	5	11	3.68	6.40	9.56	1.166
14	2.44	5	12	4.00	6.73	9.77	1.215
15	2.32	5	13	4.35	7.06	10.08	1.271
16	2.22	5	14	4.70	7.52	10.45	1.331
17	2.12	5	16	5.39	8.40	11.41	1.452

2) $n_2 = 2n_1$

Prov-tagnings-plan nr	$\frac{p_2}{p_1}$	Acceptanstal		Approximativt värde på n_1p då L(p) =			Approximativt värde på ASN(p)/n_1 för p_{95}
		c_1	c_2	0.95	0.50	0.10	
1	14.50	0	1	0.16	0.84	2.32	1.273
2	8.07	0	2	0.30	1.07	2.42	1.511
3	6.48	1	3	0.60	1.80	3.89	1.238
4	5.39	0	3	0.49	1.35	2.64	1.771
5	5.09	1	4	0.77	1.97	3.92	1.359
6	4.31	0	4	0.68	1.64	2.93	1.985
7	4.19	1	5	0.96	2.18	4.02	1.498
8	3.60	1	6	1.16	2.44	4.17	1.646
9	3.26	2	8	1.68	3.28	5.47	1.476
10	2.96	3	10	2.27	4.13	6.72	1.388
11	2.77	3	11	2.46	4.36	6.82	1.468
12	2.62	4	13	3.07	5.21	8.05	1.394
13	2.46	4	14	3.29	5.40	8.11	1.472
14	2.21	3	15	3.41	5.40	7.55	1.888
15	1.97	4	20	4.75	7.02	9.35	2.029
16	1.74	6	30	7.45	10.31	12.96	2.230

Konfidensintervall för $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$:

Ett (1–2α)%-igt tvåsidigt konfidensintervall för $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$, för två normalfördelade stokastiska variabler

$$\left[F_{1-\alpha}\cdot\frac{s_2^2}{s_1^2},\ F_\alpha\cdot\frac{s_2^2}{s_1^2}\right]$$

Hypotestest

1) Ett tvåsidigt hypotestest av $\mu=\mu_0$ alternativt $p=p_0$ vid normalfördelning

$$\begin{cases} H_0: \ \mu = \mu_0 \\ H_1: \ \mu \neq \mu_0 \end{cases} \quad \text{alternativt} \quad \begin{cases} H_0: \ p = p_0 \\ H_1: \ p \neq p_0 \end{cases}$$

2) Hypotestest av godtycklig fördelning, då F_0 fullständig känd; χ^2-test

$$\begin{cases} H_0: \ \text{observationerna kommer från den kända fördelningen, } F_0 \\ H_1: \ \text{observationerna kommer \underline{inte} från den kända fördelningen, } F_0 \end{cases}$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$ där O_i är observerat antal och E_i är förväntat antal

signifikansnivån, α: $P(H_0 \text{ förkastas} | H_0 \text{ sann}) = \alpha$

Styrkan, 1 – β: $P(H_0 \text{ förkastas} | H_1 \text{ sann}) = 1 - \beta$

Variansanalys

Ensidig indelning

Variationskälla	**Kvadratsumma**	**Beräkning**
Mellan grupper	SSB	B – C
Inom grupper	SSE	A – B
Totalt	SST	A – C

$$A = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 \qquad B = \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}\right)^2}{n_j} \qquad C = \frac{\left(\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}\right)^2}{n}$$

där r = antal rader
k = antal kolumner

Tvåsidig indelning - en observation per cell

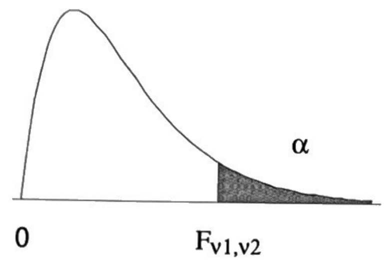
Variationskälla	**Kvadratsumma**	**Beräkning**
Mellan rader	SSR	B – D
Mellan kolumner	SSK	C – D
Okänd	SSE	Differens
Totalt	SST	A – D

$$A = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k} x_{ij}^2 \qquad B = \sum_{i=1}^{r} \frac{\left(\sum_{j=1}^{k} x_{ij}\right)^2}{k} \qquad C = \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(\sum_{i=1}^{r} x_{ij}\right)^2}{r} \qquad D = \frac{\left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k} x_{ij}\right)^2}{n}$$

där r = antal rader
k = antal kolumner

F-fördelningen

kritiska värden, $F_{\nu 1,\nu 2}$, för olika frihetsgrader (ν_1, ν_2)df
och signifikansnivån $\alpha = 0.05$



Nämnare	Täljare $\nu_1$df																		
ν_2 df	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.20
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84

Nämnare ν_2 df	Täljare ν_1 df 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00