Övningarna

9.5.1 Vilka av differentialekvationerna är linjära och av första ordningen?

$y'(x) + x\sqrt{y(x)} = x^2, \qquad \phi''(t) = -9.81 \cdot \sin(\phi(t)) - \phi'(t),$
$y'(x) = 2x \cdot y^2(x), \qquad y'(x) - x \cdot y(x) = x$

9.5.3 Är differentialekvationen $u(t)e^t = t + \sqrt{t}u'(t)$ linjär och av första ordningen?

Lös (9.5.5) $x \cdot y'(x) - 2y(x) = x^2$ (9.5.9) $y'(x)\sin(x) + y(x)\cos(x) = \sin(x^2)$

(9.5.13) $t^2y'(t) + 3ty(t) = \sqrt{1+t^2}, t > 0$

Lös (9.5.15) $x^2y'(x) + 2xy(x) = \ln(x), y(1) = 2$

(9.5.17) $tu'(t) = t^2 + 3u(t), u(2) = 4$

(9.5.19) $y' - \frac{1}{x}y(x) = x\sin(x), y(\pi) = 0$

Lös en av uppgifterna på exempelduggan, beräkna lösningen till differentialekvationen

$$\begin{aligned} &y' + 2xy = x, x > 0 \\ &y(0) = 1 \end{aligned}$$

(Exempelduggan och lösningen till uppgiften finns på kurshemsidan).

(9.5.27)

9.5.33 En tank innehåller 100 liter vatten. Genom ett rör tillförs en saltlösning som har koncentrationen 0.4 kg salt/liter. Man tillför 5 liter/minut av saltlösningen. Genom ett annat rör tappar man samtidigt av 3 liter per minut. Lösningen hålls hela tiden homogen genom effektiv omrörning i tanken.

(a) Låt $y(t)$ vara mängden salt (i kg) efter t minuter. Verifiera att $y(t)$ satisfierar differentialekvationen

$$y'(t) = 2 - \frac{3y(t)}{100 + 2t}, y(0) = 0$$

(b) Lös differentialekvationen och bestäm koncentrationen av salt efter 20 min.

(c) Differentialekvationen är linjär, men är den även separabel?

9.5.35 An object with mass m is droped from rest and we assume that the air resistance is propostional to the speed of the object. If $s(t)$ is the distance dropped after t seconds, then the speed is $v = s'(t)$ and the accelration is $a = v'(t)$. If g is the accelreration due to gravity, then the downward force on the object is $mg - cv$, where c is a positive constant, and Newton's second law gives

$$m\frac{dv}{dt} = mg - cv$$

(a) Solve this as a linear equation to show that

$$v = \frac{mg}{c}(1 - e^{ct/m})$$

(b) What is the limiting velocity?

(c) Find the distance the object has fallen after t seconds.

9.5.37 (a) Differentialekvationen

$$P'(t) = k \cdot P(t)(1 - \frac{P(t)}{M})$$

är inte linjär (k och M konstanter). Genom substitutionen $z = \dfrac{1}{P(t)}$ kan man skriva om den till

$$z' + k \cdot z = \frac{k}{M}$$

som ju är linjär. Genomför omskrivningen.
(b) Lös differentialekvationen (den linjära) och bestäm $P(t)$

Övningshjälp

Nedan finns tips och ledning till de rekommenderade övningarna. Jag har inte löst dem helt, utan tanken är att du ska fylla i det som saknas. Det är viktigt att träna att räkna med penna och papper.

9.5: Första ordningens linjär differentialekvation:

$$y'(x) + g(x) \cdot y(x) = h(x)$$

$g(x)$ och $h(x)$ kontinuerliga funktioner.

Lös dem med integererande faktor:

1: Bestäm primitiv funktion $G(x)$ till $g(x)$ och bilda $e^{G(x)}$

2: Bestäm primitiv funktion till $(y(x) \cdot e^{G(x)})'$ och lös ut $y(x)$

9.5.3 Ja, skriv om till $u'(t) - \dfrac{e^t}{\sqrt{t}} \cdot u(t) = -\sqrt{t}$. Identifiera $g(t)$ och $h(t)$

9.5.5 $x \cdot y'(x) - 2y(x) = x^2 \Rightarrow y'(x) - \dfrac{2}{x}y(x) = x$, $(x \neq 0)$. $g(x) = -\dfrac{x}{2} \Rightarrow G(x) = \ldots$. Bestäm primitiv funktion till $(y(x) \cdot e^{G(x)})'$ och lös ut $y(x)$

9.5.9 $y'(x)\sin(x) + y(x)\cos(x) = \sin(x^2)$. Utnyttja att $(y(x)\sin(x))' = y'(x)\sin(x) + y(x)\cos(x)$

9.5.13 $t^2 \cdot y'(t) + 3t \cdot y(t) = \sqrt{1+t^2}, t > 0$. Dela alla termer med t^2, identifiera $g(t)$, bestäm $G(t)$, bestäm primitiv funktion till $(y(t) \cdot e^{G(t)})'$ och lös ut $y(t)$.

9.5.15 $x^2 \cdot y'(x) + 2x \cdot y(x) = \ln(x) \Rightarrow (\ldots)' = \ln(x) \Rightarrow (\ldots) = \int \ln(x)dx = \int 1 \cdot \ln(x)dx =$ [Partiell integrering] $= \ldots$. Lös ut y, vi får $y(x) = \ldots$
Använd vilkoret $y(1) = 2$ för att bestämma ett värde på konstanten C i lösningen.

9.5.17 $t \cdot u'(t) = t^2 + 3u(t) \Rightarrow u'(t) - \dfrac{3}{t}u(t) = t^2$. Lös, förslagsvis med integrerande faktor enligt ovan, vi får $u(t) = -t^2 + Ct^3$. Använd $u(2) = 4$ och bestäm värdet på konstanten.

9.5.19 $y' - \dfrac{1}{x}y(x) = x\sin(x)$.

Differentialekvationer används ofta för att modellera/beskriva olika fenomen över tid. Differentialekvationerna i uppgifterna nedan är alla exempel på det. (Alla sambanden är exempel på första ordningens linjära differentialekvationer - och löses förslagsvis genom att man utnyttjar metoden med integrerande faktor ovan).

9.5.33 $y'(t) =$Salt in - Salt ut $= 2 - \frac{3y(t)}{100+2t}$. (Eftersom man tillsätter 5l/min men tappar av bara 3l/min ökar mängden vätska i tanken. Efter tiden t finns 100+2t liter i tanken).

Så $y'(t) + (\frac{3}{100+2t})y(t) = 2$. Vi får
$G(t) = \cdots = (100+2t)^{3/2}$ och $(y(t)\cdot e^{G(x)})' = \cdots \Rightarrow y(t)\cdot e^{G(t)} = \int \cdots \Rightarrow$
$y(t) = 2/5(100+2t) + C(100+2t)^{-3/2}$. Vi har $y(0) = 0$ så $C = -40$ och $y(20) = 2/5(100+40) - 40(100+40)^{-3/2} \approx 55.9755.9766$. Koncentrationen $C(t) = \frac{y(t)}{100+2t}$ och $C(20) \approx 0.39983$

Nej differentialekvationen är inte separabel.

9.5.35 (a) $v'(t) + \frac{c}{m}v(t) = g$. Vi har $G(t) = e^{(c/m)t}$ och $(v(t)e^{G(t)})' = \ldots$. Vi får $v(t)e^{G(t)} = \ldots$, vilket ger oss $v(t) = mg/c + Ke^{-(c/m)t}$ där K är en konstant. Villkoret $v(0) = 0$ ger att $K = -mg/c$ dvs $v(t) = \frac{mg}{c}(1 - e^{-ct/m})$

(b) $\lim_{t\to\infty} v(t) = mg/c$

(c) $\int v(t)dt = \ldots$

9.5.37 (a) $z = 1/P \Rightarrow P = 1/z$ och $P' = -z'/z^2$. Vi får

$$P' = kP(1 - P/M) \Rightarrow -z'/z^2 = k\frac{1}{z}(1 - \frac{1}{zM}) = \ldots$$

(b) Lös $z' + kz = k/M$, förslagsvis med integrerande faktor enligt ovan. Detta ger $z = 1/M + Ce^{-kt}$. Låt $P = 1/z$, dvs

$$P = \frac{1}{1/M + Ce^{-kt}} = \ldots$$

Svar

Många av svaren finns redan givna i övningshjälpen ovan, men några av de som inte finns med har jag skrivit nedan.

9.5.5 Följ förslagsvis samma mönster som i förra veckans övningar och gör ditt eget facit

```
syms y(x)
ode=diff(y,x)==x+x*y
ySol(x)=dsolve(ode)
```

9.5.9 $y = \frac{\int \sin(x^2)dx + C}{\sin(x)}$

9.5.13 Räkna ut svaret i Matlab. Följ samma mönster som 9.5.5 ovan.

9.5.15 Vi kan be Matlab lösa differentialekvationen symboliskt med `dsolve` som innan. Kommandot `dsolve` klarar även av att lösa differentialekvationer med begynnelsevillkor:

```
syms y(x)
ode=diff(y,x)==log(x)/x^2-2*y/x
cond=y(1)==2       % begynnelsevillkoret
ySol(x)=dsolve(ode,cond)
```

9.5.17 och 9.5.19. Räkna förslagsvis ut svaret i Matlab. Följ samma mönster som i 9.5.13 ovan. (Uppgift 9.5.17 och 9.5.19 återkommer i veckans laboration - där löser ni dem även numeriskt).

9.5.35 (c) $mg/c(t + m/ce^{-ct/m}) - m^2g/c^2$

9.5.37 (b) $P(t) = \dfrac{M}{1 + MCe^{-kt}}$