Linjära första ordningens differentialekvationer

Enklaste formen av <u>linjär</u> <u>första ordningens</u> differentialekvation kan skrivas

$$y'(x) = f(x)$$

där $f(x)$ är en given kontinuerlig funktion. Differentialekvationen har lösning

$$y(x) = F(x) + C$$

där $F(x)$ är primitiv funktion till $f(x)$ och C en konstant.

Exempel: Differentialekvationen $y'(x) = x^2$ har lösning $y(x) = \frac{x^3}{3} + C$

En allmännare variant av första ordningens linjär differentialekvation kan skrivas på formen:

$$y'(x) + g(x) \cdot y(x) = h(x)$$

där $g(x)$ och $h(x)$ är givna kontinuerliga funktioner.

Exempel:

$$y'(x) {\color{blue}-x} \cdot y(x) = {\color{red}x}$$

$$y'(x) + {\color{blue}g(x)} \cdot y(x) = {\color{red}h(x)}$$

Första ordningens linjär differentialekvation, allmännare variant $y'(x) + g(x) \cdot y(x) = h(x)$,
löses genom att "återföra" till den enklare varianten $y'(x) = f(x)$ med hjälp av integrerande faktor:

1: Bestäm primitiv funktion $G(x)$ till $g(x)$ och bilda $e^{G(x)}$. ($e^{G(x)}$ kallas integrerande faktor)

2: Multiplicera bägge leden i differentialekvationen $y'(x) + g(x) \cdot y(x) = h(x)$ med den integrerande faktorn. Vi får

$$y'(x) \cdot e^{G(x)} + g(x) \cdot e^{G(x)} \cdot y(x) = h(x) \cdot e^{G(x)}$$

Det nya vänsterledet är derivatan av produkten $y(x) \cdot e^{G(x)}$, så differentialekvationen kan skrivas

$$(y(x) \cdot e^{G(x)})' = h(x) \cdot e^{G(x)}$$

som ju är på formen $y'(x) = f(x)$, så

$$y(x) \cdot e^{G(x)} = \int h(x) \cdot e^{G(x)}\, dx + C$$

Multiplicera alla termer med $e^{-G(x)}$ för att lösa ut $y(x)$. Vi får

$$y(x) = e^{-G(x)} \int h(x) \cdot e^{G(x)}\, dx + e^{-G(x)} \cdot C$$

Exempel: Lös $y'(x) - x \cdot y(x) = x$

1: Integrerande faktor: Vi har $g(x) = -x$, $G(x) = -\dfrac{x^2}{2}$, så den integrerande faktorn blir $e^{-\frac{x^2}{2}}$

2: Multiplicera med den integrerande faktorn: $y'(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} - x \cdot y(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

Vänsterledet är derivatan av produkten $y(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, så $y(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \int x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = -e^{-\frac{x^2}{2}} + C$

Lös ut $y(x)$ (multiplicera med $e^{\frac{x^2}{2}}$): $y(x) = -e^{-\frac{-x^2}{2}} \cdot e^{\frac{x^2}{2}} + C \cdot e^{\frac{x^2}{2}} = -1 + C \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$

OBS Svaret kan enkelt kontrolleras genom att sätta in i det ursprungliga sambandet:

Vi har $y(x) = -1 + C \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$

Vi får $y'(x) = C \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x$

Så $y'(x) - x \cdot y(x) = C \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x - x(-1 + C \cdot e^{\frac{x^2}{2}}) = C \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x + x - C \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x = x$

OBS Det är ofta bättre att följa lösningsgången ovan när det gäller integrerande faktor än att lära sig formlerna utantill.

Matlabdelen

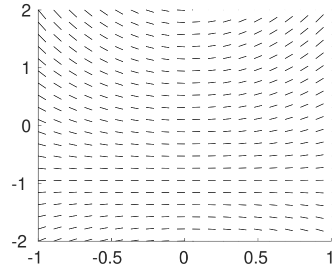
I **Uppgift 1** ska man rita ett riktningsfält. (Riktningsfält pratade jag om i andra föreläsningen.)

Riktningsfält för

$$y'(x) = x + x \cdot y(x)$$

då $-1 \leq x \leq 1$, $-2 \leq y \leq 2$

```
f=@(x,y)x+x.*y;
x=linspace(-1,1,20);
y=linspace(-2,2,20);
riktningsfaelt(f,x,y)
```



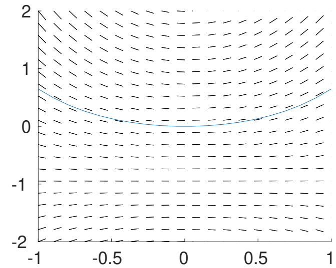
Funktionen `riktningsfalt` finns på kurshemsidan.

Vi markerar en av lösningskurvorna i riktningsfältet

$$y(x) = -1 + C \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

(Vi låter $C = 1$)

```
C=1;
y=@(x)-1+C*exp(x.^2/2);
hold on;
plot(x,y(x));
```



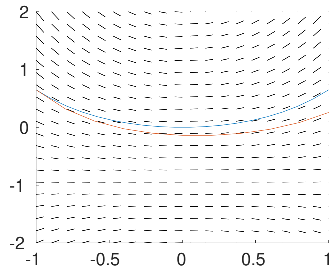
I **Uppgift 2** ska man lösa en differentialekvation numeriskt med Eulers metod. (Jag gick igenom Euler's metod i andra föreläsningen)

Beräkna lösning till

$$\begin{cases} y'(x) = x + x \cdot y(x) \\ y(-1) = \sqrt{e} - 1 \qquad -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

med Euler's metod.

```
f=@(x,y)x+x*y;
a=-1; b=1;
N=10; h=(b-a)/N;
x=linspace(a,b,N+1);
Y(1)=sqrt(exp(1))-1;
for n=1:N
  Y(n+1)=Y(n)+h*f(x(n),Y(n));
end
plot(x,Y)
```



När vi kört koden ovan ser vi att i `x` finns de 11 talen $-1, -0.8, -0.6, \ldots, 0.8, 1$. Vektorn `Y` innehåller de 11 funktionsvärdena $y(-1), y(-0.8), y(-0.6), \ldots, y(0.8), y(1)$ som beräknats med Euler's metod:

```
>> x
x =  -1.0000 -0.8000 -0.6000 -0.4000 -0.2000 0 0.2000 0.4000 0.6000 0.8000 1.0000
```

```
>> Y
Y =  0.6487 0.3190 0.1079 -0.0250 -0.1030 -0.1389 -0.1389 -0.1044 -0.0328 0.0833 0.2566
```

I **Uppgift 3** ska man skriva en `function` som heter `min_ode` som löser en differentialekvation med Euler's metod. Det finns ett programskal att hämta från kurshemsidan.

I **Uppgift 4** ska man testa funktionen `min_ode` på fyra olika differentialekvationer.

1 Lös ekvationerna analytiskt (de är alla 1:a ordningens linjära ekvationer, så använd integrerande faktor).

2 Beräkna numeriska lösningar. Använd `min_ode` och två olika steglängder $h = 0.1$ och $h = 0.001$.

3 Rita figur som innehåller riktningsfält, den analytiska lösningen och de två numeriska lösningarna.

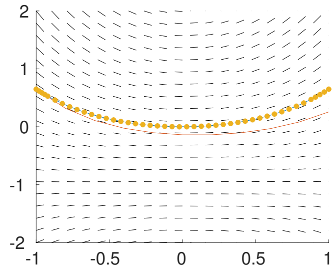
I **Uppgift 5** ska man använda Matlabs `ode45` för att bestämma lösning till en differentialekvation.

Beräkna lösning till

$$\begin{cases} y'(x) = x + x \cdot y(x) \\ y(-1) = \sqrt{e} - 1 \end{cases} \qquad -1 \leq x \leq 1$$

med `ode45`

```
f=@(x,y)x+x.*y;
ya=sqrt(exp(1))-1;
[x,Y]=ode45(f,[-1,1],ya);
plot(x,Y,'*');
```



`ode45` bestämmer själv steglängd. Hur många x-värden har valts? Är steglängden lika lång på hela intervallet? (Två bra kommandon att använda för att svara på frågorna är t.ex. `size` och `diff`)