

Övningshjälp

Nedan finns tips och ledning till de rekommenderade övningarna. Jag har inte löst dem helt, utan tanken är att du ska fylla i det som saknas. Det är viktigt att träna att räkna med penna och papper.

Längden av en graf till en funktion $f(x)$ över ett intervall $a \leq x \leq b$ ges av

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

8.1.9 Beräkna längden av $y = 1 + 6x^{3/2}, 0 \leq x \leq 1$.

Se exempel i första föreläsningen.

8.1.11 Beräkna längden av $y(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}, 1 \leq x \leq 2$.

Beräkna $s = \int_1^2 \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$

$$y'(x) = \dots$$

$$1 + y'(x)^2 = \dots = \left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right)^2$$

$$s = \int_1^2 \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right)^2} dx = \int_1^2 \left|x^2 + \frac{1}{4x^2}\right| dx = (\text{integranden är positiv på intervallet } 1 \leq x \leq 2) = \int_1^2 x^2 + \frac{1}{4x^2} dx = \dots$$

8.1.13 Beräkna längden av $y(x) = \frac{x^5}{6} + \frac{1}{10x^3}$ på intervallet $1 \leq x \leq 2$.

Bestäm $s = \int_1^2 \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$. (samma lösningsprincip som i uppgift 8.11 ovan).

$$y'(x) = \dots$$

$$1 + y'(x)^2 = \dots = (\dots)^2$$

$$s = \int_1^2 \sqrt{(\dots)^2} dx = \dots$$

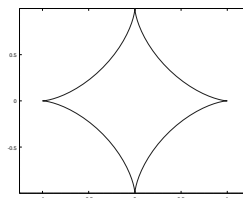
8.1.33 Kurvan som beskrivs av ekvationen $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ kan parametriseras till

$$(x(t), y(t)) = (\cos^3(t), \sin^3(t)), 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Rita en figur av kurvan (använd t.ex. Matlab). Beräkna längden av kurvan (utnyttja att kurvan är symmetrisk runt både x- och y- axeln).

Matlabkoden nedan ritat figuren till höger.

```
t=linspace(0,2*pi);  
x=cos(t).^3; y=sin(t).^3;  
plot(x,y)
```



Kurvan är symmetrisk runt både x- och y-axeln. Så vi kan räkna längden på en av delsträckorna och multiplicera med 4, dvs. $s = 4 \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)} dx$ där $f(x)$ ges av

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1 \Leftrightarrow y^{2/3} = 1 - x^{2/3} \Rightarrow y = f(x) = (1 - x^{2/3})^{3/2}$$

Så

$$\begin{aligned} f'(x) &= \dots \\ 1 + f'(x)^2 &= \dots \\ \sqrt{1 + f'(x)^2} &= x^{-1/3} \\ s &= 4 \int_0^1 \dots \end{aligned}$$

Det går att härleda fram längden för parameterframställda kurvor $(x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$:

$$s = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

8.1.35 Låt $y(x) = 2x^{3/2}$. Bestäm ett uttryck för längden på kurvan som börjar i $(1, 2)$

Beräkna längden av $y(x) = 2x^{3/2}$ på intervallet $1 \leq x \leq t$, dvs. bestäm $s(t) = \int_1^t \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$

$$\begin{aligned} y'(x) &= \\ 1 + y'(x)^2 &= \\ \sqrt{1 + y'(x)^2} &= \\ s(t) &= \dots \end{aligned}$$

8.2 Rotationsvolym V och mantelarea S vid rotation av en funktion $f(x)$, $a \leq x \leq b$ runt x -axeln:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b f(x)^2 dx \\ S &= 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \end{aligned}$$

Rotationsvolym V och mantelarea S vid rotation av en funktion $f(x)$, $a \leq x \leq b$ runt y -axeln:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_a^b x f(x) dx \\ S &= 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \end{aligned}$$

8.2.1 Låt $y(x) = \tan(x)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ Roter runt x-axel respektive y-axel och beräkna mantelarean med Matlab.

Beräkna integralerna med Matlabs `integral`-kommando. Derivat av tangens $y'(x) = 1/\cos^2(x) = \sec^2(x)$

Observera att Matlabs symboliska verktygslåda kan beräkna en hel del derivator symboliskt:

```
>> syms x
>> f=tan(x)
>> diff(f)
```

8.2.7 Roterar $y(x) = x^3$, $0 \leq x \leq 2$ runt x-axeln och beräkna mantelarean. Ställ upp integralen och lös den analytiskt (exakt med papper och penna).

Jämför med exempel från föreläsningen.

8.2.9 Bestäm mantelarea då $y^2 = x + 1$, $0 \leq x \leq 3$ roterar runt x-axeln.

$$y^2(x) = x + 1 \Rightarrow y(x) = \sqrt{1 + x}$$

Observera att vi har $0 \leq x \leq 3$ och $1 \leq y(x) \leq 2$ på intervallet. Så

$$S = 2\pi \int_a^b |y(x)| \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = 2\pi \int_0^3 y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = 2\pi \int_0^3 \dots$$

(Lös integralen med variabelsubstitution).

8.2.27 Låt $y(x) = \frac{1}{x}$, $x \geq 1$ rotera runt x-axeln. Bestäm mantelarean, $S = 2\pi \int_1^\infty |y(x)| \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$

$$S = 2\pi \int_1^\infty |y(x)| \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = \dots = 2\pi \int_1^\infty \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^3} dx$$

Vi har att att $\sqrt{x^4 + 1} > \sqrt{x^4} = x^2$ så

$$2\pi \int_1^\infty \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^3} dx > 2\pi \int_1^\infty \frac{x^2}{x^3} dx = \dots \text{ som ju divergerar.}$$

Uppgift 3 från Exempelduggan på kurshemsidan: Beräkna arean S av ytan som uppstår när kurvan

$$y = \frac{1}{3}x^3, 1 \leq x \leq 2$$

roteras runt x-axeln. (Duggan finns löst på kurshemsidan.).

Observera att den avslutande duggan kommer att innehålla en uppgift där man ska beräkna mantelarea av en rotationsyta.

Svar:

8.1.9 $\frac{2}{243}(82\sqrt{82} - 1)$, **8.1.11** $\frac{59}{24}$, **8.1.13** $\frac{1261}{240}$, **8.1.33** 6,

8.1.35 $s(t) = \frac{2}{27}((1 + 9t)^{3/2} - 10\sqrt{10})$, **8.2.1** Rotation runt x-axel, 10.5017, runt y-axel 7.9353.

8.2.7 $\frac{1}{27}\pi(145\sqrt{145} - 1)$, **8.2.9** $\frac{1}{6}\pi(27\sqrt{27} - 5\sqrt{5})$.