Genomsnittligt provuttag

För en given provtagningsplan kan man vilja veta hur många enheter som man kan vänta sig kontrollera.

Förväntat antal kontrollerade enheter för en given plan och en sann felkvot ges av

$$ASN(p) = \mathbb{E}[\xi^N(p)] = \sum_{k=0}^{N} k\,\mathbb{P}(\xi^N(p)=k) \quad (\text{"Average sample number"})$$

där $\xi^N(p)$ = # kontrollerade enheter vid beslut om acceptans/avvisning av parti om N enheter med felkvot p

För enkel provtagningsplan:

Här är $\xi^N(p) = n$ för alla $p \in [0,1] \Rightarrow ASN(p) = n$

(vi kontrollerar alltid $n \leq N$ enheter)

För dubbel provtagningsplan:

$\xi_i^N(p)$ = # testade i urval i, $i=1,2 \Rightarrow \xi^N(p) = \overset{\in\{n_1\}}{\xi_1^N(p)} + \overset{\in\{0,n_2\}}{\xi_2^N(p)} \in \{n_1, n_1+n_2\}$

$B = \mathbb{P}(\text{fatta beslut efter första urvalet}) =$

$= \mathbb{P}(\{D_1(p) \leq c_1\} \cup \{D_1(p) \geq r_1\})$

$1-B = \mathbb{P}(\text{fatta beslut efter andra}) = \mathbb{P}(c_1 < D_1(p) < r_1)$

$$ASN(p) = \mathbb{E}[\xi^N(p)] = n_1\mathbb{P}(\text{fatta beslut efter första})$$

$$+ (n_1+n_2)\mathbb{P}(\text{fatta beslut efter andra}) =$$

$$= n_1 B + (n_1+n_2)(1-B) = n_1 B + n_1 + n_2 - n_1 B - n_2 B$$

$$= n_1 + n_2(1-B) = n_1 + n_2\mathbb{P}(c_1 < D_1(p) < r_1)$$

Uppg. 2.16 Bestäm genomsnittligt provuttag för ett parti med felkvot 6%. Använd dubbel provtagn.plan med $n_1=30, n_2=60, c_1=0, c_2=2, r_1=r_2=3$.

Lösn:

$$p=0.06 \Rightarrow ASN(p)=n_1+n_2(1-B)=30+60(1-B)$$

$$B=P(\text{beslut efter första urvalet})=P(\{D_1=\overset{c_1}{0}\}\cup\{D_1\geq \overset{r_1}{3}\})$$

$$\Rightarrow 1-B=P(D_1=1)+P(D_1=2)\overset{\text{Bin-approx.}}{\approx}\binom{30}{1}0.06^1\cdot 0.94^{29}+\binom{30}{2}0.06^2\cdot 0.94^{28}=$$
$$=0.5761$$

$$\Rightarrow ASN(0.06)=30+60\cdot 0.5761=64.57$$

$\Rightarrow$ Med den angivna planen kommer man i snitt att undersöka 64.57 enheter innan beslut fattas ∎

$\boxed{\text{Sid 34 i boken}}$

Genomsnittlig kontrollomfattning

Vad gör man när man avvisat ett helt parti?

Ett vanligt upplägg är att man allkontrollerar partiet och reparerar/ersätter defekta enheter, samt studerar vad som gått snett.

Hur många enheter förväntas man kontrollera

$\xi^N(p)$ = # kontrollerade enheter vid beslut om acceptans (parti om N enheter, felkvot p)

N = # kontrollerade enheter vid beslut om avvisning

$$ATI(p)=E[\#\text{ totalt kontrollerade}] = E[\xi^N(p)|\text{Accept}]P(\text{accept})+E[N|\text{avvisa}]P(\text{avvisa})$$

("Average total inspection")

Enkel provtagningsplan:

$$ATI(p)=\underset{\xi^N(p)}{n}P(\text{acceptera})+NP(\text{avvisa})=nL(p)+N(1-L(p))$$

Dubbel provtagningsplan:

$\mathbb{E}[\xi^N(p) \mid \text{acceptera}]\,\mathbb{P}(\text{acceptera}) = n_1 \mathbb{P}(\text{accept. efter första urvalet}) + (n_1+n_2)\mathbb{P}(\text{accept efter andra})$

$= n_1 A_1 + (n_1+n_2) A_2$

$\mathbb{P}(\text{avvisa}) = 1-(A_1+A_2)$

$\Rightarrow ATI(p) = n_1 \underbrace{A_1}_{\mathbb{P}(\text{accept efter första})} + (n_1+n_2)\underbrace{A_2}_{\mathbb{P}(\text{accept efter andra})} + N(1-A_1-A_2)$

$\boxed{\text{Exempel 2.17}}$

Genomsnittlig utgående kvalitet, AOQ

Vad är den förväntade kvaliteten som kunden får?

Om partiet avvisas så gör vi en allkontroll och lagar/byter ut alla trasiga enheter.

Om vi accepterar partiet så kommer det med felaktiga enheter.

Vilken är den förväntade påträffade felkvoten hos kunden (som en funktion av den ingående sanna felkvoten)?

$AOQ(p) = \mathbb{E}[\text{andel defekta i partiet efter genomgången provtagn.}]$

I enkel plan:

Andel icke provtagna: $\frac{N-n}{n}$

Förväntad andel felaktiga ej provtagna: $p\frac{N-n}{N}$

Om partiet avvisas byter vi ut alla felaktiga.

Om partiet accepteras byter vi ut de den felaktiga vi undersöker. $\Rightarrow$ Felaktiga bland de $\frac{N-n}{N}$ upptäcks ej

$$\Rightarrow AOQ(p) = \mathbb{E}[\text{andel felaktiga} \mid \text{acceptera}] \cdot \mathbb{P}(\text{acceptera}) + \mathbb{E}[\text{andel felaktiga} \mid \text{avvisa}] \cdot \mathbb{P}(\text{avvisa}) = p\frac{N-n}{N}L(p) + 0 \cdot (1-L(p))$$

$$= pL(p)\frac{N-n}{N}$$

Dubbel provtagningsplan:

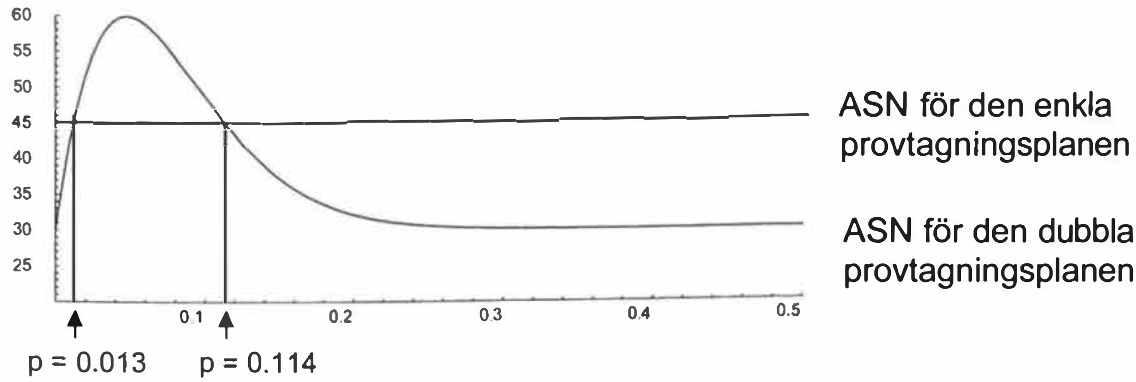
$$AOQ(p) = \mathbb{E}[\text{andel felaktiga} \mid \text{acceptera efter urval 1}]\,\mathbb{P}(\text{acceptera efter urval 1}) +$$

$$+ \mathbb{E}[\text{andel felaktiga} \mid \text{accept. efter urval 2}] \cdot \mathbb{P}(\text{accept efter urval 2})$$

$$= p\frac{N-n_1}{n}\underbrace{\mathbb{P}(D_1 \le c_1)}_{=A_1} + p\frac{N-(n_1+n_2)}{N}\underbrace{\mathbb{P}(\{c_1 < D_1 < r_1\} \cap \{D_1 + D_2 \le c_2\})}_{=A_2}.$$

Notera att $\frac{N-n}{N} \approx 1$ när N är stort

$\boxed{\text{Exempel 2.19, 2.20}}$



I lösningen av exempel 2.9c (se sidan 26) såg vi att OC-kurvan för ovanstående dubbla provtagningsplan nästan sammanföll med motsvarande OC-kurva för den enkla planen $n = 45$ och $c = 1$. I ovanstående figur finns ASN-kurvorna för såväl den dubbla som den enkla provtagningsplanen utritad. Observera att $ASN(p) = 45$ för den enkla provtagningsplanen för alla felkvoter, p. Figuren visar att för partier med liten felkvot ($p < 0.013$) alternativt stor ($p > 0.114$) felkvot lönar det sig att välja en dubbel provtagningsplan. Om felkvoten däremot ligger mellan dessa värden, är en enkel provtagningsplan att föredra.

Anta att vi har fått information om två punkter på OC-kurvan. För vissa dubbla provtagningsplaner kunde vi i tabellen på sidan 181 få ett approximativt värde på kvoten ASN/n_1 för felkvoten p där $L(p) = 0.95$. Denna felkvot betecknas p_{95} i tabellen. Hur tabellen används i denna situation visas i nedanstående exempel.

Exempel 2.13
Anta att vi har bestämt oss för att använda en dubbel provtagningsplan.
a) Bestäm en lämplig plan med $L(0.02) = 0.95$ och $L(0.15) = 0.10$.
b) Bestäm ett approximativt värde på det genomsnittliga provuttaget för den provtagningsplan du har valt i a-uppgiften.

Lösning: De provtagningsplaner vi kan få fram med hjälp av tabellen med två punkter på OC-kurvan är $n_1 = n_2$ och $2n_1 = n_2$. Bilda kvoten $\frac{p_2}{p_1} = \frac{0.15}{0.02} = 7.5$.

$n_1 = n_2$

Provtagningsplan nr	$\frac{p_2}{p_1}$	Acceptanstal		Approximativt värde på n_1p då $L(p) =$			Approx. värde på $ASN(p)/n_1$ för p_{95}
		c_1	c_2	0.95	0.50	0.10	
1	11.90	0	1	0.21	1.00	2.50	1.170
2	**7.54**	**1**	**2**	**0.52**	**1.82**	**3.92**	**1.081**
3	6.79	0	2	0.43	1.42	2.96	1.340
4	5.39	1	3	0.76	2.11	4.11	1.169
5	4.65	2	4	1.16	2.90	5.39	1.105
6	4.25	1	4	1.04	2.50	4.42	1.274
7	3.88	2	5	1.43	3.20	5.55	1.170

$2n_1 = n_2$

Prov-tagnings-plan nr	$\frac{p_2}{p_1}$	Acceptanstal		Approximativt värde på n_1p då $L(p)$ =			Approx. värde på $ASN(p)/n_1$ för p_{95}
		c_1	c_2	0.95	0.50	0.10	
1	14.50	0	1	0.16	0.84	2.32	1.273
2	8.07	0	2	0.30	1.07	2.42	1.511
3	6.48	1	3	0.60	1.80	3.89	1.238
4	5.39	0	3	0.49	1.35	2.64	1.771
5	5.09	1	4	0.77	1.97	3.92	1.359
6	4.31	0	4	0.68	1.64	2.93	1.985
7	4.19	1	5	0.96	2.18	4.02	1.498

a) Tabellen visar att provtagningsplan 2 i tabellen för $n_1 = n_2$ ger det värde på kvoten (7.54) som ligger närmast 7.5. Planen är markerad med fetstil.

Den dubbla provtagningsplan som passar bäst är $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ och $r_1 = r_2 = 3$. Vidare finner vi sambandet

$$p_1 n_1 = 0.02 n_1 = 0.52 \Rightarrow p_1 = 2\% \Rightarrow n_1 = \frac{0.52}{0.02} = 26 \Rightarrow n_2 = n_1 = 26$$

En lämplig provtagningsplan blir då $n_1 = n_2 = 26$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ och $r_1 = r_2 = 3$.

b) I samma tabell finns längst till höger en kolumn med det approximativa värdet för p_{95}.

$$\frac{ASN}{n_1} \approx 1.081$$

Det betyder att: $ASN \approx n_1 \cdot 1.081 = 26 \cdot 1.081 \approx 28.1$

Exempel 2.17
Anta att man har en partistorlek på N = 1 000 enheter. Följande dubbla provtagningsplan används:

$$n_1 = 30,\quad n_2 = 50,\quad c_1 = 0,\quad c_2 = 2 \text{ och } r_1 = r_2 = 3$$

Beräkna genomsnittlig kontrollomfattning, om felkvoten är 2 %.

Lösning:

1) Om $d_1 = 0$, kommer $n_1 = 30$ observationer att undersökas. Sannolikheten för detta är:

$$P(d_1 = 0) = \binom{30}{0} 0.02^0 \cdot 0.98^{30} \approx 0.5455$$

2) Om $1 \le d_1 \le 2$, tas en andra provgrupp. De situationer då detta inträffar är när antal defekta i första urvalet är $d_1 = 1$ eller $d_1 = 2$. Sannolikheterna för dessa två händelser är:

$$P(d_1 = 1) = \binom{30}{1} 0.02^1 \cdot 0.98^{29} \approx 0.3340$$

$$P(d_1 = 2) = \binom{30}{2} 0.02^2 \cdot 0.98^{28} \approx 0.0988$$

Om $d_1 + d_2 \le 2$, kommer $n_1 + n_2 = 80$ observationer att undersökas. Detta kan inträffa genom tre olika situationer.

$\underline{d_1 = 1 \text{ och } d_2 = 0}$ med följande sannolikhet:

$$P(d_2 = 0 \cap d_1 = 1) = P(d_2 = 0 \mid d_1 = 1) \cdot P(d_1 = 1) =$$
$$= \binom{50}{0} 0.02^0 \cdot 0.98^{50} \cdot 0.3340 \approx 0.12163$$

$\underline{d_1 = 1 \text{ och } d_2 = 1}$ med nedanstående sannolikhet:

$$P(d_2 = 1 \cap d_1 = 1) = P(d_2 = 1 \mid d_1 = 1) \cdot P(d_1 = 1) =$$
$$= \binom{50}{1} 0.02^1 \cdot 0.98^{49} \cdot 0.3340 \approx 0.12411$$

$\underline{d_1 = 2 \text{ och } d_2 = 0}$ med nedanstående sannolikhet:

$$P(d_2 = 0 \cap d_1 = 2) = P(d_2 = 0 \mid d_1 = 2) \cdot P(d_1 = 2) =$$
$$= \binom{50}{0} 0.02^0 \cdot 0.98^{50} \cdot 0.0988 \approx 0.03598$$

80 observationer kommer att undersökas med sannolikheten 0.12163 + + 0.12411 + 0.03598 ≈ 0.2817

3) 1 000 observationer, d.v.s. allkontroll av hela partiet, kommer att inträffa i övriga fall, d.v.s. med sannolikheten 1 – 0.5455 – 0.2817 = 0.1728

Vi har nu fått den information som krävs för att beräkna genomsnittlig kontroll-omfattning för partiet.

$$\begin{aligned} ATI(0.02) &= n_1 \cdot 0.5455 + (n_1 + n_2) \cdot 0.2817 + N \cdot 0.1728 = \\ &= 30 \cdot 0.5455 + 80 \cdot 0.2817 + 1000 \cdot 0.1728 \approx 211.7 \end{aligned}$$

Om man väljer att göra totalkontroll av avvisade partier, kommer – i ovanstående situation – i genomsnitt ungefär 212 enheter i varje parti att undersökas.

Exempel 2.19 (omskriven beskrivning)
Beräkna den genomsnittliga utgående kvaliteten för en enkel provtagningsplan med $n = 30$ och $c = 3$ (1000 enheter, felkvot 2%) m.h.a. angiven beräkningsformel.

Lösning:

Acceptanssannolikheten för partiet = $P(d \le 3) = P(d = 0) + P(d = 1) +$

$+ P(d = 2) + P(d = 3) =$ (Poissonapproximation med $\lambda = np = 0.6$) =

$$= \frac{e^{-0.6} \cdot 0.6^0}{0!} + \frac{e^{-0.6} \cdot 0.6^1}{1!} + \frac{e^{-0.6} \cdot 0.6^2}{2!} + \frac{e^{-0.6} \cdot 0.6^3}{3!} \approx 0.9967$$

Detta ger följande uträkning:

$$AOQ(0.02) = pL(p) \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right) = 0.02 \cdot 0.9967 \cdot \left(1 - \frac{30}{1000}\right) \approx 0.019$$

För dubbla provtagningsplaner gäller motsvarande beräkningsformel.

$$AOQ(p) = \frac{N - n_1}{N} pA_1 + \frac{N - n_1 - n_2}{N} pA_2$$

där $A_1 = P(d_1 \le c_1)$
$A_2 = P(c_1 < d_1 < r_1$ och $d_1 + d_2 \le c_2)$

Exempel 2.20
En viss sorts eldetaljer levereras i kollin med 1 000 stycken. Anta att felkvoten är 10 %. Bestäm AOQ(p) för den dubbla provtagningsplanen $n_1 = 20$, $n_2 = 40$, $c_1 = 1$, $c_2 = 4$ och $r_1 = r_2 = 5$.

Lösning:

Urval 1:
$A_1 = P(d_1 \le c_1) = P(d_1 \le 1)$ där d_1 approximeras med $Bin(n_1, p) = Bin(20, 0.1)$.

Detta ger oss följande beräkning.

$$A_1 = P(d_1 = 0) + P(d_1 = 1) = \binom{20}{0} 0.1^0 \cdot 0.9^{20} + \binom{20}{1} 0.1^1 \cdot 0.9^{19} \approx 0.3917$$

<u>Urval 2:</u>

$A_2 = P(c_1 < d_1 < r_1 \text{ och } d_1 + d_2 \le c_2) = P(1 < d_1 < 5 \text{ och } d_1 + d_2 \le 4)$

där d_2 approximeras med $Bin(n_2, p) = Bin(40, 0.1)$.

Alltså gäller följande:

$A_2 = P(d_1 = 2) \cdot P(d_2 \le 2) + P(d_1 = 3) \cdot P(d_2 \le 1) + P(d_1 = 4) \cdot P(d_2 = 0) =$

$$= \binom{20}{2} 0.1^2 \cdot 0.9^{18} \cdot \left[\binom{40}{0} 0.1^0 \cdot 0.9^{40} + \binom{40}{1} 0.1^1 \cdot 0.9^{39} + \binom{40}{2} 0.1^2 \cdot 0.9^{38} \right] +$$

$$+ \binom{20}{3} 0.1^3 \cdot 0.9^{17} \cdot \left[\binom{40}{0} 0.1^0 \cdot 0.9^{40} + \binom{40}{1} 0.1^1 \cdot 0.9^{39} \right] +$$

$$+ \binom{20}{4} 0.1^4 \cdot 0.9^{16} \cdot \left[\binom{40}{0} 0.1^0 \cdot 0.9^{40} \right] \approx 0.0802$$

Detta ger:

$$AOQ(0.1) = \frac{N - n_1}{N} pA_1 + \frac{N - n_1 - n_2}{N} pA_2 =$$

$$= \frac{1000 - 20}{1000} \cdot 0.1 \cdot 0.3917 + \frac{1000 - 20 - 40}{1000} \cdot 0.1 \cdot 0.0802 \approx 0.0459$$

2.22 En grossist köper in partier med 1 000 reservdelar. Anta att han vill jämföra den genomsnittliga kontrollomfattningen för två provtagningsplaner: en enkel och en dubbel. Han väljer den enkla planen $n = 50$ och $c = 1$ och den dubbla planen $n_1 = 30$, $n_2 = 60$, $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ och $r_1 = r_2 = 3$. Hjälp honom att genomföra de beräkningar han behöver för ett parti där felkvoten är 2 %.

Uppgift 2.22:

<u>Enkel provtagningsplan</u> $n = 50 \quad c = 1 \quad p = 0.02 \quad N = 1\,000$

$$L(p) = P(d_1=0) + P(d_1=1) = \binom{20}{0} 0.02^0 \cdot 0.98^{20} + \binom{20}{1} 0.02^1 \cdot 0.98^{19} \approx 0.6676 +$$

$$+ 0.2725 = 0.9401$$

$$ATI = 50 \cdot 0.9401 + 1\,000\,(1 - 0.9401) = 106.905$$

fortsättning, uppgift 2.22:

Dubbel provtagningsplan $n_1 = 30$ $n_2 = 60$ $c_1 = 0$ $c_2 = 2$ $r_1 = r_2 = 3$ $p = 0.02$
$N = 1000$

Urval 1: $P(d_1=0) = \binom{30}{0} 0.02^0 \cdot 0.98^{30} \approx 0.5455$

$$P(d_1=1) = \binom{30}{1} 0.02^1 \cdot 0.98^{29} \approx 0.3340$$

$$P(d_1=2) = \binom{30}{2} 0.02^2 \cdot 0.98^{28} \approx 0.0988$$

Urval 2: $P(d_2=0) = \binom{60}{0} 0.02^0 \cdot 0.98^{60} \approx 0.2976$

$$P(d_2=1) = \binom{60}{1} 0.02^1 \cdot 0.98^{59} \approx 0.3644$$

$$A_2 = P(d_1=1 \cap d_2=0) + P(d_1=1 \cap d_2=1) + P(d_1=2 \cap d_2=0) \approx 0.3340 \cdot 0.2976 + 0.3340 \cdot 0.3644 + 0.0988 \cdot 0.2976 = 0.2505$$

$$ATI = 30 \cdot 0.5455 + (30+60) \cdot 0.2505 + 1000\,(1 - 0.5455 - 0.2505) = 243$$

Uppgift 8, Tentamen 20160113

Antag att en företagare köper in ett parti med 5000 glödlampor. För att avgöra om partiet skall accepteras eller avvisas används en dubbel provtagningsplan som fungerar på följande vis: I urval 1 kontrolleras 30 glödlampor. Om antalet defekta glödlampor i urval 1 är mindre än eller lika med 2 så accepteras partiet. Om antalet defekta glödlampor är större än eller lika med 5 så avvisas partiet. I övriga fall så går man till urval 2. I urval 2 kontrolleras 30 nya glödlampor. Om det totala antalet defekta glödlampor i urval 1 och 2 är mindre än eller lika med 4 så accepteras partiet. Annars avvisas partiet. Med andra ord, man har en dubbel provtagningsplan med parametrar $n_1 = 30, n_2 = 30, c_1 = 2, c_2 = 4, r_1 = 5, r_2 = 5$. Antag nu att felkvoten i partiet är *0.1*. Antag också att om partiet avvisas av den dubbla provtagningsplanen så kontrollerar man alla glödlamporna i partiet. Beräkna väntevärde och varians för antalet kontrollerade glödlampor. (Kom ihåg att väntevärdet går under benämningen *ATI(0.1)*). Motivera eventuella approximationer du gör.

Låt ξ_i vara den stokastiska variabel som anger antalet defekta i urval $i=1,2$.

Väntevärde för antal kontrollerade glödlampor $=$ $ATI(p) = \mathbb{E}[\text{kontrollstorlek}] = n_1\mathbb{P}(\xi_1 \leq c_1) + (n_1 + n_2)\mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 \leq c_2 \cap \xi_1 > c_1) + N\mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 \geq r)$.

$$\mathbb{P}(\xi_1 \leq c_1) = \mathbb{P}(\xi_1 = 0) + \mathbb{P}(\xi_1 = 1) + \mathbb{P}(\xi_1 = 2) = \binom{30}{0} 0.1^0 \cdot 0.9^{30}$$

$$+ \binom{30}{1} 0.1^1 \cdot 0.9^{29} + \binom{30}{2} 0.1^2 \cdot 0.9^{28} = 41.14\%$$

$$\mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 \leq c_2 \cap \xi_1 > c_1) = \mathbb{P}(\xi_2 = 0 | \xi_1 = 3)\mathbb{P}(\xi_1 = 3)$$

$$+ \mathbb{P}(\xi_2 = 1 | \xi_1 = 3)\mathbb{P}(\xi_1 = 3) + \mathbb{P}(\xi_2 = 0 | \xi_1 = 4)\mathbb{P}(\xi_1 = 4)$$

$$= \binom{30}{0} 0.1^0 \cdot 0.9^{30} \binom{30}{3} 0.1^1 \cdot 0.9^{27}$$

$$+ \binom{30}{1} 0.1^1 \cdot 0.9^{29} \binom{30}{3} 0.1^3 \cdot 0.9^{27}$$

$$+ \binom{30}{0} 0.1^0 \cdot 0.9^{30} \binom{30}{4} 0.1^4 \cdot 0.9^{26} = 5.087\%$$

$$\mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 \geq r) = 1 - 41.14\% - 5.087\% = 53.77\%$$

$$\begin{aligned} ATI(p) &= n_1\mathbb{P}(\xi_1 \leq c_1) + (n_1 + n_2)\mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 \leq c_2 \cap \xi_1 > c_1) \\ &+ N\mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 \geq r) = 30 \cdot 0.4114 + 60 \cdot 0.0509 \\ &+ 5000 \cdot 0.5377 = 2703.9 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Var(kontrollstorlek) &= \mathbb{E}[kontrollstorlek^2] - \mathbb{E}[kontrollstorlek]^2 \\
&= 30^2 \cdot 0.4114 + 60^2 \cdot 0.0509 + 5000^2 \cdot 0.5377 - 2703.9^2 \\
&= 6.132 \cdot 10^6 \\
\text{Std}(kontrollstorlek) &= \sqrt{Var(kontrollstorlek)} = 2476
\end{aligned}
$$

Stor variation!