Styrande kontroll

Hittills: Acceptanskontroll – kontrollera producerade enheter för att garantera kvalitet på ett ekonomiskt sätt

Styrande kontroll

Vill avgöra om tillverkningsprocess (med hög kvalitet) har förändrats.

Kvalitéten kan bli samre men också bättre över tid (oavsett vill man upptäcka det). Orsaker: materialval, mänskligt fel, temperatur, medveten justering etc.

Två sorters variation;

Systematisk variation:

Beror på att ngt ändrats i processen
⇒ fördelningen för en mätkvantitet på enheterna förändras efter en tidpunkt $t \geq 0$. Typiskt delar man upp analysen av sådana förändringar i förändringen i väntevärd och varians. (Går att kontrollera och vill vi kan man för så att vi kan justera)

Naturlig variation:

Naturligt förekommande variation som gör att två enheter blir olika under en period utan systematiska variationsförändringar. (oundviklig)

Ingen systematisk variation ⇒ "statistisk kontroll"

Mål: Skapa provplan för att uppfatta om processen är under statistisk kontroll eller ej

Kvalitetsindikator: det vi mäter hos enheterna
↳ kan vara både kvalitativ och kvantitativ

För kvantitativa: Medelvärdesdiagram

$\boxed{\text{Slide 1-5}}$

Antar att det finns värden på μ och σ

Antagande för medelvärdesdiagram: Varje $\overline{X}_i$ är normalförd, vilket är rimligt eftersom medelvärden är (approx.) normalfördelade enligt CGS.

Notera: $\mathbb{P}\left(|\overline{X}_i| \leq \mu + \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{\overline{X}_i - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \leq 3\right) = \Phi(3) - \Phi(-3)$

$= \Phi(3) - (1 - \Phi(3)) = 2\Phi(3) - 1 = 2 \cdot 0{,}9987 - 1 = 0{,}9974$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\text{hamna utanför styrgränserna}) = 0.0026 = 0.26\%$

Namnet "6 sigma" kommer härifrån.

Slh för falsklarm under stat. kontroll

$\text{ARL} = \frac{1}{\mathbb{P}(\text{larm i första punkten efter systemförändring})}$

Förväntat antal "tidpunkter" innan vi går utanför styrgränserna (larm ges).

(Väntevärdet hos en s.k. geometrisk fördeln.)

Gen insikter kring falsklarm. $\overline{X}_i \sim N(\cdot,\cdot) \Rightarrow \text{ARL} = \frac{1}{0.0026} \approx 385$

Vi har hanterat μ och σ som kända.

Förv. falsklarm i snitt var 385:e provtagn under stat. kontroll

När vi har fått ett larm stoppas processen och den justeras. När processen startas måste styrgränserna, $S_u = CL - \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$ och $S_ö = CL + \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$, samt centrallinjen $CL = \mu$ uppdateras.

Tillverkningen startas och man tar $20 \leq n \leq 40$ provgrupper ("för-prover") $X_i = \{X_{i1}, \ldots, X_{in}\}$ och beräknar medelvärdet $\bar{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ och standardavvikelse $s_i = \left(\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2\right)^{1/2}$, alternativt variationsbredden $R_i = \max_{j=1,\ldots,n} x_{ij} - \min_{j=1,\ldots,n} x_{ij}$, för varje provgrupp $i=1,\ldots,n$.

$CL = \mu$ skattas med $\hat{\mu} = \bar{\bar{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i$

σ skattas med $\hat{\sigma} = \frac{\bar{s}}{c_4} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s_i}{c_4}$ alternativt

$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i}{d_2}$ Tabell sid. 179 $\boxed{\text{Se slides}}$

$\Rightarrow S_{\ddot{o}} = \mu + \frac{3\sigma}{\sqrt{n}} \approx \bar{\bar{x}} + \frac{3\bar{s}}{c_4\sqrt{n}} = \bar{\bar{x}} + A_3\bar{s}$, $S_u \approx \bar{\bar{x}} - A_3\bar{s}$

$S_{\ddot{o}} = \mu + \frac{3\sigma}{\sqrt{n}} \approx \bar{\bar{x}} + \frac{3\bar{R}}{d_2\sqrt{n}} = \bar{\bar{x}} + A_2\bar{R}$, $S_u \approx \bar{\bar{x}} - A_2\bar{R}$ olika altern.

Medelvärdesdiagram: om kommande $\bar{x}_i$ hamnar utanför $[S_u, S_{\ddot{o}}]$ så är processen inte längre under statistisk kontroll.

$\boxed{\text{Exempel 3.2}}$

- Om den slumpmässiga variationen är för stor kan vi få dåliga produkter.
- $\Rightarrow$ Vi måste komplettera medelvärdesdiagrammet med ett diagram för den naturliga spridningen.

<u>R-diagram</u> (variationsbredden hos kvalitetsindikatorn):

$S_{\ddot{o}} = D_2\sigma \approx D_4\bar{R}$ ← skattning ovan

$D_1 - D_4$: Tabell sid. 179

$S_u = D_1\sigma \approx D_3\bar{R}$

$CL = \bar{R}$

om σ känd

Detta används när $\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$ i medelvärdesdiagrammet.

S-diagram

$S_{\bar{o}} = B_6 \sigma \approx B_4 \bar{s}$

$S_u = B_5 \sigma \approx B_3 \bar{s}$ $\quad B_3 - B_6$: Tabell sid. 179

$CL = \bar{s}$

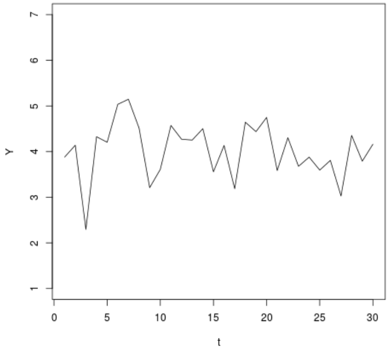
Detta används när $\hat{\sigma} = \frac{\bar{s}}{c_4}$ i medelvärdesdiagr.

Allmän rekommendation: Använd $\bar{R}$-baserade diagram när n är litet, säg 10 eller mindre, och $\bar{s}$-baserade diagram annars.

$\boxed{\text{Exempel 3.3, 3.4}}$

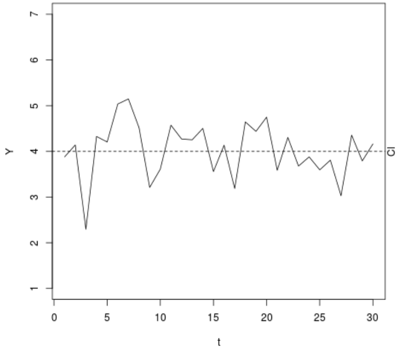
Medelvärdesdiagram

Tag med jämna mellanrum och plocka ut n:st enheter och mät kvalitetsindikatorn hos dem. Från de uppmätta värdena, $\{x_{ij}\}$, beräknas ett stickprovsmedelvärde, $\bar{X}_i$.



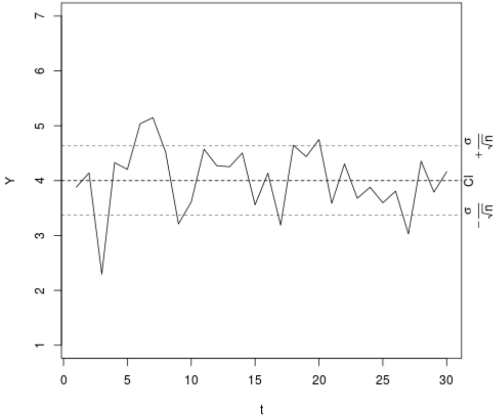
Figur: Graf av $\bar{X}_i$ uppmätta vid 30 olika tider.

Då vi vet att processen var under statistisk kontroll när vi startade den styrande kontrollen så räknade vi då ut ett mått för väntevärdet av datan, μ. Vi kan dra en horisontell linje i diagrammet vid detta värde (centrallinjen, Cl).



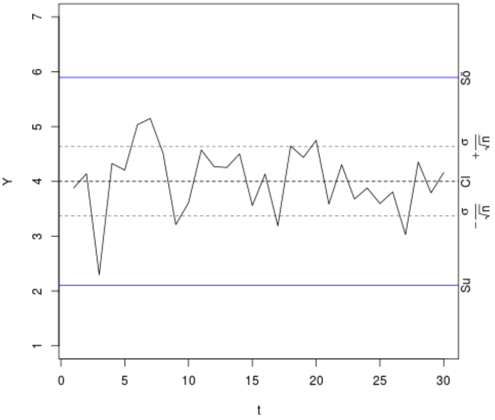
Figur: Graf av $\bar{X}_i$ och centrallinjen.

På samma sätt så räknade vi under statistisk kontroll ut standardavvikelsen, σ.

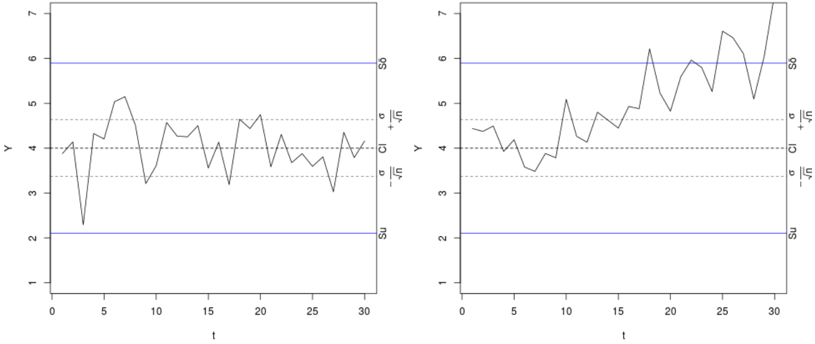


Figur: Graf av $\bar{X}_i$, centrallinjen och standardavvikelserna.

Definiera övre- och undre- styrgränser. $Sö = Cl + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ och $Su = Cl - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. (även kallat kontrollgränser, Kö/Ku, på tidigare tentor)



Figur: Graf av $\bar{X}_i$, centrallinjen och standardavvikelserna.

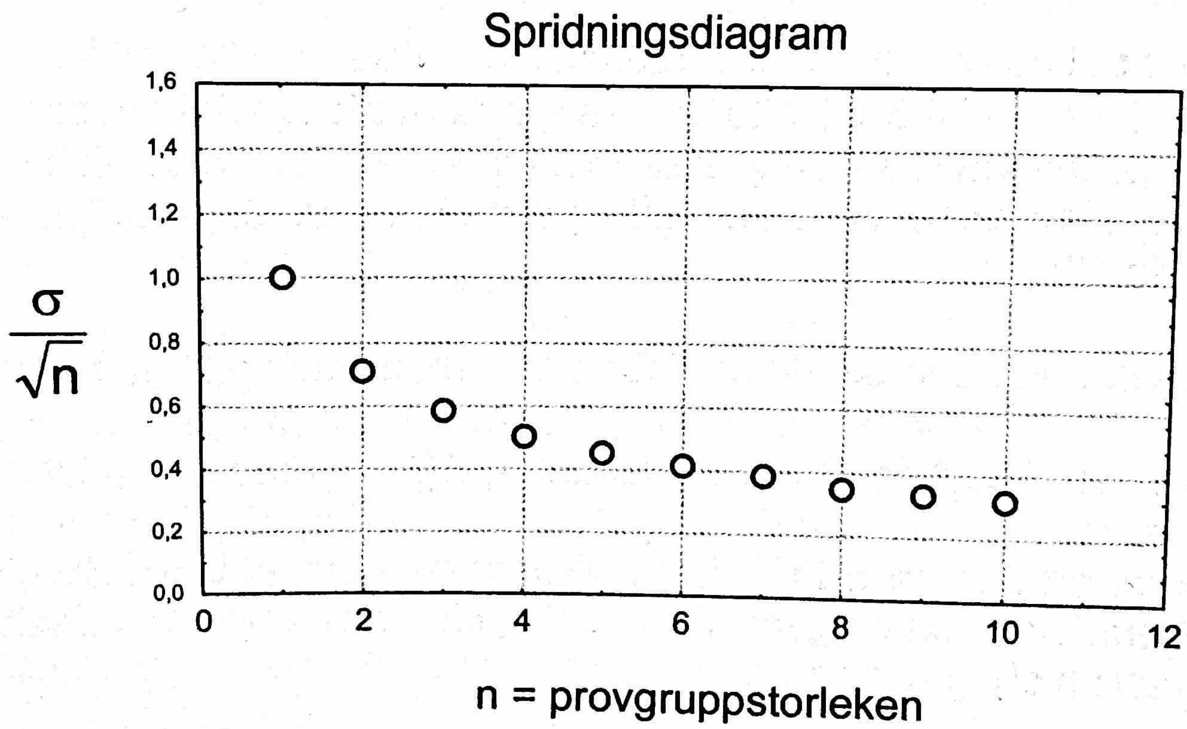


(a) Naturlig variation. (b) Systematisk variation.

Alltså: Om $\bar{X}_i$ går utanför styrgränsen så drar man slutsatsen att medelvärdet för kvalitetsindiktorn har förändrats i styrprocessen.

n	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	n	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
1	σ	6	0.41σ
2	0.71σ	7	0.38σ
3	0.58σ	8	0.35σ
4	0.50σ	9	0.33σ
5	0.45σ	10	0.32σ

För åskådlighetens skull ritas tabellvärdena över $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ in i nedanstående figur.



Kostnaden för att göra fler än 5 mätningar anses sällan befogad.

Tabell: Tabell för konstanter relaterade till styrdiagrammen. Finns på sidan 117 i boken.

n	$\bar{x}$-diagram		s-diagram					R-diagram				
	A_2	A_3	c_4	B_3	B_4	B_5	B_6	d_2	D_1	D_2	D_3	D_4
2	1.88	2.66	.80	0	3.27	0	2.61	1.13	0	3.69	0	3.27
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Vi ser en del andra konstanter som vi ännu inte diskuterat.

Exempel 3.2

Vid en kvalitetskontroll togs fem prover vid varje provtillfälle. Varje prov kontrollerades genom mätning av provets pH-värde. Mätvärdena avrundades till en decimals noggrannhet. Vid 20 olika tillfällen fick man följande värden. I tabellen har standardavvikelserna avrundats till två decimaler. Inga avrundade värden har använts vid beräkning av styrgränser där skattning av processens standardavvikelse uppskattades med hjälp av provgruppernas variationsbredder.

Prov-grupp nr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	6.9	7.2	7.2	6.4	7.0	7.3	7.0	7.1	6.9	6.5
	7.1	7.1	7.2	7.0	6.9	7.1	7.0	7.2	6.8	7.1
	7.1	7.1	7.2	7.4	7.0	7.4	7.0	7.2	6.8	6.6
	7.0	7.0	7.2	6.8	7.1	7.0	7.0	7.2	6.9	7.6
	6.9	7.1	7.2	6.9	7.0	7.2	7.0	7.3	7.1	7.2
$\bar{x}$	7.0	7.1	7.2	6.9	7.0	7.2	7.0	7.2	6.9	7.0
R	0.2	0.2	0	1.0	0.2	0.4	0.0	0.2	0.3	1.1
s	0.10	0.07	0.00	0.36	0.07	0.16	0.00	0.12	0.07	0.45

Prov-grupp nr	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	6.8	7.0	7.1	7.1	6.9	7.0	7.2	6.8	6.9	6.6
	6.8	7.0	7.1	7.0	6.9	6.9	7.2	7.2	7.0	7.3
	7.1	7.1	7.1	7.3	6.9	7.0	7.2	6.9	6.8	7.1
	6.9	6.8	7.1	6.9	6.9	7.0	7.2	7.3	6.9	6.4
	6.9	7.1	7.1	7.2	6.9	7.1	7.2	7.3	6.9	7.1
$\bar{x}$	6.9	7.0	7.1	7.1	6.9	7.0	7.2	7.1	6.9	6.9
R	0.3	0.3	0.0	0.4	0.0	0.2	0.0	0.5	0.2	0.9
s	0.12	0.12	0.00	0.16	0.00	0.07	0.00	0.23	0.07	0.38

a) Rita in observationerna i två $\bar{x}$-diagram där σ uppskattas med hjälp av R respektive s.

b) Är processen under statistisk kontroll? Motivera ditt svar.

Lösning: Varje urval innehåller fem observationer.

a) Från de 20 urvalen uppskattades processens genomsnittsvärde till $\bar{\bar{x}} = 7.03$. Motsvarande spridning blev $\bar{R} = 0.32$ och $\bar{s} \approx 0.1283$. För $\bar{x}$-diagrammet erhålls följande styrgränser, om $\bar{R}$ används:

$$n = 5 \;\Rightarrow\; A_2 = 0.577$$

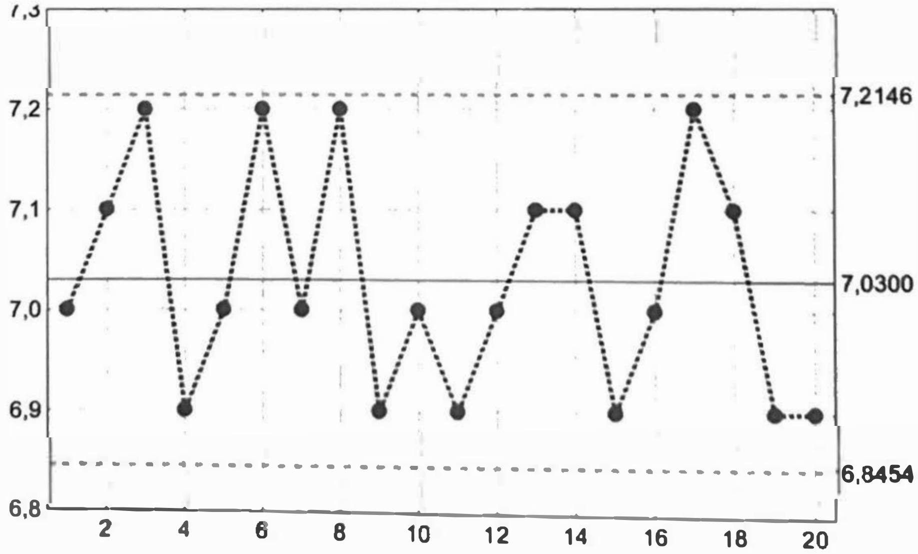
Konstanter för konstruktion av vissa kontrolldiagram

Prov-gruppsstorlek, n	$\bar{x}$-diagram		s-diagram					R-diagram				
	A_2	A_3	c_4	B_3	B_4	B_5	B_6	d_2	D_1	D_2	D_3	D_4
2	1.880	2.659	0.7979	0	3.267	0	2.606	1.128	0	3.686	0	3.267
3	1.023	1.954	0.8862	0	2.568	0	2.776	1.693	0	4.358	0	2.575
4	0.729	1.628	0.9213	0	2.266	0	2.088	2.059	0	4.698	0	2.282
5	0.577	1.427	0.9400	0	2.089	0	1.964	2.326	0	4.918	0	2.115
6	0.483	1.287	0.9515	0.030	1.970	0.029	1.874	2.534	0	5.078	0	2.004
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

$$S_ö = \bar{\bar{x}} + A_2 \cdot \bar{R} = 7.03 + 0.577 \cdot 0.32 \approx 7.2146$$
$$CL = \bar{\bar{x}} = 7.03$$
$$S_u = \bar{\bar{x}} - A_2 \cdot \bar{R} = 7.03 - 0.577 \cdot 0.32 \approx 6.8454$$

Diagrammet blir enligt följande

Medelvärdesdiagram

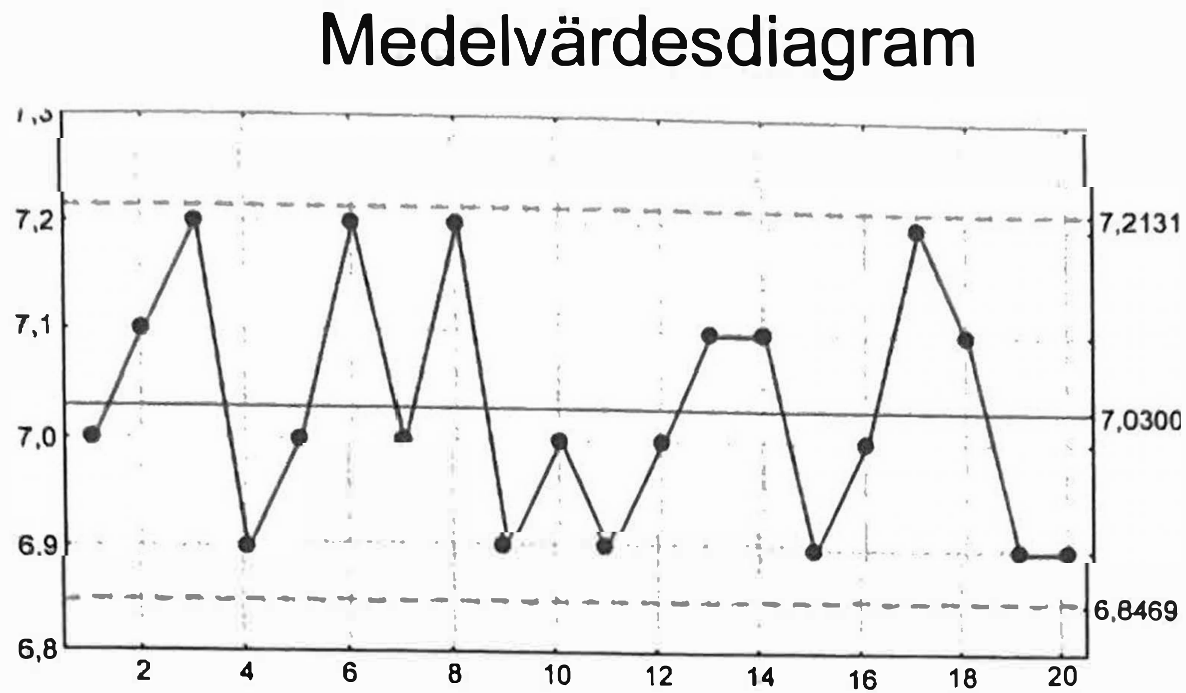


För $\bar{x}$-diagrammet får man följande styrgränser, om $\bar{s}$ används:

$n = 5 \;\Rightarrow\; A_3 = 1.427$

$$S_ö = \bar{\bar{x}} + A_3 \cdot \bar{s} = 7.03 + 1.427 \cdot 0.1283 \approx 7.2131$$
$$CL = \bar{\bar{x}} = 7.03$$
$$S_u = \bar{\bar{x}} - A_2 \cdot \bar{s} = 7.03 - 1.427 \cdot 0.1283 \approx 6.8469$$

Om $\bar{s}$ används vid beräkning av styrgränserna, får diagrammet följande utseende



Vi ser att det inte blir någon större skillnad mellan resultaten av de båda skattnings-metoderna, vilket är logiskt.

b) Eftersom alla värden i $\bar{x}$-diagrammet ligger mellan styrgränserna verkar processen vara under statistisk kontroll. Vi vet emellertid att denna slutsats kan vara felaktig eftersom vi inte har tillgång till något spridningsdiagram som visar den naturliga variationen.

Exempel 3.3
Vid kontroll av en produkt tar man med jämna mellanrum ut en provgrupp, som består av fyra enheter. Vid ett tillfälle har processen stoppats för justering. Man behöver nu räkna ut nya styrgränser. Man tar därför slumpmässigt ut 20 nya provgrupper och beräknar medelvärde och variationsbredd i varje provgrupp. Resultatet från de 20 provgrupperna finns i nedanstående schema.

Prov-grupp nr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	72	56	55	44	97	83	47	88	57	13
	84	87	73	80	26	89	66	50	47	10
	79	33	22	54	48	91	53	84	41	30
	49	42	60	74	58	62	58	69	46	32
$\bar{x}$	71.00	54.50	52.50	63.00	57.25	81.25	56.00	72.75	47.75	21.25
R	35	54	51	36	71	29	19	38	16	22

Prov-grupp nr	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	26	46	49	71	71	67	55	49	72	61
	39	7	62	63	58	69	63	51	80	74
	52	63	78	82	69	70	72	55	61	62
	48	34	87	55	70	94	49	76	59	57
$\bar{x}$	41.25	37.50	69.00	67.75	67.00	75.00				
R	26	56	38	27	13	27				

a) Av någon anledning har beräkningarna för provgrupperna 17 – 20 fallit bort. Hjälp personalen på kvalitetsavdelningen att beräkna medelvärden och variationsbredder för dessa provgrupper.
b) Använd ovanstående uppgifter till att beräkna nya styrgränser för processen och rita in gränserna och observationerna i lämpliga diagram.
c) Är processen under statistisk kontroll? Vilka justeringar av styrgränserna kan/får göras, om processen inte är under statistisk kontroll?

Lösning:

a) I de fyra sista provgrupperna har varken medelvärdena eller variationsbreddema beräknats. Nedanstående tabell visar de framräknade värdena. För grupp 17 visas dessutom hur dessa värden har beräknats.

Grupp 17: $\bar{x} = \frac{55+63+72+49}{4} = 59.75$ och $R = x_{max} - x_{min} = 72 - 49 = 23$

Provgrupp nr	17	18	19	20
$\bar{x}$	59.75	57.75	68.00	63.50
R	23	27	21	17

b) För att bestämma styrgränserna i diagrammen beräknas först medelvärdet av medelvärdena och medelvärdet av variationsbredderna:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{20}(71.0 + 54.5 + 52.5 + \ldots\ldots\ldots + 57.75 + 68.0 + 63.5) = 59.1875$$

$$\bar{R} = \frac{1}{20}(35 + 54 + 51 + \ldots\ldots\ldots + 27 + 21 + 17) = 32.3$$

Styrgränser i medelvärdesdiagrammet är uträknade enligt följande:

$$\bar{\bar{x}} \pm A_2 \cdot \bar{R} \quad \text{där} \quad n = 4 \Rightarrow A_2 = 0.729$$

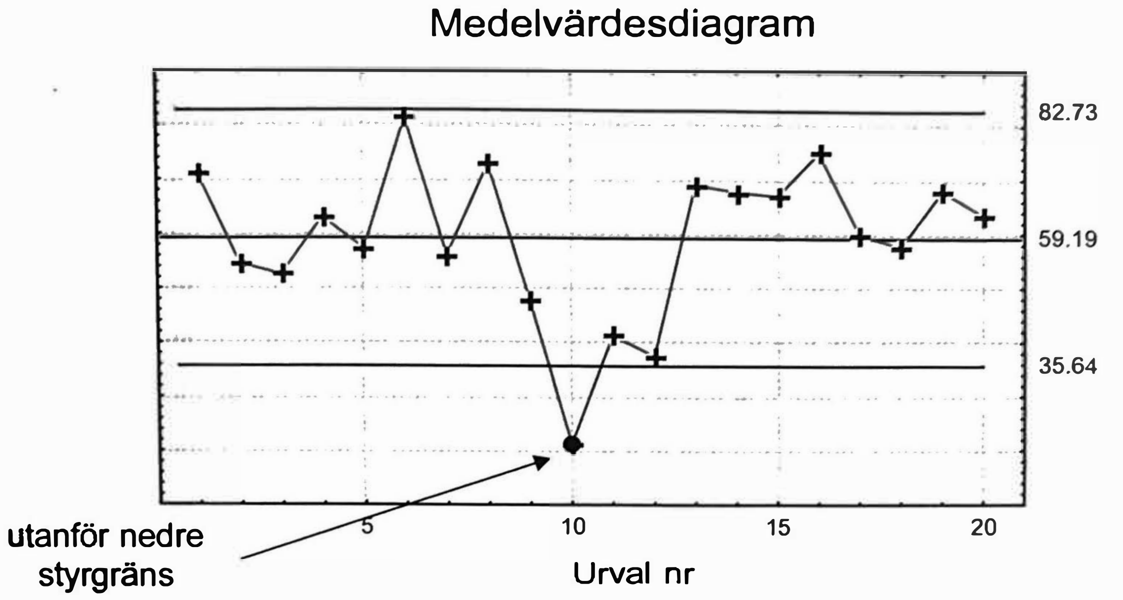
Konstanter för konstruktion av vissa kontrolldiagram

Prov-grupps-storlek, n	$\bar{x}$-diagram		s-diagram					R-diagram				
	A_2	A_3	c_4	B_3	B_4	B_5	B_6	d_2	D_1	D_2	D_3	D_4
2	1.880	2.659	0.7979	0	3.267	0	2.606	1.128	0	3.686	0	3.267
3	1.023	1.954	0.8862	0	2.568	0	2.776	1.693	0	4.358	0	2.575
4	0.729	1.628	0.9213	0	2.266	0	2.088	2.059	0	4.698	0	2.282
5	0.577	1.427	0.9400	0	2.089	0	1.964	2.326	0	4.918	0	2.115

$S_ö = 59.1875 + 0.729 \cdot 32.3 = 82.7342$

$CL = 59.1875$

$S_u = 59.1875 - 0.729 \cdot 32.3 = 35.6408$



Styrgränser och centrallinje i R-diagrammet blir:

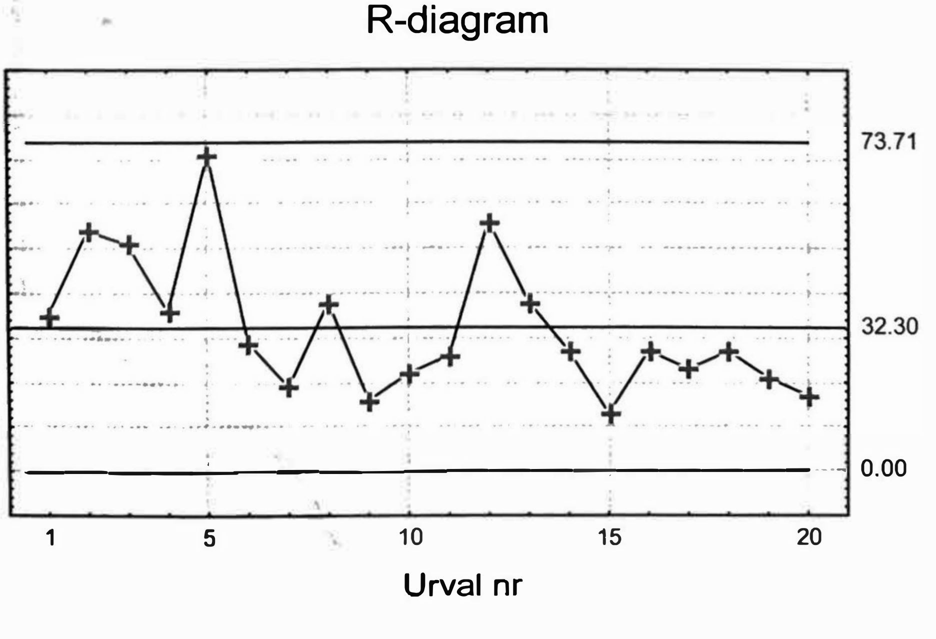
$S_ö = D_4 \cdot \overline{R} = 2.282 \cdot 32.3 = 73.7086$

$CL = \overline{R} = 32.3$

$S_u = D_3 \cdot \overline{R} = 0.00$

Värdena på D_3 och D_4 visas i tabellen på nästa sida

R-diagrammet får följande utseende:



$n = 4 \quad \Rightarrow \quad D_3 = 0$ och $D_4 = 2.282$

Konstanter för konstruktion av vissa kontrolldiagram

Prov-grupps-storlek, n	$\bar{x}$-diagram		s-diagram					R-diagram					
	A_2	A_3	c_4	B_3	B_4	B_5	B_6	d_2	D_1	D_2	D_3	D_4
2	1.880	2.659	0.7979	0	3.267	0	2.606	1.128	0	3.686	0	3.267
3	1.023	1.954	0.8862	0	2.568	0	2.776	1.693	0	4.358	0	2.575
4	0.729	1.628	0.9213	0	2.266	0	2.088	2.059	0	4.698	0	2.282
5	0.577	1.427	0.9400	0	2.089	0	1.964	2.326	0	4.918	0	2.115
6	0.483	1.287	0.9515	0.030	1.970	0.029	1.874	2.534	0	5.078	0	2.004
7	0.419	1.182	0.9594	0.118	1.882	0.113	1.806	2.704	0.205	5.203	0.076	1.924

c) I medelvärdesdiagrammet ser vi att processen inte är under statistisk kontroll. Medelvärdet som härrör från provgrupp 10 hamnar under nedre styrgräns. Även R-diagrammet studeras för att se om någon annan provgrupp har värden som hamnar utanför någon av styrgränserna.

I R-diagrammet ser vi ingenting av det problem som visade sig i $\bar{x}$-diagrammet. Men det räcker att en enda punkt i något av diagrammen ligger utanför en styrgräns för att processen inte skall vara i statistisk jämvikt. Vi går givetvis tillbaka till provgrupp 10 och ser efter vad som kan ha orsakat de erhållna värdena. Det kan ju finnas någon naturlig orsak såsom ovan personal, nytt råmaterial eller felinställd maskin. I så fall tar man bort den aktuella punkten och räknar om styrgränserna med hjälp av de resterande 19 punkterna. Om man inte finner någon påtaglig orsak, behåller man de framräknade styrgränserna. Det kan ju trots allt förekomma värden som av slumpen hamnar utanför gränserna även om processen egentligen är under statistisk kontroll. Sannolikheten för detta är visserligen inte stor, men den existerar. De framräknade styrgränserna används fortsättningsvis för att avgöra om tillverkningsprocessen är under statistisk kontroll eller inte.

Exempel 3.4
Vid kontroll av en produkt tar man med jämna mellanrum ut en provgrupp som består av fyra enheter. Vid ett tillfälle har processen stoppats för justering. Man behöver nu räkna ut nya styrgränser. Man tar därför 20 nya provgrupper och beräknar medelvärde och standardavvikelse i varje provgrupp. Resultatet från de 20 provgrupperna finns i nedanstående schema.

Prov-grupp nr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	72	56	55	44	97	83	47	88	57	13
	84	87	73	80	26	89	66	50	47	10
	79	33	22	54	48	91	53	84	41	30
	49	42	60	74	58	62	58	69	46	32
$\bar{x}$	71.00	54.50	52.50	63.00	57.25	81.25	56.00	72.75	47.75	21.25
s	15.47	23.64	21.70	16.85	29.68	13.28	8.04	17.23	6.70	11.35

Prov-grupp nr	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	26	46	49	71	71	67	55	49	72	61
	39	7	62	63	58	69	63	51	80	74
	52	63	78	82	69	70	72	55	61	62
	48	34	87	55	70	94	49	76	59	57
$\bar{x}$	41.25	37.50	69.00	67.75	67.00	75.00				
s	11.53	23.56	16.87	11.53	6.06	12.73				

a) Av någon anledning har beräkningarna för provgrupperna 17 – 20 fallit bort. Hjälp personalen på kvalitetsavdelningen att beräkna medelvärden och standardavvikelser för dessa provgrupper.
b) Använd ovanstående uppgifter till att beräkna nya styrgränser för processen och rita in gränserna och observationerna i lämpliga diagram.
c) Är processen under statistisk kontroll? Vilka justeringar av styrgränserna kan/får göras, om processen inte är under statistisk kontroll?

Lösning:

a) I de fyra sista provgrupperna har varken medelvärdena eller standardavvikelserna beräknats. Nedanstående tabell visar de framräknade värdena. För grupp 17 visas dessutom hur dessa värden har beräknats.

Provgrupp nr	17	18	19	20
$\bar{x}$	59.75	57.75	68.00	63.50
s	9.98	12.42	9.83	7.33

Grupp 17: $\bar{x} = \dfrac{55+63+72+49}{4} = 59.75$

$$s = \sqrt{\frac{(55^2+63^2+72^2+49^2) - \dfrac{(55+63+72+49)^2}{4}}{4-1}} \approx 9.979$$

b) Först beräknas medelvärdet av medelvärdena och medelvärdet av standard-avvikelserna.

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{20}(71.0 + 54.5 + 52.5 + \ldots\ldots\ldots + 57.75 + 68.0 + 63.5) = 59.1875$$

$$\bar{s} = \frac{1}{20}(15.47 + 23.64 + 21.70 + \ldots\ldots. + 12.42 + 9.83 + 7.33) \approx 14.289$$

Styrgränser och centrallinje i medelvärdesdiagrammet beräknas med hjälp av följande formel:

$$\bar{\bar{x}} \pm A_3 \cdot \bar{s} \quad \text{där} \quad n = 4 \Rightarrow A_3 = 1.628$$

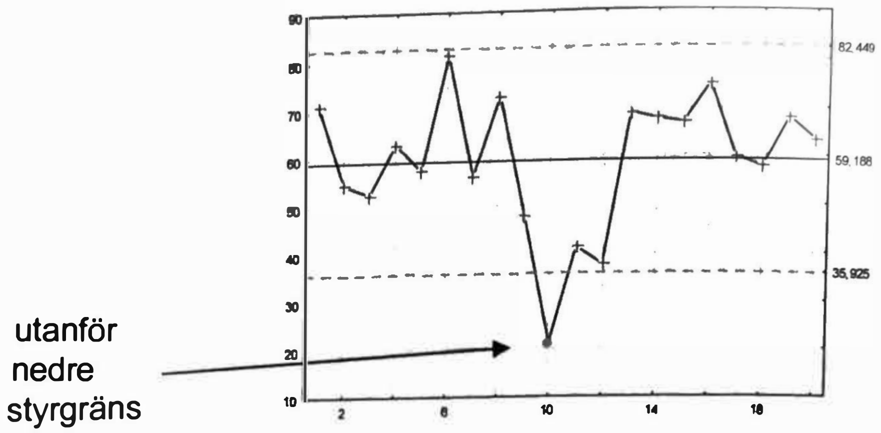
Konstanter för konstruktion av vissa kontrolldiagram

Prov-grupps-storlek, n	$\bar{x}$-diagram		s-diagram					R-diagram				
	A_2	A_3	c_4	B_3	B_4	B_5	B_6	d_2	D_1	D_2	D_3	D_4
2	1.880	2.659	0.7979	0	3.267	0	2.606	1.128	0	3.686	0	3.267
3	1.023	1.954	0.8862	0	2.568	0	2.776	1.693	0	4.358	0	2.575
4	0.729	1.628	0.9213	0	2.266	0	2.088	2.059	0	4.698	0	2.282
5	0.577	1.427	0.9400	0	2.089	0	1.964	2.326	0	4.918	0	2.115
6	0.483	1.287	0.9515	0.030	1.970	0.029	1.874	2.534	0	5.078	0	2.004
7	0.419	1.182	0.9594	0.118	1.882	0.113	1.806	2.704	0.205	5.203	0.076	1.924
8	0.373	1.099	0.9650	0.185	1.815	0.179	1.751	2.847	0.387	5.307	0.136	1.864
9	0.337	1.032	0.9693	0.239	1.761	0.232	1.707	2.970	0.546	5.394	0.184	1.816

De framräknade styrgränserna och centrallinjen blir enligt nedanstående.

$S_ö = 59.1875 + 1.628 \cdot 14.289 = 82.449$
CL = 59.1875
$S_u = 59.1875 - 1.628 \cdot 14.289 = 35.925$

medelvärdesdiagram



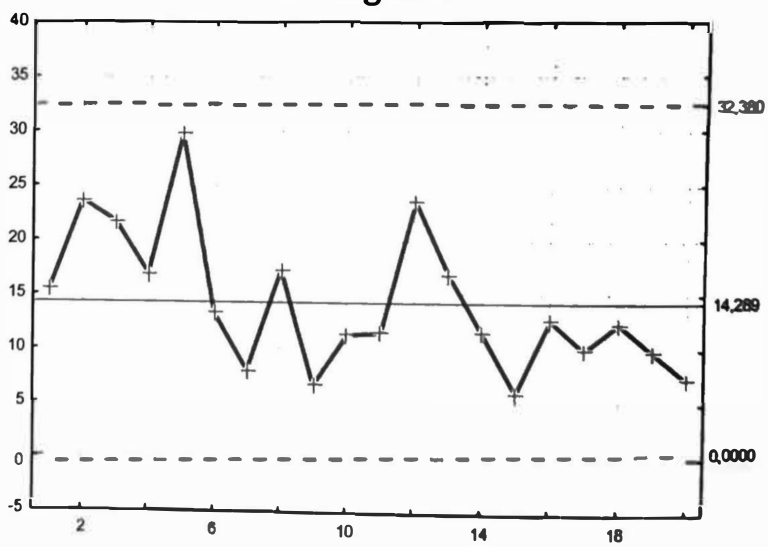
Styrgränser och centrallinje i s-diagrammet är uträknade enligt följande, där värdena på B_3 och B_4 är hämtade ifrån tabellen på sidan 179.

$B_3 \cdot \bar{s}$ och $B_4 \cdot \bar{s}$ där $n = 4 \Rightarrow B_3 = 0$ och $B_4 = 2.266$

De framräknade styrgränserna och centrallinjen blir enligt nedanstående.

$S_ö = 2.266 \cdot 14.289 \approx 32.379$
$CL = 14.289$
$S_u = 0.00$

s-diagram



c) Ovanstående process är inte under statistisk kontroll. Urval 10 har ett medelvärde som understiger den nedre styrgränsen i $\bar{x}$-diagrammet. Diagrammet över spridningen har samma utseende som när vi används variationsbredden, R, som skattning av den naturliga variationen. Vad gäller korrigering av gränser om någon punkt ligger utanför styrgränserna, gäller samma regler som för $\bar{x}-R$-diagram.

Styrande diagram enligt attribut-metoden

Antag att vi har en kvalitativ (defekt/felfri) variabel.

D = # defekta i ett urval av n stycken är Bin(n, p) - fördelad

$E[D] = np$, $Var(D) = np(1-p)$

Om $np(1-p) > 10$ så gäller $D \overset{approx.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ där $\mu = np$, $\sigma^2 = np(1-p)$ => samma upplägg som för kvantit.

Notera att provgruppstorl. generellt sett behöver vara större här pga approx.

Använd nu samma kontrollgränser som i medelvärdesdiagrammet, fast μ och σ bestäms av n och p.

När p är okänd skattas den mha

$\hat{p} = \frac{d_1 + \ldots + d_k}{kn}$, där k = # provgrupper,

n = # kontrollerade i varje provgrupp,

d_j = # defekta i provgrupp j, $j = 1, \ldots, k$

Vi kan nu ekvivalent använda två sorters intervall: Felantalsdiagr. och felkvotsdiagr.

Felantalsdiagram (np-diagram)

p okänd:

$CL = n\hat{p}$

$S_ö = n\hat{p} + 3\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})}$

$S_u = \max\left(0, n\hat{p} - 3\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})}\right)$

Andelar kan ej vara negativa
$\Rightarrow$ Styrgränserna ej nödvändigtvis symmetriska kring CL

p känd:
Byt ut $\hat{p}$ mot p

Felkvotsdiagram (p-diagram)

Här fokuserar man på $\hat{p} = \frac{D}{n} \overset{\text{approx.}}{\sim} N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$ $np(1-p) > 10$

(Skalning av $N(\cdot,\cdot)$-fördelad stok. var. är $N(\cdot,\cdot)$-förd.)

p okänd:

$CL = \hat{p}$

$S_ö = \hat{p} + 3\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

$S_u = \max\left(0, \hat{p} - 3\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$

p känd:
Byt ut $\hat{p}$ mot p

Pga normalapprox. så gäller ej att slh för falsklarm är 0.0026 och detta gäller i synnerhet inte om $np(1-p)<10$. Risken varierar mycket med n och p.
Om $np(1-p)<10$ så kan man sätta $S_ö = np + k\sqrt{np(1-p)}$ och räkna ut $P(D>S_ö)$ m.h.a binomialförd. och nomogram (se exempel 3.6) för att finna konstanten $k>0$.

$\boxed{\text{Exempel 3.7}}$

Om antalet undersökta enheter ändras från gång till gång kan vi om $\hat{p}_i = \frac{\frac{d_i}{n_i} - \hat{p}}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n_i}}}$ faller utanför

$[S_u, S_ö] = [-3, 3]$ (se exempel 3.8).

Kan t.ex. ske pga att man alltid gör allkontroll och den dagliga produktionsmängden varierar.

Notera att detta blir samma som felkvotsdiag. om $n_i = n$ för alla i.

Diagram för antal defekter per enhet

Ibland räknar man antal fel per enhet, t.ex. antal bubblor på en lackerad bildörr (man vill kanske inte lackera om pga ngn enstaka bubbla).

Eftersom det teoretiskt sett kan finnas 0, 1, 2, ... fel (ingen övre teoretisk gräns) så modelleras # fel vid provuttag i m.h.a

$D_i \sim Poi(\lambda)$. Eftersom $E[D_i] = \lambda$ så får vi skattningen (snitt antal fel)

$$\hat{\lambda} = \hat{c} = \frac{c_1 + \ldots + c_k}{k}$$

där $k = \#$ provuttag, $c_i = \#$ påträffade defekta i provuttag i.

Om $\lambda > 15 \Rightarrow D_i \overset{appr.}{\sim} N(E[D_i], Var(D_i)) = N(\lambda, \lambda)$

Vi får <u>felantalsdiagrammet</u> (c-diag.)

$CL = \hat{c}$

$S_ö = \hat{c} + 3\sqrt{\hat{c}}$

$S_u = \max(0, \hat{c} - 3\sqrt{\hat{c}})$

Byt ut $\hat{c} = \hat{\lambda}$ mot $c = \lambda$ om känd.

Motsvarande <u>felandelsdiagram</u> (u-diag.):

$CL = \hat{u} = \frac{\hat{c}}{n}$

$S_ö = \hat{u} + 3\sqrt{\frac{\hat{u}}{n}}$

$S_u = \max(0, \hat{u} - 3\sqrt{\frac{\hat{u}}{n}})$

Byt ut $\hat{u}$ mot $u = \frac{c}{n} = \frac{\lambda}{n}$ om känd.

Pga assymmetrin hos både Poisson- och binomialfördeln. så är det inte lika sannolikt att hamna över som under CL för de diagram vi har tittat på under denna föreläsn.

Det gäller att om $\lambda \leq 9$ så kan man få falsklarm enbart vid $S_ö$.

Notera att pga normalapprox så kan risken för falsklarm avvika (markant) från 0.0026.

$\boxed{\text{Exempel 3.9}}$

Exempel 3.7
I en tillverkningsprocess tar man med jämna mellanrum ut 100 enheter och räknar antal defekta. Nedanstående data visar resultatet från 20 provgrupper. Använd dessa data till att beräkna styrgränser i ett felantalsdiagram och avgör med hjälp av gränserna om processen är under statistisk kontroll. I nedanstående tabell används nedanstående beteckningar.

n = antal undersökta enheter
d = antal defekta enheter bland dem som man har undersökt

Nr i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
d_i	10	4	6	12	6	8	10	12	8	7

Nr i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n_i	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
d_i	3	4	3	4	4	10	7	3	5	6

Lösning: I ovanstående problem har vi en okänd felkvot. Denna måste därför uppskattas med hjälp av de defekta enheterna i provgrupperna.

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{20} d_i}{\sum_{i=1}^{20} n_i} = \frac{10+4+6+12+......+5+6}{20 \cdot 100} = 0.066$$

Om vi använder ett diagram för *antalet* defekta enheter, får vi följande styrgränser

$S_ö = n\hat{p} + 3\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})} = 100 \cdot 0.066 + 3\sqrt{100 \cdot 0.066 \cdot 0.934} = 14.04$
$CL = n\hat{p} = 6.6$
$S_u = 0$ (eftersom $n\hat{p} - 3\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})} = 100 \cdot 0.0661 - 3\sqrt{100 \cdot 0.066 \cdot 0.934} = -0.8 < 0$)

I denna situation behöver vi inte rita upp kontrolldiagrammet. Det är enkelt att se att samtliga värden ligger inom styrgränserna, vilket innebär att processen är under statistisk kontroll. Om man använder samma provgruppsstorlek hela tiden, upplevs detta ofta som enklare av den enskilde användaren.

Om vi använder ett p-diagram för *andelen* defekta enheter, får vi följande styrgränser:

$S_ö = \hat{p} + 3\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0.066 + 0.0745 = 0.1404$
$CL = \hat{p} = 0.066$
$S_u = 0$ (eftersom $\hat{p} - 3\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0.066 - 0.0745 = -0.008 < 0$)

Exempel 3.8
I en tillverkningsprocess kontrollerar man dagens tillverkade enheter och räknar antalet defekta. Nedanstående data visar resultatet från 20 dagar. Använd dessa data till att rita ett vanligt felkvotsdiagram och ett kontrolldiagram som använder normerade felkvoter. Avgör med hjälp av dessa om processen är under statistisk kontroll. Nedanstående beteckningar används.

n = antalet undersökta enheter
d = antalet defekta enheter bland dem som man har undersökt

Nr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	110	110	90	100	100	100	100	100	100	100
d_i	10	4	6	12	6	8	10	12	8	7

Nr	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n_i	90	100	100	100	100	100	100	100	100	100
d_i	3	4	3	4	4	10	7	3	5	6

Lösning: Eftersom felkvoten är okänd börjar vi med att uppskatta den med hjälp av värdena i provgrupperna.

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{20} d_i}{\sum_{i=1}^{20} n_i} = \frac{132}{2000} = 0.066$$

Vi börjar med ett vanligt p-diagram. Det medför att den övre respektive nedre kontrollgränsen inte blir en rät linje, utan vi får nya gränsvärden för varje värde på n.

n_i	$\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n_i}}$	$\hat{p}+3\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n_i}}$	$\hat{p}-3\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n_i}}$
90	$\sqrt{\dfrac{0.066(1-0.066)}{90}} \approx 0.0262$	$0.066+3\cdot0.0262 \approx 0.145$	$0.066-3\cdot0.0262=-0.0126<0$
100	$\sqrt{\dfrac{0.066(1-0.066)}{100}} \approx 0.0248$	$0.066+3\cdot0.0248 \approx 0.140$	$0.066-3\cdot0.0248=-0.0084<0$
110	$\sqrt{\dfrac{0.066(1-0.066)}{110}} \approx 0.0237$	$0.066+3\cdot0.0237 \approx 0.137$	$0.066-3\cdot0.0237=-0.0051<0$

$S_ö$ varierar enligt ovanstående tabell

$CL = \hat{p} = 0.066$

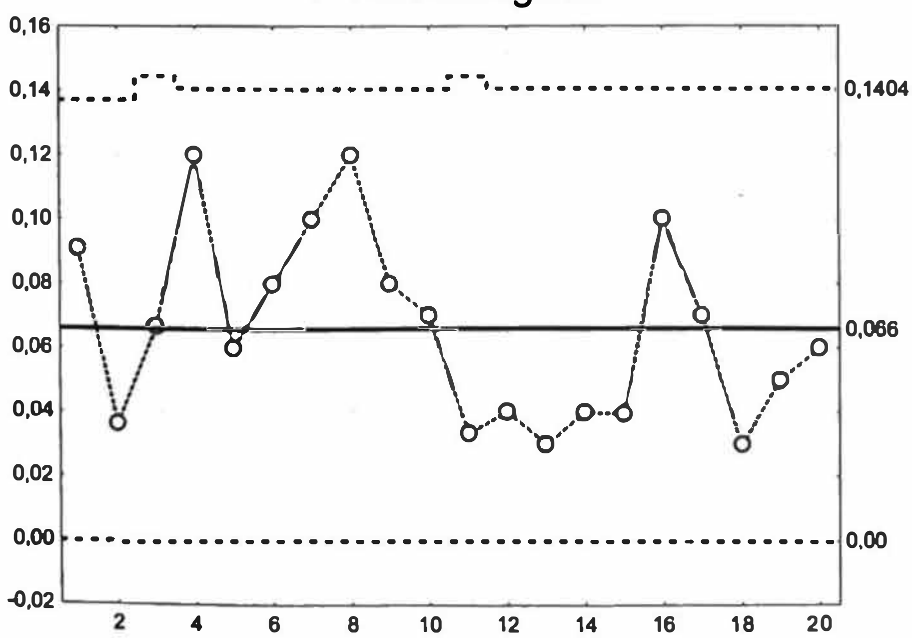
$S_u = 0$ (eftersom $\hat{p}-3\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n_i}} < 0$ för alla n_i)

För att kunna rita in värdena i kontrolldiagrammet måste vi beräkna observerade felkvoter i varje provgrupp

Nr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	110	110	90	100	100	100	100	100	100	100
d_i	10	4	6	12	6	8	10	12	8	7
d_i/n_i	0.091	0.036	0.067	0.12	0.06	0.08	0.10	0.12	0.08	0.07

Nr	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n_i	90	100	100	100	100	100	100	100	100	100
d_i	3	4	3	4	4	10	7	3	5	6
d_i/n_i	0.033	0.04	0.03	0.04	0.04	0.10	0.07	0.03	0.05	0.06

Felkvotsdiagram



Samtliga värden ligger inom styrgränserna $\Rightarrow$ processen är under statistisk kontroll.

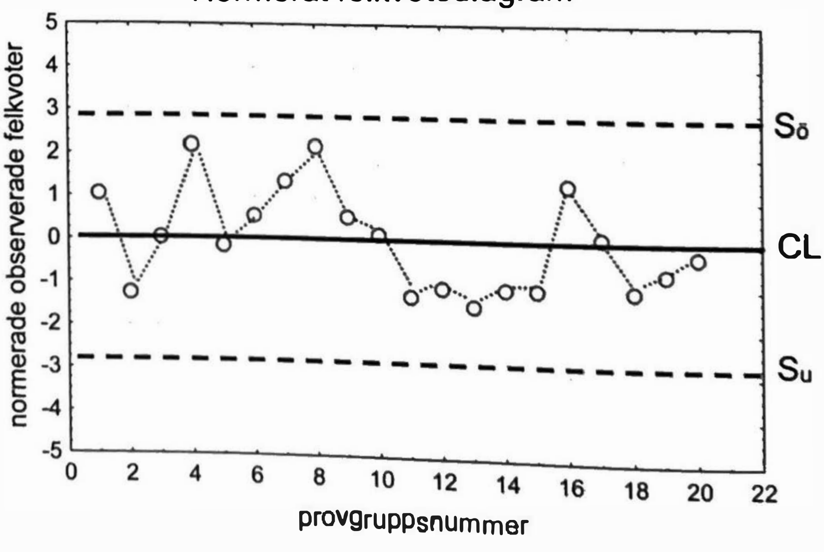
Vi gör nu nya beräkningar för att få normerade felkvoter till ett felkvotsdiagram med de normerade styrgränserna $S_ö = 3$ och $S_u = -3$.

Nr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	110	110	90	100	100	100	100	100	100	100
d_i	10	4	6	12	6	8	10	12	8	7
d_i/n_i	0.091	0.036	0.067	0.12	0.06	0.08	0.10	0.12	0.08	0.07
$\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_i}}$	0.0237	0.0237	0.0262	0.0248	0.0248	0.0248	0.0248	0.0248	0.0248	0.0248
$\frac{\frac{d_i}{n_i}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n_i}}}$	1.05	−1.26	0.04	2.18	−0.24	0.56	1.37	2.18	0.56	0.16

Nr	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n_i	90	100	100	100	100	100	100	100	100	100
d_i	3	4	3	4	4	10	7	3	5	6
d_i/n_i	0.033	0.04	0.03	0.04	0.04	0.10	0.07	0.03	0.05	0.06
$\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_i}}$	0.0262	0.0248	0.0248	0.0248	0.0248	0.0248	0.0248	0.0248	0.0248	0.0248
$\frac{\frac{d_i}{n_i}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n_i}}}$	−1.26	−1.05	−1.45	−1.05	−1.05	1.37	0.16	−1.05	−0.65	−0.24

Ovanstående normerade felkvoter ritas in i ett diagram. Man ser att mönstret i punktsvärmen ser likadant ut som i diagrammet med vanliga felkvoter. Alla observationer ligger mellan styrgränserna, vilket betyder att processen är under statistisk kontroll. Det är samma slutsats som vi drog från felkvotsdiagrammet. Givetvis måste man kunna dra samma slutsats från båda diagrammen: annars skulle ju någon kunna välja ett diagram som visade den slutsats vederbörande ville ha.

Normerat felkvotsdiagram



Exempel 3.9
Vid tillverkning av kanoter genomförs kontrollen av slutprodukten genom att man tar ett slumpmässigt urval från produktionen. För varje kanot antecknar man antalet defekter som man funnit i lacken. Nedanstående data visar det erhållna resultatet från ett sådant urval.

Nr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
antal fel	7	6	6	10	13	8	6	1	0	5

Nr	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
antal fel	14	3	1	3	2	7	5	7	2	8

Nr	21	22	23	24	25
antal fel	0	4	14	4	5

Rita ett kontrolldiagram som visar antal defekter i lacken per kontrollerad kanot. Rita in observationerna och avgör med hjälp av detta om processen är under statistisk kontroll.

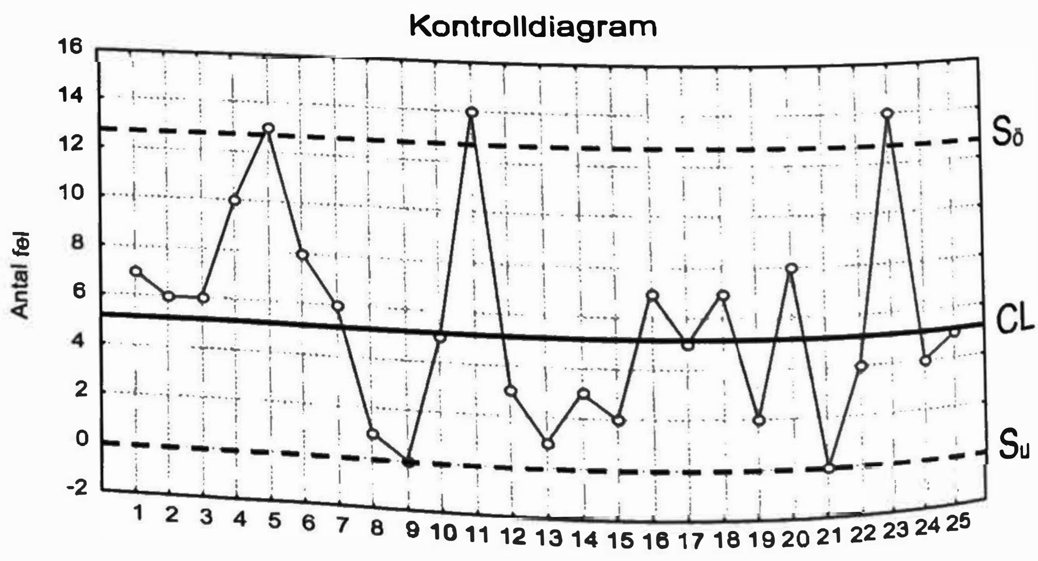
Lösning: Eftersom genomsnittligt antal fel/enhet är okänt uppskattas det med hjälp av provgrupperna.

$$\hat{c} = \frac{1}{25}(7 + 6 + 6 + 10 + 13 + \ldots + 14 + 4 + 5) = 5.64$$

$$S_ö = 5.64 + 3\sqrt{5.64} = 12.77$$

$$CL = 5.64$$

$$S_u = 0 \quad \text{eftersom} \quad 5.64 - 3\sqrt{5.64} < 0$$



Tre punkter kommer utanför kontrolldiagrammet, nämligen observation nr 5, 11 och 23. Processen är inte under statistisk kontroll.

Kapabilitet/Duglighet

Lever producerade enheter upp till kvalitetskrav?

Kopplar ihop styrande kontroll med produktens kvalitetskrav m.h.a vissa duglighetsmått.

Krav på kvalitetsindikator:

Övre toleransgräns, $T_ö$:

Högsta värdet vi tillåter för kvalitetsindikatorn om enheten ej skall klassas som defekt

Undre toleransgräns, T_u:

Samma som $T_ö$ fast undre gräns

Målvärde, $M = \frac{T_u + T_ö}{2}$:

Värdet på kval. indikatorn vi helst har för alla enheter som produceras

Olika duglighetsmått beskriver sedan hur bra producerade enheter lever upp till dessa krav.

Kapabilitetsindex (duglighetsindex):

$$C_p = \frac{T_ö - T_u}{6\sigma}$$

σ — känd/skatta m.h.a. s eller normalfördelningspapper (sid 102)

- Relation mellan kravgränserna och processpridningen
- Vill ha stor. Tumregel: $C_p > 1.33 \Rightarrow$ nöjd med produktionsprocessen

Om man även vill ta hänsyn till väntevärdet?

Korrigerat kapabilitets-/duglighetsindex

$$C_{pk} = C_p(1 - CM) \leq C_p$$

där $CM = 2\frac{|M-\mu|}{T_ö - T_u}$, μ är processens väntevärde, M är målvärdet.

- Jämfört med C_p: inkluderar att μ inte behöver vara M
- Tumregel: $C_{pk} > 1.33$ för acceptabel process

Exempel 4.2
Vid en kvalitetskontroll tas 5 prover ut vid varje provtillfälle. Varje prov kontrollerades med hjälp av mätning av provets pH-värde. Vid 20 olika tillfällen fick man följande värden.

Tillfälle	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$\bar{x}$	6.9	7.1	7.2	6.9	7.0	6.9	7.0	7.1	7.2	7.0
R	0.6	0.2	0.1	0.5	0.1	0.3	0.1	0.2	0.4	0.4

Tillfälle	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
$\bar{x}$	6.9	7.1	6.9	7.1	7.1	7.0	7.2	7.1	6.9	7.1
R	0.3	0.6	0.6	0.2	0.3	0.1	0.1	0.4	0.6	0.2

Kunden har angivit följande toleranskrav: 7 ± 0.5.

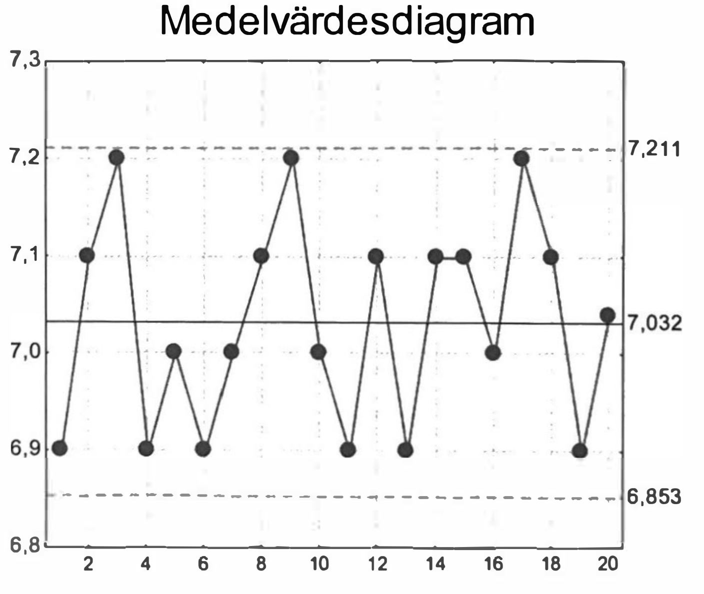
a) Rita in observationerna i $\bar{x}$–R-diagram.
b) Är processen under statistisk kontroll? Motivera ditt svar.
c) Rita upp ovanstående medelvärden i en normalfördelningsplott med hjälp av formeln på nästa sida:

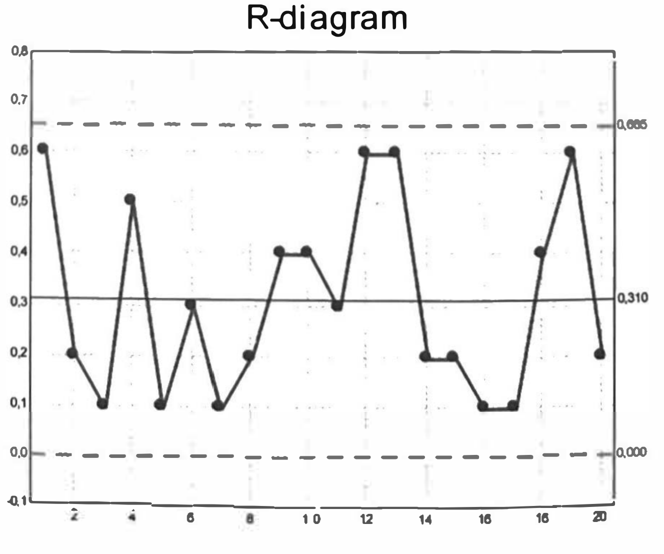
$$p_i = \frac{(i-0.5)}{k} \cdot 100\,\% \qquad \text{där k = antal värden som ska ritas in}$$

d) Uppskatta processens μ och σ från normalfördelningsplotten.
e) Vad blir C_p och C_{pk} i ovanstående problem?
f) Är ovanstående process bra eller dålig? Motivera ditt svar.

Lösning:

a) Ett diagram behövs när man vill kontrollera att det inte uppstår några systematiska fel (att medelvärdet förändras). Det andra diagrammet behövs för att man ska kunna kontrollera de enskilda tillverkade enheterna. Var och en av dessa får inte avvika för mycket från genomsnittsvärdet (d.v.s. standardavvikelsen får inte vara för stor eftersom detta tyder på stora slumpmässiga fel). Styrgränserna beräknas och ritas tillsammans med värdena in i diagrammen.





b) Processen är under statistisk kontroll eftersom alla värden ligger mellan kontrollgränserna i båda kontrolldiagrammen.

c) Medelvärdena rangordnas:

6.9 6.9 6.9 6.9 6.9 6.9 7.0 7.0 7.0 7.0 7.1 7.1 7.1
7.1 7.1 7.1 7.1 7.2 7.2 7.2

p_i –värden beräknas. Vi visar hur man beräknar de två första värdena.

$$p_i = \frac{(i-0.5)}{k} \cdot 100\%$$ där k = 20 d.v.s., antal värden som ska ritas in.

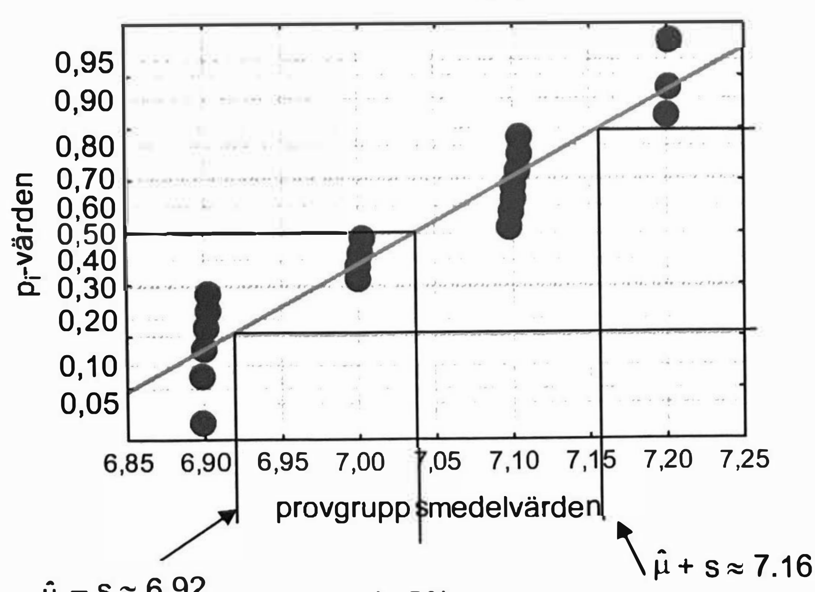
i= 1: $p_1 = \frac{(1-0.5)}{20} \cdot 100\% = 2.5\ \%$

i = 2: $p_2 = \frac{(2-0.5)}{20} \cdot 100\% = 7.5\ \%$

i	p_i-värde	i	p_i-värde
1	2.5 %	11	52.5 %
2	7.5 %	12	57.5 %
3	12.5 %	13	62.5 %
4	17.5 %	14	67.5 %
5	22.5 %	15	72.5 %
6	27.5 %	16	77.5 %
7	32.5 %	17	82.5 %
8	37.5 %	18	87.5 %
9	42.5 %	19	92.5 %
10	47.5 %	20	97.5 %

Normalfördelningsplotten har ritats med hjälp av programmet STATISTICA.

Normalfördelningsplott



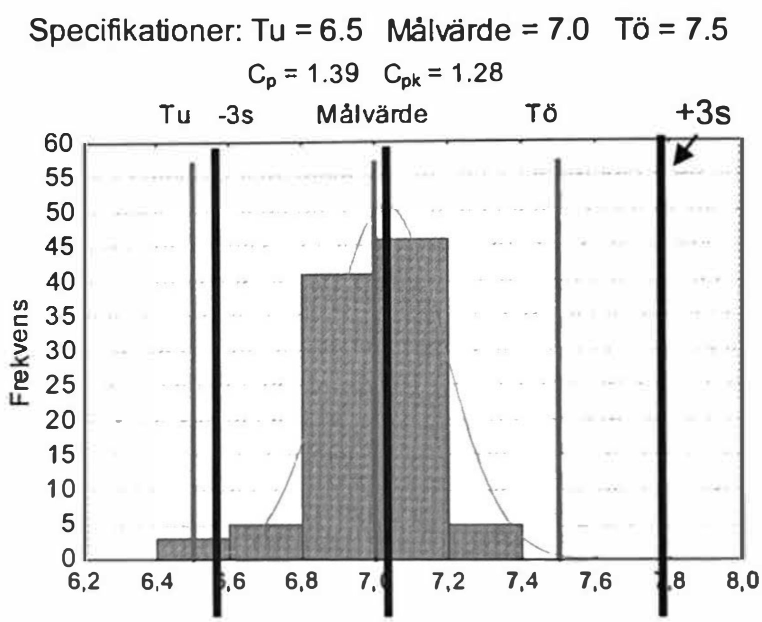
d) Från normalfördelningsplotten får vi följande skattningar:

$$\hat{\mu} \approx 7.04 \qquad \hat{\sigma} \approx \frac{7.16 - 6.92}{2} = 0.12$$

e) $$C_p = \frac{T_ö - T_u}{6\sigma} = \frac{7.5 - 6.5}{6 \cdot 0.12} \approx 1.3889$$

$$CM = \frac{|M - \mu|}{(T_ö - T_u)/2} = \frac{|7.0 - 7.04|}{(7.5 - 6.5)/2} \approx 0.08$$

$$C_{pk} = C_p(1 - CM) \approx 1.3889\,(1 - 0.08) = 1.2778$$



f) Detta är ingen riktigt bra process eftersom C_p inte är tillräckligt stor. Rekommenderat värde är att C_p ska vara större än 1.33. Det för låga värdet på C_p betyder att spridningen i tillverkningen är för stor.
Att C_{pk} inte ligger nära C_p betyder att tillverkningens centrering inte är helt tillfredsställande.
Att processen är under statistisk kontroll betyder att tolkningen av C_p och C_{pk} blir meningsfull.