Idag Inhomogen, linjär ekvation av andra ordningen med konstanta koefficienter.

$$a \cdot y''(x) + b \cdot y'(x) + c \cdot y(x) = G(x)$$

där $G(x) \neq 0$, kontinuerlig funktion.

Låt $L(y) = a \cdot y''(x) + b \cdot y'(x) + c \cdot y(x)$. När man löser $L(y) = G(x)$ utnyttjar man följande sats:

> Låt y_p vara en lösning till $L(y) = G(x)$. Då kan varje annan lösning skrivas
>
> $$y(x) = y_p + y_c$$
>
> där y_c är lösning till $L(y) = 0$. Och omvänt, varje sådan funktion $y(x)$ är en lösning till $L(y) = G(x)$

Så för att lösa $L(y) = G(x)$ behöver man bestämma:

1: Homogenlösning: Bestäm y_c, alla lösningar till $L(y) = 0$

2: Partikulärlösning: Bestäm y_p, en lösning till $L(y) = G(x)$.

Lösningen till $L(y) = G(x)$ ges av $y(x) = y_p + y_c$

Exempel: Lös $\quad y'' + y' - 2y = x^2$ (Exemplet finns i Stewart sid 1161)

1: Bestäm homogenlösning: Alla lösningar till $y'' + y' - 2y = 0$
Karekteristisk ekvation $r^2 + r - 2 = 0$, med rötterna $r_1 = 1, r_2 = -2$ ger lösningarna $y_c(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$, där c_1, c_2 konstanter. (se föreläsningen förra veckan om du inte kommer ihåg hur man gjorde)

2: Bestäm Partikulärlösning: Dvs. bestäm en lösning y_p till $y'' + y' - 2y = x^2$
Det finns lite olika metoder för att bestämma partikulärlösningar. Ofta ansätter man en lösning och bestämmer koefficienterna till denna genom att sätta in lösningen i diffekvationen. Om högerledet $(G(x))$ i differentialekvationen är ett polynom, exponentialfunktion eller sin/cos görs en ansats till lösning som ser ungefär likadan ut som högerledet. (Detta kommer att fungera eftersom derivatan av ett polynom är ett polynom, derivatan av exponentialekvationen är en exponentialekvation osv). Man måste dock se till att ansatsen man gör inte redan är en lösning till den homogena ekvationen.

Vi har högerledet x^2, dvs ett polynom och ansätter $y_p(x) = A_2x^2 + A_1x + A_0$, där A_2, A_1, A_0 är konstanter. (se polynomreceptet nedan).

Vi får $y_p'(x) = 2A_2x + A_1$ och $y_p''(x) = 2A_2$ och sätter in i differentialekvationen för att bestämma koefficienterna A_2, A_1, A_0.

$$y'' + y' - 2y = x^2 \Leftrightarrow 2A_2 + (2A_2x + A_1) - 2(A_2x^2 + A_1x + A_0) = x^2$$

$$\text{Dvs. } (-2A_2)x^2 + (2A_2 - 2A_1)x + (2A_2 + A_1 - 2A_0) = x^2$$

För att högerled och vänsterled ska vara lika måste $-2A_2 = 1$, $2A_2 - 2A_1 = 0$ och $2A_2 + A_1 - 2A_0 = 0$. Vi får alltså $A_2 = -\frac{1}{2}$, $A_1 = -\frac{1}{2}$ och $A_0 = -\frac{3}{4}$. Så $y_p(x) = A_2x^2 + A_1x + A_0 = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

Svar: $y(x) = y_p + y_c = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + c_1e^x + c_2e^{-2x}$

Polynomreceptet: Partikulärlösning till $y'' + ay' + by = G(x)$ där $G(x)$ är ett polynom av grad n.

- $b \neq 0$: Ansätt $y_p(x) = q(x)$
- $b = 0, a \neq 0$: Ansätt $y_p(x) = x \cdot q(x)$
- $b = 0, a = 0$: Ansätt $y_p(x) = x^2 \cdot q(x)$.

där $q(x) = A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_0$. Bestäm koefficienterna $A_n, A_{n-1}, \ldots, A_0$

Om högerledet istället är en exponetialfunktion kan man använda följande ansatser:

Partikulärlösning till $y'' + ay' + by = C \cdot e^{kx}$ där C konstant. Ansätt

- $y_p(x) = Ae^{kx}$ om k inte är rot till karekteristiska ekvationen.
- $y_p(x) = Axe^{kx}$ om k enkelrot till karekteristiska ekvationen.
- $y_p(x) = Ax^2e^{kx}$ om k dubbelrot till karekteristiska ekvationen.

och bestäm koefficienten A.

Exempel: Lös $y'' + 4y = e^{3x}$ (Exemplet finns i Stewart sid 1162)

Den karekteristiska ekvationen $r^2 + 4 = 0$ har rötterna $r_{1,2} = \pm 2i$. Vi får homogenlösningen $y_c(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$. $k = 3$ är inte en rot till karekteristiska ekvationen så vi ansätter partikulärlösning $y_p(x) = Ae^{3x}$ och får $y_p'(x) = 3Ae^{3x}$ och $y_p''(x) = 9Ae^{3x}$. Så

$$y_p'' + 4y_p = e^{3x} \Leftrightarrow 9Ae^{3x} + 4Ae^{3x} = e^{3x}$$

dvs. $13Ae^{3x} = e^{3x}$. Så $13A = 1$, dvs $A = \dfrac{1}{13}$. Vi får partikulärlösning $y_p(x) = \dfrac{1}{13}e^{3x}$.

Svar: $y(x) = y_c + y_p = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + \dfrac{1}{13}e^{3x}$

Om man har cos / sin i högerledet kan man använda sig av följande recept för att ansätta partikulärlösning:

Partikulärlösning till $y'' + ay' + by = \sin(mx)$ eller $y'' + ay' + by = \cos(mx)$

- Ansätt $y_p = A\cos(mx) + B\sin(mx)$ om rötterna till den karekteristiska ekvationen $\neq \pm im$
- Ansätt $y_p = x(A\cos(mx) + B\sin(mx))$ om rötterna till den karekteristiska ekvationen $= \pm mi$
- Bestäm sedan koefficienterna A och B.

Exempel: Bestäm partikulärlösning till $y'' + y = \cos(x)$

Den karekteristiska ekvationen $r^2 + 1 = 0$ har rötterna $\pm i$, så vi ansätter $y_p(x) = x(A\cos(x) + B\sin(x))$. Vi får

$$\begin{aligned}
y_p'(x) &= A\cos(x) + B\sin(x) + x(-A\sin(x) + B\cos(x)) \\
y_p''(x) &= -A\sin(x) + B\cos(x) + (-A\sin(x) + B\cos(x)) + x(-A\cos(x) - B\sin(x)) = -2A\sin(x) + 2B\cos(x) + x(-A\cos(x) - B\sin(x))
\end{aligned}$$

Därför är $y_p'' + y_p = -2A\sin(x) + 2B\cos(x)$. Välj A och B så att $-2A\sin(x) + 2B\cos(x) = \cos(x)$, dvs. $A = 0$ och $B = \dfrac{1}{2}$. Vi får $y_p = \dfrac{1}{2}x\sin(x)$

Exponentialreceptet lite mer allmänt: Partikulärlösning till $y'' + ay' + by = e^{kx}P(x)$ där där $P(x)$ polynom av grad n.

- Låt $y(x) = e^{kx}Q(x)$
- Beräkna y' och y'' och bestäm α och β så att $y'' + ay' + by = (Q'' + \alpha Q' + \beta Q)e^{kx}$
- Beräkna partikulärlösning Q_p till ekvationen $Q'' + \alpha Q' + \beta Q = P(x)$
- Vi får $y_p(x) = Q_p(x)e^{kx}$

Dugga

På tisdag 13/12 och onsdag 14/12 är det dugga. På kurshemsidan ser du vad som gäller och vilken tid respektive grupp har tilldelats.

Duggan består av 3 uppgifter. Den första uppgiften är en första ordningens linjär differentialekvation som (förslagsvis) löses med integrerande faktor. Den andra uppgiften är en andra ordningens inhomogen differentialekvation med konstanta koefficienter, som löses med metoderna i denna och förra föreläsningen. Den tredje uppgiften är en rotationsarea (mantelarea), se första föreläsningen, eller lab1. Uppgifterna är poängsatta 2/3/1, (dvs. första uppgiften ger 2 poäng, andra 3 poäng och 3:e 1 poäng). Man behöver få totalt 3 poäng för att klara duggan.

Det finns en övningsdugga (med lösning) på kursens hemsida. Titta gärna på den.