Idag: Analytisk lösning av andra ordningens linjära, homogena differentialekvationer med konstanta koefficienter.

$$\begin{aligned} &a \cdot y''(x) + b \cdot y'(x) + c \cdot y(x) = 0 \\ &a, b, c \text{ konstanter } \quad a \neq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Differentialekvationen (1) är homogen eftersom det står 0 i högerledet, den är av 2:a ordningen eftersom högsta derivatan är 2, den har konstanta koefficienter eftersom a,b,c är konstanter och den är linjär eftersom y'', y' och y förekommer linjärt i ekvationen. (Se mer formell definition av linjäritet allra sist *)

När man löser differentialekvationer på formen (1) ovan använder man följande sats:

> Om y_1 och y_2 är två linjärt oberoende lösningar till differentialekvationen (1) kan alla lösningar till ekvationen skrivas
>
> $$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$$
>
> där c_1, c_2 konstanter. (Linjärt oberoende innebär att y_1 och y_2 inte kan skrivas som multipler av varandra)

Så för att lösa (1) gäller det att bestämma två linjärt oberoende lösningar y_1 och y_2:
Ansätt lösningen $y(x) = e^{rx}$ och sätt in i ekvationen (1). Vi har $y'(x) = re^{rx}$ och $y''(x) = r^2 e^{rx}$, så

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$$

För att produkten $e^{rx}(ar^2 + br + c)$ ska vara 0 måste r väljas så att $ar^2 + br + c = 0$, dvs. rötterna ges av

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$ar^2 + br + c = 0$ kallas den karekteristiska ekvationen. 3 fall kan uppstå när man löser den karekteristiska ekvationen:

1: r_1, r_2 reella och $r_1 \neq r_2$: Lösningen ges av $y(x) = c_1 \cdot e^{r_1 x} + c_2 \cdot e^{r_2 x}$

2: r_1, r_2 reella och $r_1 = r_2$ $(= r)$: Lösningen ges av $y(x) = c_1 \cdot e^{rx} + c_2 \cdot x \cdot e^{rx}$

3: r_1, r_2 komplexa, $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$: Lösningen ges av $y(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cdot \cos(\beta x) + c_2 \cdot \sin(\beta x))$

c_1 och c_2 är konstanter.

Exempel: Lös $y''(x) = -\frac{12}{10} \cdot y(x)$

Vi har $y''(x) + \frac{12}{10} \cdot y(x) = 0$, med karekteristisk ekvation $r^2 + \frac{12}{10} = 0$ som har lösningar

$$r_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{12}{10}}}{2 \cdot 1} = \pm \frac{\sqrt{-\frac{4 \cdot 12}{10}}}{2} = \pm \sqrt{-\frac{4 \cdot 12}{10 \cdot 4}} = \pm \sqrt{-\frac{12}{10}} = \pm \sqrt{\frac{12}{10}} \cdot i$$

Så lösningen ges av (3:e fallet ovan, med $\alpha = 0$ och $\beta = \sqrt{12/10}$)

$$y(x) = e^{0 \cdot x}(c_1 \cos(\sqrt{\frac{12}{10}}x) + c_2 \sin(\sqrt{\frac{12}{10}}x)) = c_1 \cos(\sqrt{\frac{12}{10}}x) + c_2 \sin(\sqrt{\frac{12}{10}}x)$$

Om man inför begynnelsevärden fixerar man konstanterna c_1 och c_2:

Exempel: Lös

$$\begin{aligned} &y''(x) = -\frac{12}{10} \cdot y(x) \\ &y(0) = 0.1 \quad y'(0) = 0 \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

Vi har (från ovan) att $y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\frac{12}{10}}x) + c_2 \sin(\sqrt{\frac{12}{10}}x)$, så

$$y'(x) = -c_1 \sin(\sqrt{\frac{12}{10}}x)\sqrt{\frac{12}{10}} + c_2 \cos(\sqrt{\frac{12}{10}}x)\sqrt{\frac{12}{10}}$$

$y(0) = 0.1 \Rightarrow c_1 \cos(\sqrt{\frac{12}{10}} \cdot 0) + c_2 \sin(\sqrt{\frac{12}{10}} \cdot 0) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0.1$, dvs. $c_1 = 0.1$

$y'(0) = 0 \Rightarrow -c_1 \sin(\sqrt{\frac{12}{10}} \cdot 0)\sqrt{\frac{12}{10}} + c_2 \cos(\sqrt{\frac{12}{10}} \cdot 0)\sqrt{\frac{12}{10}} = c_2\sqrt{\frac{12}{10}} = 0$, dvs. $c_2 = 0$

Svar: $y(x) = 0.1 \cos(\sqrt{\frac{12}{10}}x)$

(I veckans lab avsnitt 3 löser man samma exempel numeriskt i Matlab)

Exempel: (Stewart sid 1156)
Differentialekvationen

$$y'' + y' - 6y = 0$$

har karekteristisk ekvation

$$r^2 + r - 6 = 0 \Leftrightarrow (r-2)(r+3) = 0$$

som har lösning $r_1 = 2, r_2 = -3$, så lösningen ges av (1:a fallet)

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

Exempel: (Stewart sid 1157)
Differentialekvationen

$$4y'' + 12y' + 9y = 0$$

har karekteristisk ekvation

$$4r^2 + 12r + 9 = 0$$

som har lösning $r_{1,2} = -\dfrac{3}{2}$, så lösningen ges av (2:a fallet)

$$y(x) = c_1 e^{-3x/2} + c_2 \cdot x \cdot e^{-3x/2}$$

Matlabdelen

System av första ordningens differentialekvationer.

Exempel:

$$\begin{aligned}
u_1'(t) &= a \cdot u_1(t) - b \cdot u_1(t) \cdot u_2(t) \\
u_2'(t) &= -c \cdot u_2(t) + d \cdot u_1(t) \cdot u_2(t) \\
u_1(0) &= 0.5, u_2(0) = 0.3, 0 \leq t \leq 80
\end{aligned}$$

där $a = 0.5, b = 0.3, c = 0.2, d = 0.1$. I Matlab löser man dem med t.ex. `ode45` som i förra veckans laboration.

```
% Formulera derivatorna:
a=0.5; b=0.3; c=0.2; d=0.1;
f=@(t,u)[ a*u(1) - b*u(1)*u(2);
          -c*u(2) + d*u(1)*u(2) ];

% Startvärden:
u0=[0.5; 0.3];

% Anropa ode45 och rita ut lösningen:
[t,U] = ode45(f,[0,80],u0);
plot(t,U)
```

När sekvensen ovan har körts innehåller `U` två kolumner, med $u_1(t_i)$ i den första kolumnen och $u_2(t_i)$ i den andra. Anropet `U(:,1)` ger första kolumnen i `U` och `U(:,2)` ger den andra. Vektorn `t` innehåller precis som i förra veckans laboration de t_i-värden som `ode45` har valt.

Högre ordningens differentialekvationer

Exempel:

$$y''(x) = -\frac{12}{10}y(x)$$
$$y(0) = 0.1, y'(0) = 0, 0 \leq x \leq 10$$

För att kunna lösa den med `ode45` måste man skriva om den till ett system av första ordningen:

$$\text{Låt} \begin{cases} u_1(x) = y(x) \\ u_2(x) = y'(x) \end{cases}$$

$$\text{Vi får} \begin{cases} u_1'(x) = u_2(x) \\ u_2'(x) = -\frac{12}{10}u_1(x) \\ u_1(0) = 0.1, u_2(0) = 0 \end{cases}$$

Lös ekvationen på samma sätt som system av differentalekvationer.

```
% Formulera derivatorna:
f=@(t,u)[ u(2);
          -12/10*u(1) ];

% Startvärden:
u0=[0.1; 0];

% Anropa ode45 och rita ut lösningen:
[x,U] = ode45(f,[0,10],u0);

% Rita x och y(x) i figur 1
figure(1); plot(x,U(:,1));

% Rita ett fasporträtt i figur 2
figure(2); plot(U(:,1),U(:,2));
```

* Linjäritet mer formellt:
Låt $L(y) = a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y$. Differentialekvationen är linjär eftersom $L(y)$ satisfierar villkoren

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) \text{ och } L(K \cdot y) = K \cdot L(y), \text{ där } K \text{ är en konstant.}$$

Vi har

$$L(y_1 + y_2) = a(y_1 + y_2)'' + b(y_1 + y_2)' + c(y_1 + y_2) = ay_1'' + by_1' + cy_1 + ay_2'' + by_2' + cy_2 = L(y_1) + L(y_2)$$

Även det andra villkoret är uppfyllt eftersom

$$L(K \cdot y) = aKy'' + bKy' + cKy = K(ay'' + by' + cy) = K \cdot L(y)$$