MVE465

Lösningar på övningsuppgifter

December 14, 2022

Jimmy Aronsson

Detta dokument innehåller mina renskrivna lösningar på övningsuppgifter i kursen *Linjär algebra och analys fortsättning* (MVE465). Jag har strukturerat dokumentet så att man först ser enbart uppgiften, och på nästa sida står samma uppgift tillsammans med lösningen. Detta upplägg gör det enkelt för er att själva prova på uppgifterna utan att ni råkar se delar av lösningen.

Jag kan inte lova att samtliga lösningar är välformulerade och pedagogiska, men förhoppningsvis är de flesta lösningar hjälpsamma.

Demonstrationsuppgifter markerade med $*$ demonstreras endast i mån av tid.

Innehållsförteckning

Uppgifter ur Adams & Essex

Övningstillfälle 1.1

Problem 2.10.6

Beräkna den indefinita integralen
$$\int x + \cos x \, \mathrm{d}x$$

Problem 2.10.6

Beräkna den indefinita integralen

$$\int x + \cos x \ \mathrm{d}x$$

Lösning: Uppgiften är med andra ord att finna en primitiv funktion till $f(x) = x + \cos x$, dvs. en funktion vars derivata är $f(x)$:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \sin x + C.$$

Problem 5.3.14

Uttryck gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} \ln\left(1 + \frac{2i}{n}\right)$$

som en integral.

Problem 5.3.14

Uttryck gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} \ln\left(1 + \frac{2i}{n}\right)$$

som en integral.

Lösning: Kom ihåg att integraler definieras som gränsvärden

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i,$$

Vi börjar därför med att skriva om summan i uppgiften på formen

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i.$$

Om vi sätter $x_i = \frac{2i}{n}$ så blir längden på varje delintervall $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{2i}{n} - \frac{2(i-1)}{n} = \frac{2}{n}$, och eftersom denna längd är oberoende av indexet i så gör vi oss av med det: $\Delta x = \frac{2}{n}$. Summan blir då

$$\sum_{i=1}^{n} \ln\Big(1 + x_i\Big)\Delta x \quad \to \quad \int_a^b \ln(1+x)\ \mathrm{d}x, \qquad (n \to \infty).$$

Det enda som återstår nu är att hitta integrationsgränserna a och b:

$$a = \lim_{n\to\infty} x_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0, \qquad \text{och} \qquad b = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n} = 2.$$

Vi drar slutsatsen att

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} \ln\left(1 + \frac{2i}{n}\right) = \int_0^2 \ln(1+x)\ \mathrm{d}x.$$

Problem 5.4.2

Förenkla uttrycket

$$\int_0^2 3f(x)\ \mathrm{d}x + \int_1^3 3f(x)\ \mathrm{d}x - \int_0^3 2f(x)\ \mathrm{d}x - \int_1^2 3f(x)\ \mathrm{d}x \tag{1}$$

Problem 5.4.2

Förenkla uttrycket

$$\int_0^2 3f(x)\ \mathrm{d}x + \int_1^3 3f(x)\ \mathrm{d}x - \int_0^3 2f(x)\ \mathrm{d}x - \int_1^2 3f(x)\ \mathrm{d}x \tag{2}$$

Lösning: Kom ihåg att integralen av en funktion över ett intervall $[a, b]$ ger arean mellan x-axeln och funktionens graf i detta intervall. Om två integraler $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ och $\int_b^c f(x)\ \mathrm{d}x$ har samma integrand $f(x)$ och de två intervallen $[a, b]$, $[b, c]$ ligger precis bredvid varandra (utan överlapp) så kan vi lägga ihop de två integralerna till en:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Detta betyder helt enkelt att den totala arean hos två separata regioner är lika med summan av respektive regions area. Se Figur 1.

Vi börjar med att subtrahera den fjärde integralen från den första integralen:

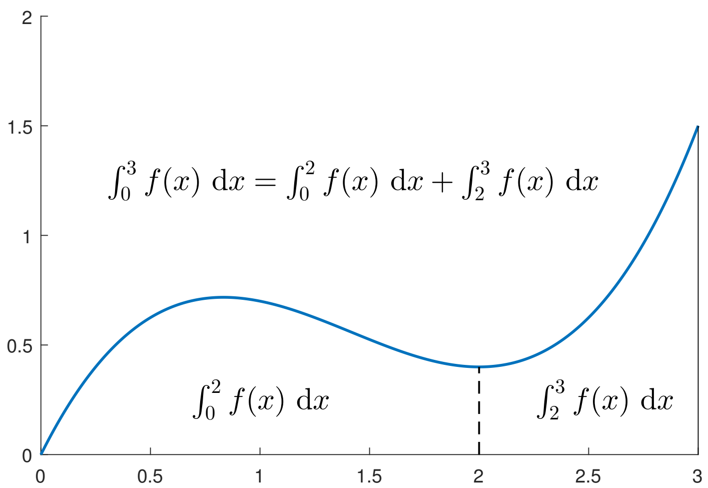
$$\int_0^2 3f(x)\ \mathrm{d}x - \int_1^2 3f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 3f(x)\ \mathrm{d}x$$

Eftersom denna integral täcker intervallet $[0, 1]$ och den andra integralen i ekvation (2) täcker intervallet $[1, 3]$, och de två integralerna har samma integrand, så kan vi addera dem:

$$\int_0^1 3f(x)\ \mathrm{d}x + \int_1^3 3f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^3 3f(x)\ \mathrm{d}x$$

Det enda som återstår är att subtrahera den tredje termen i ekvation (2):

$$(2) = \int_0^3 3f(x)\ \mathrm{d}x - \int_0^3 2f(x)\ \mathrm{d}x = 3 * \int_0^3 f(x)\ \mathrm{d}x - 2 * \int_0^3 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^3 f(x)\ \mathrm{d}x.$$



Figur 1: Arean mellan x-axeln och grafen till $f(x)$ i intervallet $[0, 3]$ kan fås genom att beräkna arean över delintervallen $[0, 2]$ och $[2, 3]$ var för sig, och sedan summera de två areorna. Detta faktum kan skrivas i termer av integraler som $\int_0^3 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x + \int_2^3 f(x)\ \mathrm{d}x$.

Problem 5.4.12*

Utvärdera integralen

$$\int_0^2 \sqrt{2x - x^2}\ \mathrm{d}x$$

genom att tolka integralen i termer av areor.

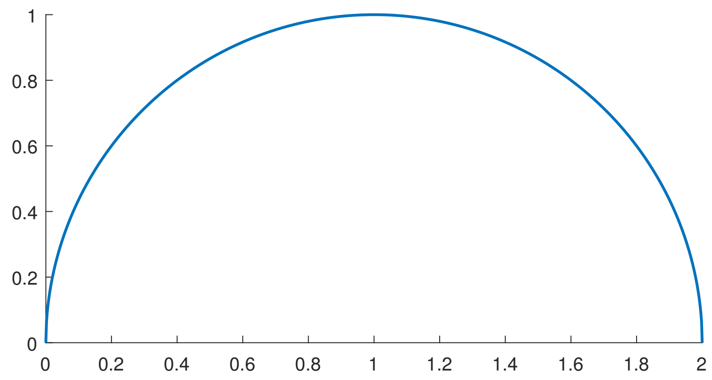
Problem 5.4.12*

Utvärdera integralen

$$\int_0^2 \sqrt{2x - x^2}\ \mathrm{d}x$$

genom att tolka integralen i termer av areor.

Lösning: Vi börjar med att plotta funktionen:



Figur 2

Som vi ser bildar denna graf en halvcirkel med radie $r = 1$, så

$$\int_0^2 \sqrt{2x - x^2}\ \mathrm{d}x = \mathrm{area}(halvcirkel) = \frac{1}{2} * \pi r^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Problem 5.4.34*

Beräkna integralen

$$\int_{-3}^{2} f(x)\ \mathrm{d}x$$

där den styckvis kontinuerliga funktionen f ges av

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x\ , & x < 0 \\ 2\ , & x \geq 0 \end{cases}$$

Problem 5.4.34*

Beräkna integralen

$$\int_{-3}^{2} f(x)\ \mathrm{d}x$$

där den styckvis kontinuerliga funktionen f ges av

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x\ , & x < 0 \\ 2\ , & x \geq 0 \end{cases}$$

Lösning: Vi delar upp integralen i två delar som låter oss utvärdera funktionen på varje del:

$$\int_{-3}^{2} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-3}^{0} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{2} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-3}^{0} (1 + x)\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{2} 2\ \mathrm{d}x.$$

Vi kan beräkna de två integralerna var för sig genom att plotta funktionerna, så som vi har gjort i tidigare uppgifter. Om man gör detta så får man att

$$\int_{-3}^{2} f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{5}{2}.$$

Problem 5.5.4

Beräkna integralen

$$\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) \, \mathrm{d}x.$$

Problem 5.5.4

Beräkna integralen

$$\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) \, \mathrm{d}x.$$

Lösning: Vi skriver om integranden med hjälp av negativa exponenter,

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} = x^{-2} - x^{-3},$$

och använder deriveringsregeln $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n = n x^{n-1}$ baklänges på respektive term för att hitta den primitiva funktionen:

$$F(x) = -x^{-1} + \frac{1}{2} x^{-2} + C = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C.$$

Integralen har därför värdet

$$\int_{-2}^{-1} x^{-2} - x^{-3} \, \mathrm{d}x = F(-1) - F(-2) = \left(1 + \frac{1}{2} + C \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + C \right) = \frac{7}{8}.$$

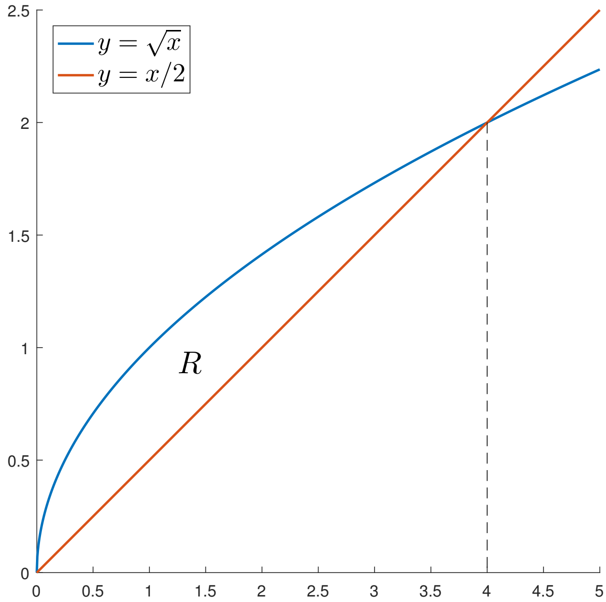
Problem 5.5.26

Beräkna arean av den region R som ligger under grafen $y = \sqrt{x}$ och över grafen $y = \frac{x}{2}$.

Problem 5.5.26

Beräkna arean av den region R som ligger under grafen $y = \sqrt{x}$ och över grafen $y = \frac{x}{2}$.

Lösning: Vi börjar med att plotta de två graferna för att se hur regionen R ser ut.



Vi ser att de två graferna skär varandra i punkterna $x = 0$ och $x = 4$, så dessa är våra integrtionsgränser. Arean av regionen R kan nu beräknas via följande process:

Steg 1. Beräkna arean mellan grafen $y = \sqrt{x}$ och x-axeln, det vill säga beräkna integralen

$$\int_0^4 \sqrt{x}\ \mathrm{d}x,$$

Steg 2. Beräkna arean mellan grafen $y = x/2$ och x-axeln, det vill säga beräkna integralen

$$\int_0^4 x/2\ \mathrm{d}x,$$

Steg 3. Notera att arean av regionen R är arean i **Steg 1.** minus arean i **Steg 2.**

$$\text{area}(R) = \int_0^4 \sqrt{x}\ \mathrm{d}x - \int_0^4 x/2\ \mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^4 - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^4 = \frac{4}{3}.$$

Problem 5.5.42*

Beräkan derivatan

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^2 \int_0^{x^2} \frac{\sin u}{u} \, \mathrm{d}u$$

Problem 5.5.42*

Beräkan derivatan

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^2 \int_0^{x^2} \frac{\sin u}{u}\ \mathrm{d}u$$

Lösning: Integralkalkylens huvudsats säger att

$$\int_0^{x^2} \frac{\sin u}{u}\ \mathrm{d}u = F(x^2) - F(0),$$

där $F(u)$ är en primitiv funktion till $f(u) = \frac{\sin u}{u}$. Produktregeln för derivator ger nu att

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^2 \int_0^{x^2} \frac{\sin u}{u}\ \mathrm{d}u &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^2 \Big(F(x^2) - F(0)\Big) = \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^2\right) \Big(F(x^2) - F(0)\Big) + x^2 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \Big(F(x^2) - F(0)\Big)\right) = \\
&= 2x\Big(F(x^2) - F(0)\Big) + x^2\Big(2xf(x^2) - 0\Big) = \\
&= 2x \int_0^{x^2} \frac{\sin u}{u}\ \mathrm{d}u + 2x^3 \frac{\sin\big(x^2\big)}{x^2} = \\
&= 2x \int_0^{x^2} \frac{\sin u}{u}\ \mathrm{d}u + 2x \sin x^2.
\end{aligned}$$

Mer än såhär kan vi inte förenkla, då den primitiva funktionen $F(u)$ inte har något enkelt uttryck.

Övningstillfälle 2.1

Problem 5.5.44

Beräkna derivatan

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\int_{\sin\theta}^{\cos\theta}\frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Problem 5.5.44

Beräkna derivatan

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\int_{\sin\theta}^{\cos\theta}\frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Lösning: Antag att integranden $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ har en primitiv funktion $F(x)$, det vill säga att

$$f(x) = F'(x).$$

Då kan derivatan i uppgiften skrivas på följande sätt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\int_{\sin\theta}^{\cos\theta}\frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(F(\cos\theta) - F(\sin\theta)\Big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}F(\cos\theta) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}F(\sin\theta).$$

Enligt kedjeregeln kan dessa derivator beräknas genom yttre och inre derivata,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}F(\cos\theta) = \underbrace{F'(\cos\theta)}_{\text{yttre}}\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta}_{\text{inre}} = -f(\cos\theta)\sin\theta = -\frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta} = -\frac{\sin\theta}{\sin^2\theta} = -\frac{1}{\sin\theta},$$

där vi har använt trigonometriska ettan i nämnaren:

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \iff 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta.$$

Genom exakt samma metod beräknar vi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}F(\sin\theta) = F'(\sin\theta)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta = f(\sin\theta)\cos\theta = \frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta} = \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta}.$$

Svaret på uppgiften är alltså

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\int_{\sin\theta}^{\cos\theta}\frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}F(\cos\theta) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}F(\sin\theta) = -\frac{1}{\cos\theta} - \frac{1}{\sin\theta}.$$

Notera att vi aldrig behövde ta reda på hur den primitiva funktionen $F(x)$ ser ut. Egentligen vet vi inte ens om den existerar. Vi använde den bara för att omformulera problemet och för att tillämpa kedjeregeln, efter det användes bara dess derivata $F'(x) = f(x)$.

Problem 5.6.4

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int e^{2x} \sin\big(e^{2x}\big)\ \mathrm{d}x.$$

Notera att ditt svar kan skilja sig från bokens svar på grund av olika val av integrationskonstant.

Problem 5.6.4

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int e^{2x} \sin\bigl(e^{2x}\bigr) \, \mathrm{d}x.$$

Notera att ditt svar kan skilja sig från bokens svar på grund av olika val av integrationskonstant.

Lösning: Svårigheten med denna uppgift är att integranden är en produkt, i detta fall av e^{2x} och $\sin\bigl(e^{2x}\bigr)$. När man *deriverar* en produkt av två funktioner så kan man alltid använda sig utav produktregeln, men när man *integrerar* en produkt av två funktioner så finns ingen systematisk metod som är garanterad att fungera. Här är två vanliga metoder som man kan testa:

1. Partialintegration,
2. Variabelsubstitution.

Vi kommer använda variabelsubstitutionen $u = e^{2x}$, dels för att faktorn $\sin\bigl(e^{2x}\bigr)$ får den enklare formen $\sin(u)$ och dels för att faktorn e^{2x} bakas in i längelementet:

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{2x} \, \mathrm{d}x = 2e^{2x} \, \mathrm{d}x.$$

Variabelsubstitutionen har alltså följande effekt på integralen:

$$\int e^{2x} \sin\bigl(e^{2x}\bigr) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \underbrace{\sin\bigl(e^{2x}\bigr)}_{\sin(u)} \underbrace{2e^{2x} \, \mathrm{d}x}_{\mathrm{d}u} = \frac{1}{2} \int \sin u \, \mathrm{d}u = -\frac{1}{2} \cos u + C = -\frac{1}{2} \cos\bigl(e^{2x}\bigr) + C.$$

Problem 5.6.16

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int \frac{x^2}{2+x^6}\, \mathrm{d}x.$$

Notera att ditt svar kan skilja sig från bokens svar på grund av olika val av integrationskonstant.

Problem 5.6.16

Utvärdera den indefinita integralen
$$\int \frac{x^2}{2+x^6}\,\mathrm{d}x.$$
Notera att ditt svar kan skilja sig från bokens svar på grund av olika val av integrationskonstant.

Lösning: Hur tänker man när man löser en sån här uppgift? Jag tänker att jag vill bli av med faktorn x^2 i täljaren, för man kan nog inte enkelt bli av med nämnaren. Så låt oss sätta $u = x^3$.

$$\int \frac{x^2}{2+x^6}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = x^3 \\ \mathrm{d}u = 3x^2\,\mathrm{d}x \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{2+u^2}\,\mathrm{d}u$$

Integralen påminner mycket om derivatan för arctan, vi behöver bara göra om tvåan i nämnaren till en etta. Ett sätt att göra detta är via en till variabelsubstitution som byter ut u^2 mot $2v^2$, varefter vi kan faktorisera ut en tvåa från hela nämnaren.

$$\frac{1}{3}\int \frac{1}{2+u^2}\,\mathrm{d}u = \begin{bmatrix} v = u/\sqrt{2} \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}u/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{3}\int \frac{1}{2+2v^2}\,\mathrm{d}v =$$
$$= \frac{1}{3\sqrt{2}}\int \frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{3\sqrt{2}}\arctan v + C = \frac{1}{3\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x^3}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

Problem 5.6.18*

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x + e^{-x}}.$$

Notera att ditt svar kan skilja sig från bokens svar på grund av olika val av integrationskonstant.

Problem 5.6.18*

Utvärdera den indefinita integralen
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x + e^{-x}}.$$
Notera att ditt svar kan skilja sig från bokens svar på grund av olika val av integrationskonstant.

Lösning: Det är inte uppenbart hur man löser denna uppgift, så låt oss helt enkelt testa något och se vad som händer.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x\ \mathrm{d}x}{e^{2x} + 1} = \begin{bmatrix} u = e^x \\ \mathrm{d}u = e^x\ \mathrm{d}x \end{bmatrix} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + 1} = \arctan u + C = \arctan e^x + C.$$

I det här fallet gick vårt experiment bra, men ibland får man testa flera olika saker innan man hittar en fungerande approach.

Problem 5.6.42*

Utvärdera integralen

$$\int_{\pi/4}^{\pi} \sin^5 x \ \mathrm{d}x.$$

Notera att ditt svar kan skilja sig från bokens svar på grund av olika val av integrationskonstant.

Problem 5.6.42*

Utvärdera integralen

$$\int_{\pi/4}^{\pi} \sin^5 x \; \mathrm{d}x.$$

Notera att ditt svar kan skilja sig från bokens svar på grund av olika val av integrationskonstant.

Lösning: Låt oss skriva om integranden med hjälp av trigonometriska ettan:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

vilket också kan skrivas som $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Vi kan därför göra omskrivningen

$$\sin^5 x = \sin^4 x \sin x = (\sin^2 x)^2 \sin x = \big(1 - \cos^2 x\big)^2 \sin x,$$

vilket ger integralen

$$\int_{\pi/4}^{\pi} \big(1-\cos^2 x\big)^2 \sin x \; \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \cos x \\ \mathrm{d}u = -\sin x \; \mathrm{d}x \end{bmatrix} = -\int_{1/\sqrt{2}}^{-1} (1-u^2)^2 \; \mathrm{d}u = \int_{-1}^{1/\sqrt{2}} (1-u^2)^2 \; \mathrm{d}u.$$

De nya integrationsgränserna är $u = \cos \pi/4 = 1/\sqrt{2}$ sam $u = \cos \pi = -1$, och vi har bytt ordning på dem så att vi integrerar från -1 tilll $1/\sqrt{2}$. Att byta ordning på integrationsgränserna inför ett minustecken som tar ut minustecknet från $\mathrm{d}u = -\sin x \; \mathrm{d}x$, så ovanstående ekvation är korrekt och vi kan nu beräkna integralen:

$$\int_{-1}^{1/\sqrt{2}} (1-u^2)^2 \; \mathrm{d}u = \int_{-1}^{1/\sqrt{2}} 1 - 2u^2 + u^4 \; \mathrm{d}u = \left[u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5\right]_{-1}^{1/\sqrt{2}} = \frac{43}{60\sqrt{2}} + \frac{8}{15}.$$

Problem 5.7.6

Sketcha och beräkna arean hos den region som bestäms av kurvorna

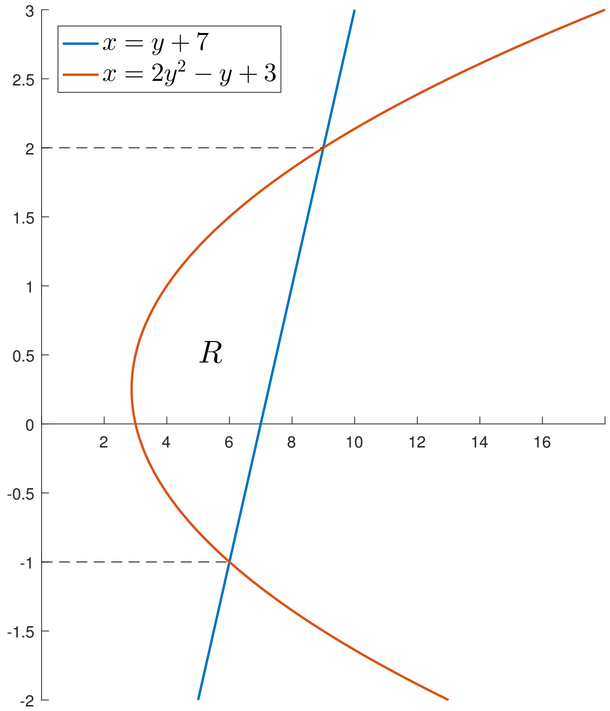
$$x - y = 7, \qquad x = 2y^2 - y + 3.$$

Problem 5.7.6

Sketcha och beräkna arean hos den region som bestäms av kurvorna

$$x - y = 7, \qquad x = 2y^2 - y + 3.$$

Lösning: Vi börjar med att sketcha de två kurvorna, för att se hur regionen i fråga ser ut:



Figur 3

Vi vet att en integral på formen $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ger arean mellan grafen till $f(x)$ och x-axeln, i intervallet $a \leq x \leq b$. På samma sätt ger integralen $\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y$ arean mellan grafen till $f(y)$ och y-axeln, i intervallet $a \leq y \leq b$. Vi kan därför beräkna arean av regionen R genom att först beräkna arean till vänster om linjen $f(y) = y + 7$ och sedan subtrahera arean till vänster om kurvan $g(y) = 2y^2 - y + 3$:

$$\mathrm{area}(R) = \int_a^b 7 + y\,\mathrm{d}y - \int_a^b 2y^2 - y + 3\,\mathrm{d}y = \int_a^b (7 + y) - (2y^2 - y + 3)\,\mathrm{d}y,$$

där integrationsgränserna a, b är de två punkter där kurvorna skär varandra:

$$7 + y = 2y^2 - y + 3 \quad \Longleftrightarrow \quad y^2 - y - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -1,\ y = 2.$$

Arean är alltså

$$\mathrm{area}(R) = \int_{-1}^{2} -2y^2 + 2y + 4\,\mathrm{d}y = \left[-\frac{2}{3}y^3 + y^2 + 4y\right]_{-1}^{2} = 9.$$

Problem 6.1.2

Beräkna integralen

$$\int (x+3)e^{2x}\ \mathrm{d}x.$$

Problem 6.1.2

Beräkna integralen

$$\int (x+3)e^{2x}\ \mathrm{d}x.$$

Lösning: Vi sätter

$$U(x) = x+3, \qquad V(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$$

och partialintegrerar:

$$\begin{aligned}
\int (x+3)e^{2x}\ \mathrm{d}x = \int U(x)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\ \mathrm{d}x = U(x)V(x) - \int \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}V(x)\ \mathrm{d}x = \\
= \frac{1}{2}(x+3)e^{2x} - \frac{1}{2}\int 1 * e^{2x}\ \mathrm{d}x = \\
= \frac{1}{2}(x+3)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C.
\end{aligned}$$

Problem 6.1.8

Beräkna integralen

$$\int x^2 \arctan x \, \mathrm{d}x.$$

Problem 6.1.8

Beräkna integralen

$$\int x^2 \arctan x \, \mathrm{d}x.$$

Lösning: Vi sätter

$$U(x) = \frac{1}{3}x^3, \qquad V(x) = \arctan x$$

och partialintegrerar:

$$\begin{aligned}
\int x^2 \arctan x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} V(x) \, \mathrm{d}x = U(x)V(x) - \int U(x)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \, \mathrm{d}x &= \\
= \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{3}\int x^3 \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x &= \\
= \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{3}\int x \frac{x^2}{1+x^2} \, \mathrm{d}x &= \\
= \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{3}\int x \frac{1+x^2-1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x &= \\
= \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{3}\int x \left(\frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right) \, \mathrm{d}x &= \\
= \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{3}\int x \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) \, \mathrm{d}x &= \\
= \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{3}\int x - \frac{x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x &= \\
= \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln\left(1+x^2\right) + C.&
\end{aligned}$$

Problem 6.1.14*

Beräkna integralen

$$\int x e^{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x.$$

Problem 6.1.14*

Beräkna integralen

$$\int xe^{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x.$$

Lösning: Denna uppgift är lite lurig, det känns naturligt att sätta $U(x) = x$ och $V(x) = e^{\sqrt{x}}$ men detta kommer inte fungera. Istället gör vi en variabelsubstitution:

$$\int xe^{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u^2 = x \\ 2u\ \mathrm{d}u = \ \mathrm{d}x \end{bmatrix} = 2\int u^3 e^u\ \mathrm{d}u = 2I_3,$$

där

$$\begin{aligned} I_n = \int u^n e^u\ \mathrm{d}u &= \begin{bmatrix} U = u^n, & V = e^u \\ \mathrm{d}U = nu^{n-1}\ \mathrm{d}u, & \mathrm{d}V = e^u\ \mathrm{d}u \end{bmatrix} = \\ &= \int U\ \mathrm{d}V = U(u)V(u) - \int V\ \mathrm{d}U = u^n e^u - nI_{n-1}. \end{aligned}$$

Vi får då att

$$\begin{aligned} &I_0 = e^u \\ \Rightarrow\ &I_1 = ue^u - e^u = (u-1)e^u \\ \Rightarrow\ &I_2 = u^2 e^u - 2(u-1)e^u = (u^2 - 2u + 2)e^u \\ \Rightarrow\ &I_3 = u^3 e^u - 3(u^2 - 2u + 2)e^u = (u^3 - 3u^2 + 6u - 6)e^u \end{aligned}$$

Svaret är med andra ord

$$\int xe^{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = 2(x\sqrt{x} - 3x + 6\sqrt{x} - 6)e^{\sqrt{x}}.$$

Problem 7.1.6

Låt R vara den tvådimensionella yta som begränsas av kurvorna $y = x$ och $y = x^2$. Beräkna volymen av den solid som erhålles om vi roterar ytan R ett varv runt

(a) x-axeln,

(b) y-axeln.

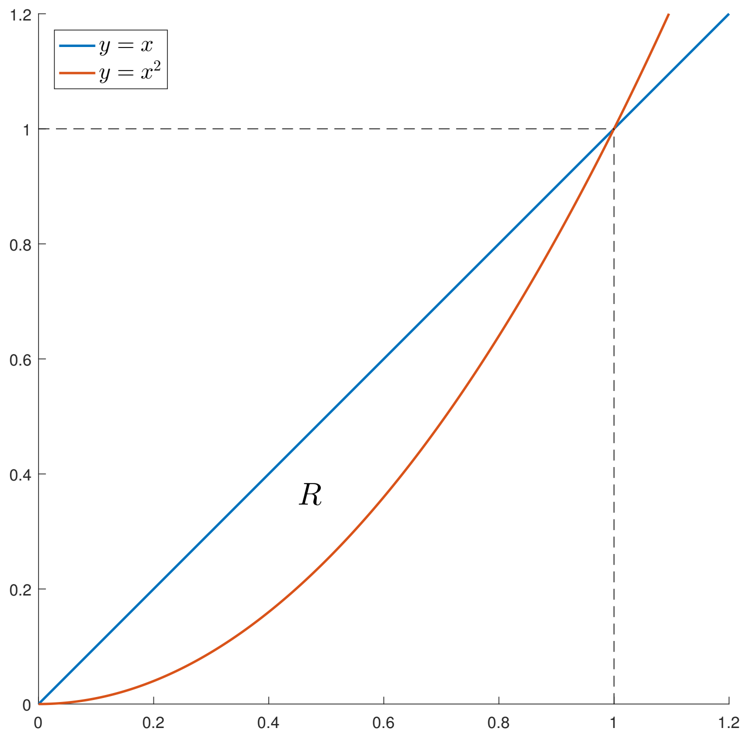
Problem 7.1.6

Låt R vara den tvådimensionella yta som begränsas av kurvorna $y = x$ och $y = x^2$. Beräkna volymen av den solid som erhålles om vi roterar ytan R ett varv runt

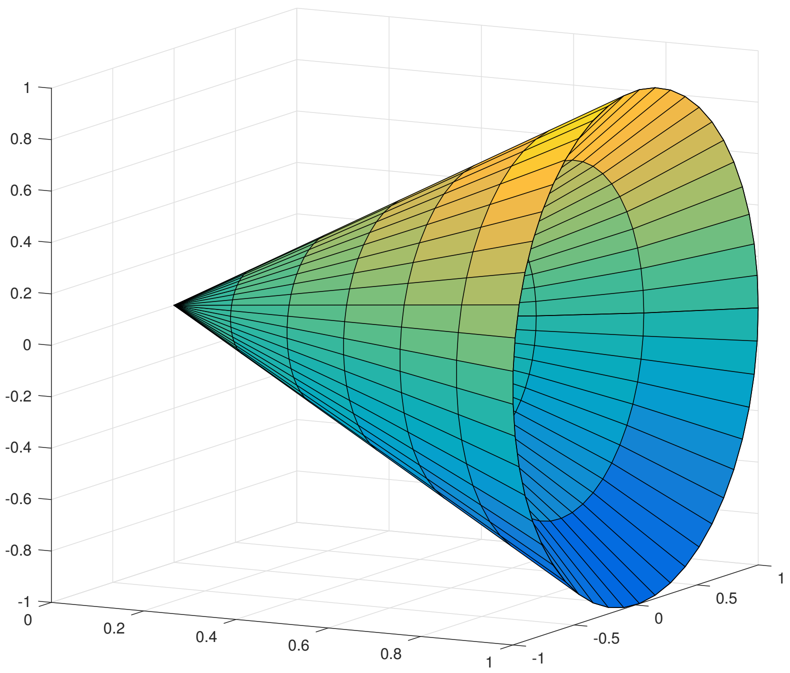
(a) x-axeln,

(b) y-axeln.

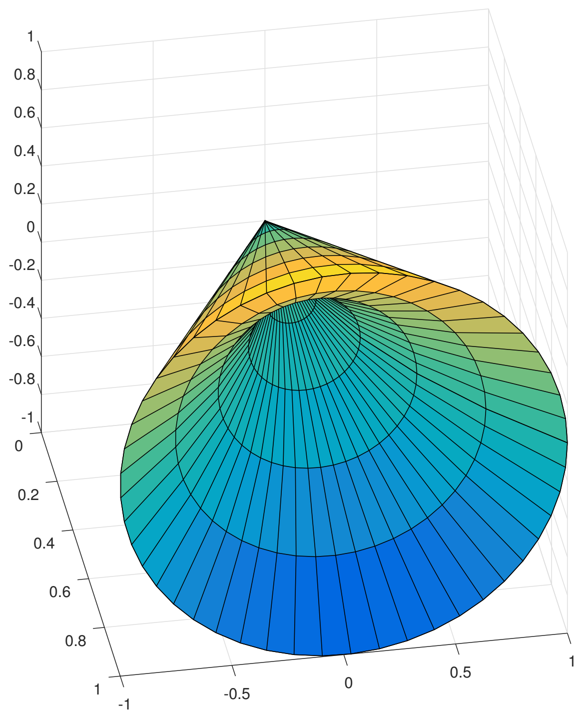
Lösning: Låt oss börja med att måla upp den aktuella regionen (Figur 4) och den solid som erhålls genom rotation kring x-axeln (Figurer 5-6).



Figur 4



Figur 5



Figur 6

I tidigare uppgifter har vi beräknat arean hos en tvådimensionell region R, begränsad av två stycken kurvor $y = f(x)$ och $y = g(x)$, genom att först beräkna arean under den översta kurvan och sedan subtrahera arean under den lägre kurvan. Här gör vi något liknande: först beräknar vi volymen hos den solid som erhålls när vi roterar den övre kurvan $y = x$ kring den valda axeln, sedan subtraherar vi volymen hos den solid som erhålls när vi roterar den nedre kurvan $y = x^2$ kring samma axel. Med andra ord beräknar vi volymen av konen i Figurerna 5-6 som om den vore en helt solid kon utan insida, och sedan subtraherar vi volymen av konens insida.

När vi roterar en kurva $f(x)$ kring x-axeln så bildas en cirkel för varje x-värde (Figur 7-8). Eftersom kurvan ligger på avståndet $f(x)$ från x-axeln så kommer motsvarande cirkel att ha radien $r = f(x)$ och ytarean $A(x) = \pi r^2 = \pi f(x)^2$. Volymen av soliden fås genom att "summera alla ytareaor", det vill säga genom att integrera över det aktuella intervallet:

$$V = \int_a^b A(x)\ \mathrm{d}x = \pi \int_a^b f(x)^2\ \mathrm{d}x.$$

Vi ska som sagt beräkna volymen mellan den kon som bildas när vi roterar $y = x$ kring x-axeln och den trumpetliknande yta som bildas när vi roterar $y = x^2$ kring samma axel. Volymen blir

$$V = \underbrace{\pi \int_0^1 x^2\ \mathrm{d}x}_{V_{\text{kon}}} - \underbrace{\pi \int_0^1 (x^2)^2\ \mathrm{d}x}_{V_{\text{trumpet}}} = \pi \int_0^1 x^2 - x^4\ \mathrm{d}x = \pi \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{2\pi}{15}.$$

När vi istället roterar ytan kring y-axeln så gör vi precis likadant men vi skriver om kurvorna som funktioner $x = f(y)$ och integrerar med avseende på y:

$$y = x \iff x = y, \qquad y = x^2 \iff x = \sqrt{y} \quad (x \geq 0).$$

Som vi ser skär de två kurvorna varandra i punkterna $y = 0$ respektive $y = 1$, så vi får samma integrationsgränser som ovan. Volymen blir

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{y})^2 - y^2\ \mathrm{d}y = \pi \left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

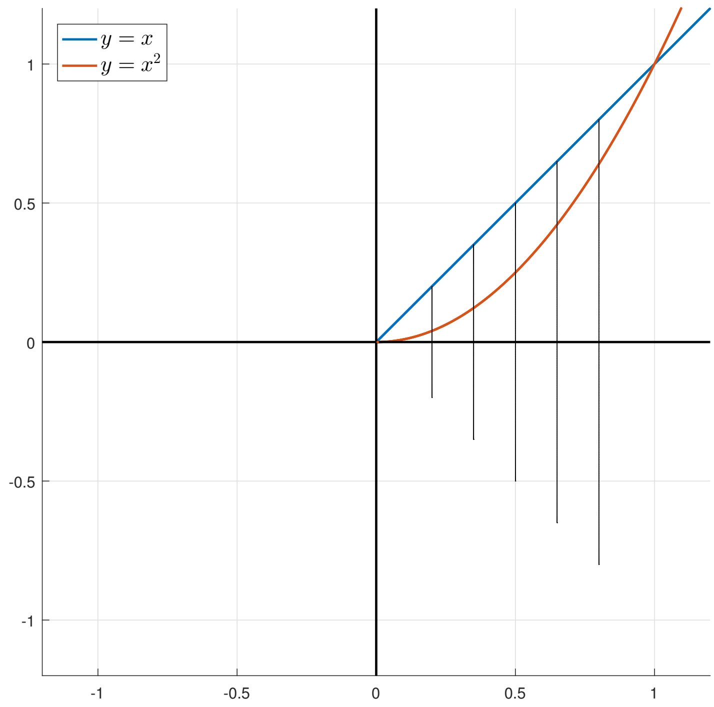
Ett snabbbare sätt att få samma svar är via integralen

$$2\pi \int_0^1 x(f(x) - g(x))\ \mathrm{d}x = 2\pi \int_0^1 x(x - x^2)\ \mathrm{d}x = 2\pi \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

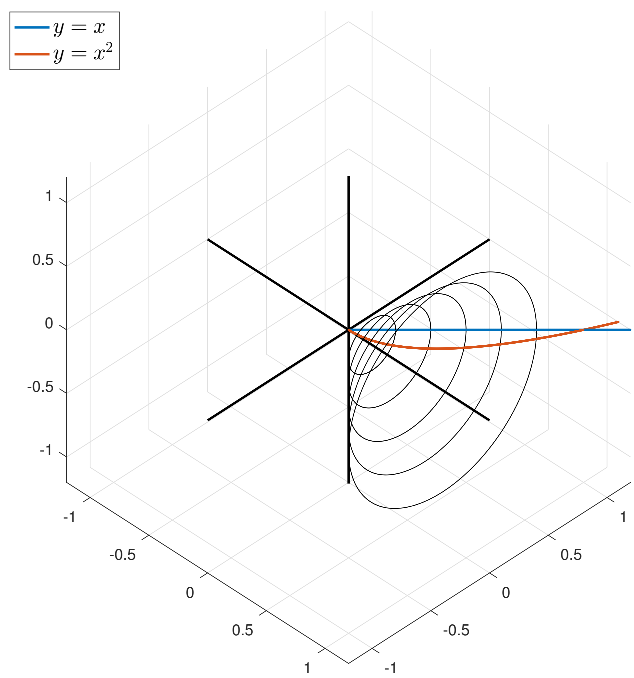
Denna metod är snabbare eftersom den inte kräver att vi skriver om kurvorna på formen $x = f(y)$ och hittar motsvarande integrationsgränser, men jag tycker det är svårare att visualisera hur denna metod fungerar. Idén är att vi för varje x bildar en cylinder med omkretsen $2\pi x$ och höjden $f(x)$, vilket ger ytarean $2\pi x f(x)$. Volymen av soliden fås sedan genom att "summera ihop" alla dessa ytareor, det vill säga integrera över x.

Ni är tillåtna att använda vilken metod ni vill.

Svar: Soliden som bildas när vi roterar kring x-axeln har volymen $\frac{2\pi}{15}$ och soliden som bildas när vi roterar kring y-axeln har volymen $\frac{\pi}{6}$.



Figur 7



Figur 8

Problem 7.1.12*

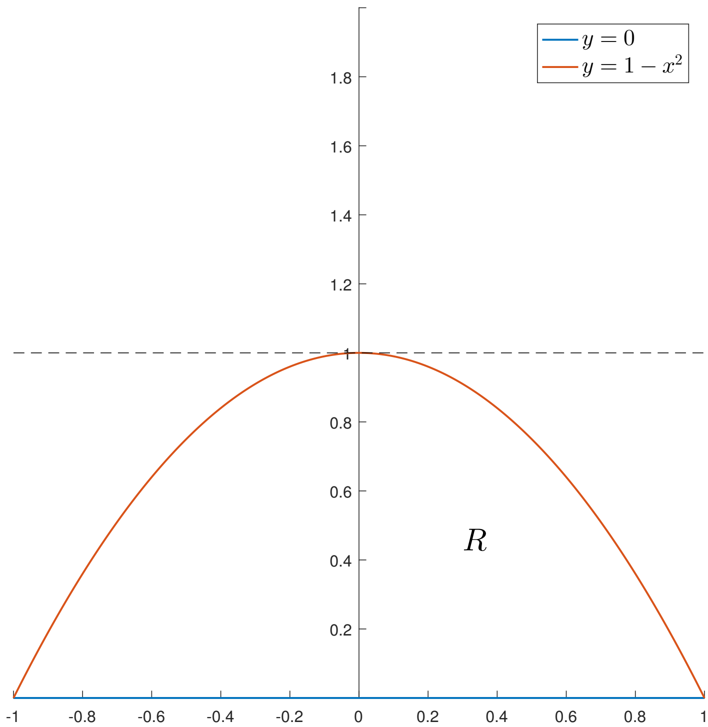
Beräkna volymen av den solid som bildas när vi roterar regionen $0 \leq y \leq 1 - x^2$ kring linjen $y = 1$.

Problem 7.1.12*

Beräkna volymen av den solid som bildas när vi roterar regionen $0 \leq y \leq 1 - x^2$ kring linjen $y = 1$.

Lösning: Ett sätt att lösa denna uppgift är att flytta integrationsaxeln till x-axeln via variabelsubstitutionen $u = y - 1$. Vi kan nu rotera regionen $-1 \leq u \leq -x^2$ kring linjen $u = 0$ (det vill säga x-axeln) och beräkna volymen precis som ovan:

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (-1)^2 - (-x^2)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \left[x - \frac{1}{5}x^5 \right]_{-1}^{1} = \frac{8\pi}{5}.$$



Figur 9

Övningstillfälle 2.2

Problem 7.2.2

Betrakta en solid med höjden h, och med egenskapen att tvärsnittet på höjden $0 < z < h$ är en rektangel med dimensionerna z och $h - z$. Finn solidens volym.

Problem 7.2.2

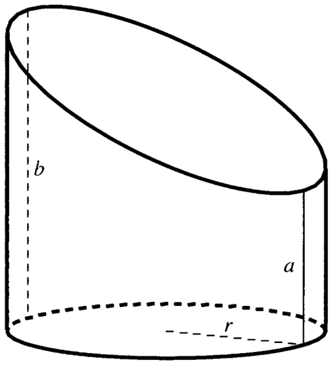
Betrakta en solid med höjden h, och med egenskapen att tvärsnittet på höjden $0 < z < h$ är en rektangel med dimensionerna z och $h - z$. Finn solidens volym.

Lösning: Föreställ er att ni skär ut en tunn slice av soliden, med tjocklek dz. Om tjockleken dz är tillräckligt liten så ser denna tunna slice ut som ett rätblock med sidlängderna z och $h - z$ samt tjockleken dz, så slicens volym är $dV = z(h - z)dz$. Om vi delar in hela soliden i såna slices och summerar de individuella volymerna så får vi volymen hos hela soliden, och när vi låter tjockleken dz gå mot 0 så blir summan en integral. Det följer att

$$V = \int_0^h z(h - z)dz = \int_0^h zh - z^2 dz = \left[\frac{1}{2}hz^2 - \frac{1}{3}z^3\right]_0^h = \frac{1}{2}h^3 - \frac{1}{3}h^3 = \frac{1}{6}h^3.$$

Problem 7.2.15*

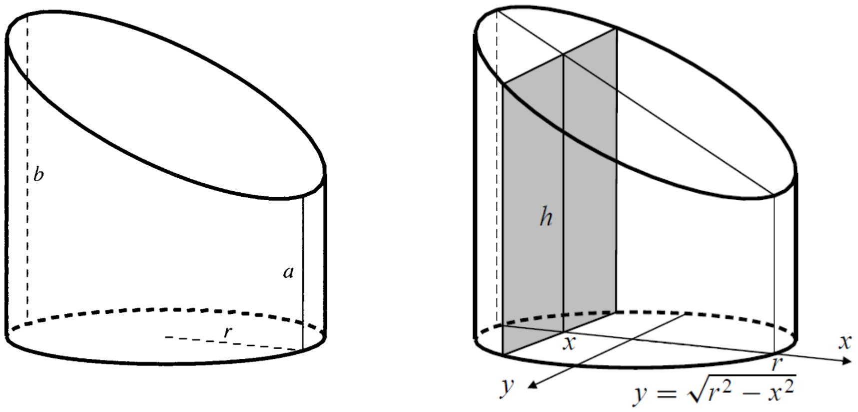
Betrakta en cirkulär cylinder med radie r, vars toppyta är ett lutande plan (Figur 11a). Om den lägsta och den högsta punkten på toppytan har höjden a respektive b, beräkna cylinderns volym.



Figur 10: Bild från sida 402 i kursboken.

Problem 7.2.15*

Betrakta en cirkulär cylinder med radie r, vars toppyta är ett lutande plan (Figur 11a). Om den lägsta och den högsta punkten på toppytan har höjden a respektive b, beräkna cylinderns volym.



(a) Bild från sida 402 i kursboken.

(b) Bild från *Instructor's Solution Manual.*

Figur 11

Lösning: Placera cylinderns mittpunkt i origo och vrid cylindern så att toppytans sluttning är parallell med x-axeln (Figur 11b). Notera att vi för varje x får en rektangel med någon bredd b och höjd h som båda beror av x. Cylinderns volym kan beräknas genom att summera ihop dessa rektanglars ytareor:

$$V = \int_{-r}^{r} b * h \, \mathrm{d}x.$$

Om cylindern har radie r så ligger x i intervalllet $-r \leq x \leq r$ och cylinderns höjd är en linjär funktion $h(x) = kx + m$. Eftersom vi har placerat cylindern med den högsta punkten längst till vänster ($x = -r$) och den lägsta punkten längst till höger ($x = r$) så får vi att

$$\begin{cases} a = h(r) = kr + m, \\ b = h(-r) = -kr + m \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{a-b}{2r}, \qquad m = \frac{a+b}{2}.$$

Höjden ges alltså av

$$h(x) = \frac{a-b}{2r}x + \frac{a+b}{2}.$$

Bredden fås genom cirkelns ekvation:

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad \Rightarrow \qquad y^2 = r^2 - x^2 \qquad \Rightarrow \qquad y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

och det framgår tydligt från Figur 11b rektangelns bredd är $b(x) = 2y = 2\sqrt{r^2 - x^2}$. Således är

$$V = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2} * \left(\frac{a-b}{2r}x + \frac{a+b}{2} \right) \mathrm{d}x = \int_{-r}^{r} (a+b)\sqrt{r^2 - x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi r^2 (a+b)}{2}.$$

Problem 7.3.5

Beräkna längden på kurvan $y^3 = x^2$ från punkten $(-1, 1)$ till $(1, 1)$.

Problem 7.3.5

Beräkna längden på kurvan $y^3 = x^2$ från punkten $(-1,1)$ till $(1,1)$.

Lösning: Vi börjar med att skriva om kurvan som $y = x^{2/3}$, vilket ger derivatan $y' = \frac{2}{3}x^{-1/3}$. Som beskrivs på sida 405 i boken kan vi betrakta längden som en "summa" av båglängder,

$$L = \int_{x=-1}^{x=1} \mathrm{d}s, \qquad \text{där} \qquad \mathrm{d}s = \sqrt{1+(y')^2}\ \mathrm{d}x = \sqrt{1+\frac{4}{9}x^{-2/3}}\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{9x^{2/3}+4}}{3|x|^{1/3}}\ \mathrm{d}x$$

så låt oss helt enkelt beräkna denna integral:

$$\begin{aligned} L &= \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{9x^{2/3}+4}}{3|x|^{1/3}}\ \mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{\sqrt{9x^{2/3}+4}}{3x^{1/3}}\ \mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} u = 9x^{2/3}+4 \\ \mathrm{d}u = 6x^{-1/3}\ \mathrm{d}x \end{array}\right] = \\ &= \frac{1}{9}\int_4^{13} \sqrt{u}\ \mathrm{d}u = \frac{2*13^{3/2}-16}{27}. \end{aligned}$$

Pedagogisk lösning: Föreställ dig en partikel som färdas längsmed kurvan och vid tiden t har koordinaterna

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t)) = (t, t^{2/3}), \qquad -1 \le t \le 1.$$

Tidsvariabeln t är inget annat än den ursprungliga variabeln x, vi har satt $t = x$. Anledningen varför vi byter ut x mot en tidsvariabel är för att enklare kunna visualisera vad som händer. Frågan *hur lång är kurvan?* kan nu översättas till frågan *hur långt färdas partikeln under tidsintervallet $-1 \le t \le 1$?* och svaret på denna fråga får vi genom att undersöka partikelns fart; om partikeln färdas i 1 m/s i två sekunder, 5 m/s i tre sekunder, 0.2 m/s i fem sekunder, och så vidare, så kan vi beräkna färdsträckan som

$$L = (1\ \text{m/s}\ *2\ \text{s}) + (5\ \text{m/s}\ *3\ \text{s}) + (0.2\ \text{m/s}\ *5\ \text{s}) + \cdots = \int_{-1}^{1} \text{partikelns fart}(t)\ \mathrm{d}t.$$

Partikelns hastighet ges av tidsderivatan

$$\boldsymbol{r}'(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = \left(1, \frac{2}{3}t^{-1/3}\right),$$

men vi är inte intresserade av vilken riktning partikeln färdas i, vi vill bara veta hur snabbt den färdas. Så vi beräknar farten som storleken på hastighetsvektorn:

$$\|\boldsymbol{r}'(t)\| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{4}{9}t^{-2/3}} = \frac{\sqrt{9t^{2/3}+4}}{3|t|^{1/3}}.$$

Svaret på uppgiften blir därför

$$\begin{aligned} L &= \int_{-1}^{1} \|\boldsymbol{r}'(t)\|\ \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{9t^{2/3}+4}}{3|t|^{1/3}}\ \mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{\sqrt{9t^{2/3}+4}}{3t^{1/3}}\ \mathrm{d}t = \left[\begin{array}{c} u = 9t^{2/3}+4 \\ \mathrm{d}u = 6t^{-1/3}\ \mathrm{d}t \end{array}\right] = \\ &= \frac{1}{9}\int_4^{13} \sqrt{u}\ \mathrm{d}u = \frac{2*13^{3/2}-16}{27}. \end{aligned}$$

Problem 7.3.8*

Beräkna längden på kurvan $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ från $x = 1$ till $x = 2$.

Problem 7.3.8*

Beräkna längden på kurvan $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ från $x = 1$ till $x = 2$.

Lösning: Precis som i föregående uppgift börjar vi med att beräkna derivatan $y' = x^2 - \frac{1}{4x^2}$ och båglängdselementet

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + \left(x^2 - \frac{1}{4x^2}\right)}\,\mathrm{d}x = \left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right)\,\mathrm{d}x.$$

Kurvlängden är integralen av detta båglängdselement:

$$L = \int_1^2 \mathrm{d}s = \int_1^2 x^2 + \frac{1}{4x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4x}\right]_1^2 = \frac{59}{24}.$$

Problem 7.3.20*

Beräkna ytarean hos den yta som bildas när vi roterar kurvan

$$y = x^2, \qquad 0 \leq x \leq 2$$

kring y-axeln.

Problem 7.3.20*

Beräkna ytarean hos den yta som bildas när vi roterar kurvan

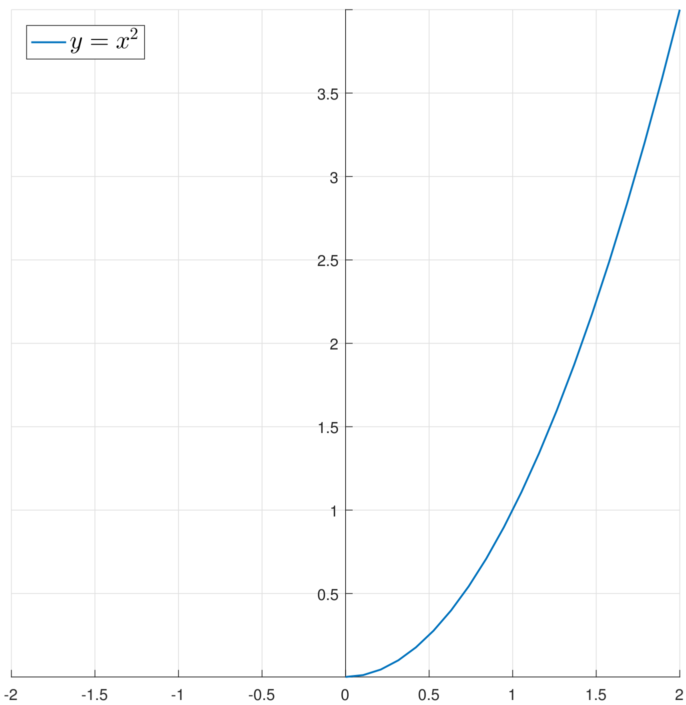
$$y = x^2, \qquad 0 \leq x \leq 2$$

kring y-axeln.

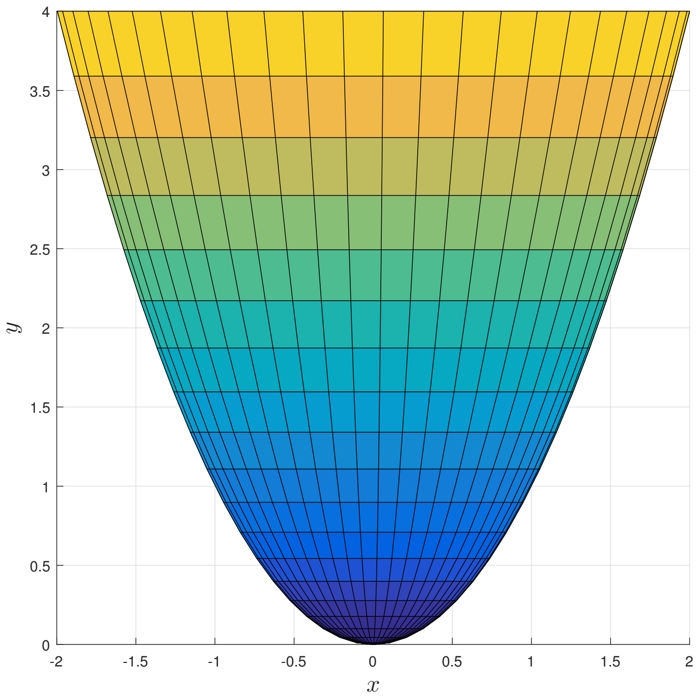
Lösning: Kurvan $y = x^2$ är en parabolisk kurva (Figur 12), så när vi roterar den kring y-axeln får vi en djup skål (Figur 13-14). Denna skål utgörs av ett oändligt antal cirklar som bildas genom att vi, för varje värde på x, tar punkten (x, x^2) och roterar den ett varv runt y-axeln. Eftersom varje sådan cirkels radie bestäms av x-värdet ($r = x$) så har cirkeln omkretsen $2\pi r = 2\pi x$. Vi kan beräkna ytarean genom att "summera" dessa omkretser samtidigt som vi tar i åtanke hur kurvan böjs när vi går uppåt (båglängden):

$$S = \int_0^2 2\pi x * \sqrt{1 + (y')^2}\, \mathrm{d}x = 2\pi \int_0^2 x\sqrt{1 + 4x^2}\, \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = 1 + 4x^2 \\ \mathrm{d}u = 8x \end{bmatrix} =$$

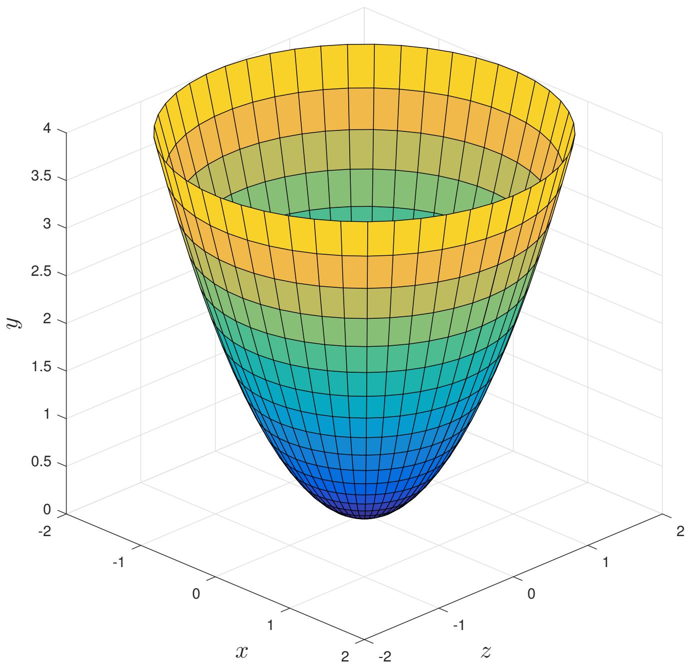
$$= \frac{\pi}{4} \int_1^9 \sqrt{u}\, \mathrm{d}u = \frac{\pi}{4} \left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_1^9 = \frac{13\pi}{3}.$$



Figur 12: Grafen till funktionen $y = x^2$ för $0 \leq x \leq 2$.



Figur 13



Figur 14

Problem 6.2.10

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int \frac{x \, \mathrm{d}x}{3x^2 + 8x - 3}$$

Problem 6.2.10

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int \frac{x\ \mathrm{d}x}{3x^2+8x-3}$$

Lösning: Vi börjar med att faktorisera nämnaren i integranden,

$$3x^2+8x-3=(3x-1)(x+3)$$

och skriva om integranden på formen

$$\begin{aligned}\frac{x}{3x^2+8x-3} &= \frac{A}{3x-1}+\frac{B}{x+3}= \\ &= \frac{A(x+3)}{(3x-1)(x+3)}+\frac{B(3x-1)}{(x+3)(3x-1)}= \\ &= \frac{A(x+3)+B(3x-1)}{3x^2+8x-3}.\end{aligned}$$

Vi behöver alltså hitta konstanter A och B som uppfyller ovanstående ekvation:

$$\begin{aligned}\frac{x}{3x^2+8x-3}=\frac{A(x+3)+B(3x-1)}{3x^2+8x-3} \quad &\Rightarrow \quad x=A(x+3)+B(3x-1) \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad x=(A+3B)x+(3A-B) \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad A+3B=1 \text{ och } 3A-B=0 \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad A=\frac{1}{10} \text{ och } B=\frac{3}{10}.\end{aligned}$$

Det följer att

$$\int \frac{x\ \mathrm{d}x}{3x^2+8x-3}=\frac{1}{10}\int \frac{1}{3x-1}+\frac{3}{x+3}\ \mathrm{d}x=\frac{1}{30}\ln|3x-1|+\frac{3}{10}\ln|x+3|+C.$$

Problem 6.2.20

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3 + 2x^2 + 2x}$$

Problem 6.2.20

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3 + 2x^2 + 2x}$$

Lösning: Vi kan faktorisera ut ett x från nämnaren men mer än så går inte att faktorisera, eftersom polynomets två andra rötter är komplexa. Så vi vill skriva om integranden på formen

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3 + 2x^2 + 2x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 2} \quad &\Rightarrow \quad 1 = A(x^2 + 2x + 2) + (Bx + C)x \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad 1 = (A + B)x^2 + (2A + C)x + 2A \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2},\ C = -1. \end{aligned}$$

Det följer att[1]

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^3 + 2x^2 + 2x} &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} - \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 2}\, \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{4} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2}\, \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2}\, \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = x + 1 \\ \mathrm{d}u = 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{4} \ln|x^2 + 2x + 2| - \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2 + 1}\, \mathrm{d}u = \\ &= \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{4} \ln|x^2 + 2x + 2| - \frac{1}{2} \arctan(x + 1) + D. \end{aligned}$$

[1] Vi använder bokstaven D för integrationskonstanten eftersom bokstaven C redan används.

Problem 6.2.28*

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$$

Problem 6.2.28*

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$$

Lösning: Vi gör om integranden till en rationell funktion genom att sätta $u = \sin\theta$,

$$\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)} = \begin{bmatrix} u = \sin\theta \\ \mathrm{d}u = \cos\theta\ \mathrm{d}\theta \end{bmatrix} = \int \frac{\mathrm{d}u}{(1-u^2)(1+u)} = \int \frac{\mathrm{d}u}{(1-u)(1+u)^2},$$

och i vanlig ordning skriver vi om integranden som en summa av enklare rationella funktioner:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-u)(1+u)^2} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} + \frac{C}{(1+u)^2} \quad &\Rightarrow \quad 1 = A(u^2+2u+1) + B(1-u^2) + C(1-u) \quad \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad 1 = (A-B)u^2 + (2A-C)u + (A+B+C) \quad \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad A-B=0,\ 2A-C=0,\ A+B+C=1 \quad \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad A = \frac{1}{4},\ B = \frac{1}{4},\ C = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Det följer att[2]

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}u}{(1-u)(1+u)^2} &= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}u}{1-u} + \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{(1+u)^2} = \\
&= -\frac{1}{4}\ln|1-u| + \frac{1}{4}\ln|1+u| - \frac{1}{2}\frac{1}{1+u} + D = \\
&= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| - \frac{1}{2(1+u)} + D = \\
&= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right| - \frac{1}{2(1+\sin\theta)} + D.
\end{aligned}$$

[2]Vi använder bokstaven D för integrationskonstanten eftersom bokstaven C redan används.

Problem 6.3.2*

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Problem 6.3.2*

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}}\ \mathrm{d}x.$$

Lösning: När man ser ett uttryck på formen $\sqrt{1-g(x)^2}$ så är det ofta användbart att tänka på trigonometriska ettan:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \iff \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \quad \iff \quad \cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}.$$

Man kan därför testa att göra variabelsubstitutionen $g(x) = \sin u$, vilket i vårt fall blir $2x = \sin u$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}}\ \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} 2x = \sin u \\ 2\ \mathrm{d}x = \cos u\ \mathrm{d}u \end{bmatrix} &= \int \frac{\frac{1}{4}\sin^2 u}{\cos u} * \frac{1}{2}\cos u\ \mathrm{d}u = \\
&= \frac{1}{8}\int \sin^2 u\ \mathrm{d}u = \\
&= \frac{1}{16}\int (1-\cos 2u)\ \mathrm{d}u = \\
&= \frac{u}{16} - \frac{\sin 2u}{32} + C = \\
&= \frac{1}{16}\arcsin 2x - \frac{1}{16}\sin u \cos u + C = \\
&= \frac{1}{16}\arcsin 2x - \frac{1}{8}x\sqrt{1-4x^2} + C.
\end{aligned}$$

Problem 6.3.5*

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{9-x^2}}.$$

Problem 6.3.5*

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{9-x^2}}.$$

Lösning: I detta fall sätter vi $x = 3\sin\theta$ för att roten i nämnaren ska bli $3\cos\theta$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{9-x^2}} = \left[\begin{array}{c} x = 3\sin\theta \\ \mathrm{d}x = 3\cos\theta\ \mathrm{d}\theta \end{array}\right] = \frac{1}{9}\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta} = -\frac{1}{9}\cot\theta + C = -\frac{1}{9}\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} + C.$$

Problem 6.3.44*

Använd substitutionen $x = \tan(\theta/2)$ för att beräkna integralen

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 + \cos\theta + \sin\theta}.$$

Problem 6.3.44*

Använd substitutionen $x = \tan(\theta/2)$ för att beräkna integralen

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 + \cos\theta + \sin\theta}.$$

Lösning: Vi gör helt enkelt som uppgiften säger. Kom ihåg relationen mellan tan, cos, och sin,

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$

vilket kan användas för att hitta uttryck för $\cos\theta$ och $\sin\theta$ i termer av $x = \tan(\theta/2)$:

$$x^2 = \tan^2(\theta/2) = \frac{\sin^2(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2)} = \frac{1 - \cos^2(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2)} = \frac{1}{\cos^2(\theta/2)} - 1.$$

Genom att kasta om termerna i denna ekvation, samt tillämpa formeln för halva vinkeln[3], får vi

$$\frac{1}{1 + x^2} = \cos^2(\theta/2) = [\text{halva vinkeln}] = \frac{1 + \cos\theta}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \cos\theta = 1 - \frac{2}{1 + x^2} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$

Att extrahera ett uttryck för $\sin\theta$ är enklare, tack vare trigonometriska ettan:

$$\sin\theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta} = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{4x^2}{(1 + x^2)^2}} = \pm\frac{2x}{1 + x^2}.$$

Dessutom är $\sin\theta$ ickenegativt på det aktuella intervallet $\theta \in [0, \pi/2]$, så vi kan sudda ut $\pm$ ovan. Det följer att

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 + \cos\theta + \sin\theta} = \begin{bmatrix} x = \tan\frac{\theta}{2}, & \cos\theta = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \\ \mathrm{d}\theta = \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, & \sin\theta = \frac{2x}{1+x^2} \end{bmatrix} = \\
&= \int_0^1 \frac{\left(\frac{2}{1+x^2}\right)\,\mathrm{d}x}{1 + \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) + \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)} = \\
&= \int_0^1 \frac{\left(\frac{2}{1+x^2}\right)\,\mathrm{d}x}{\left(\frac{(1+x^2)+(1-x^2)+(2x)}{1+x^2}\right)} = \\
&= \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}x}{(1 + x^2) + (1 - x^2) + (2x)} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1 + x} = \Big[\ln|1 + x|\Big]_0^1 = \ln 2.
\end{aligned}$$

[3] https://sv.wikipedia.org/wiki/Lista_%C3%B6ver_trigonometriska_identiteter#Halva_vinkeln

Problem 6.5.8

Utvärdera integralen

$$\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x.$$

Problem 6.5.8

Utvärdera integralen

$$\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\ \mathrm{d}x.$$

Lösning: Vi börjar med att beräkna den indefinita integralen:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\ \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x = 1-u^2 \\ \mathrm{d}x = -2u\ \mathrm{d}u \end{bmatrix} &= -2\int \frac{1}{1-u^2}\ \mathrm{d}u = \\ &= -2\int \frac{1}{(1+u)(1-u)}\ \mathrm{d}u = [\text{partialbråksuppdelning}] \\ &= -\int \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\ \mathrm{d}u \\ &= -\ln|1+u| + \ln|1-u| + C.\end{aligned}$$

De två integrationsgränserna är $x = 0 \Rightarrow u = 1$ och $x = 1 \Rightarrow u = 0$ så svaret borde vara

$$\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\ \mathrm{d}x = \Big[-\ln|1+u| + \ln|1-u| + C \Big]_1^0,$$

men vi kan inte utvärdera den primitiva funktionen eftersom $\ln|u-1|$ är odefinierad för $u = 1$. Det hjälper inte att betrakta gränsvärdet

$$\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\ \mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 1^-} \int_0^{\epsilon} \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\ \mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 1^-} \Big[-\ln|1+u| + \ln|1-u| + C \Big]_{\epsilon}^0,$$

eftersom $\ln|1-u| \to -\infty$ när $\epsilon \to 1^-$. Integralen divergerar helt enkelt.

Problem 6.5.10

Utvärdera integralen

$$\int_0^\infty xe^{-x}\ \mathrm{d}x$$

Problem 6.5.10

Utvärdera integralen

$$\int_0^\infty xe^{-x}\ \mathrm{d}x$$

Lösning: Vi skriver om integralen som ett gränsvärde och partialintegrerar:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty xe^{-x}\ \mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R xe^{-x}\ \mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} U = x, & V = -e^{-x} \\ \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = 1, & \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = e^{-x}\end{bmatrix} = \\ &= \lim_{R\to\infty}\left(\left[-xe^{-x}\right]_0^R + \int_0^R e^{-x}\right) = \\ &= \lim_{R\to\infty}\left(\frac{-R}{e^R} - \frac{1}{e^R} + 1\right) = 1.\end{aligned}$$

Integralen konvergerar.

Övningstillfälle 3.1

Problem 19.1.4

Klassificera differentialekvationen

$$y''' + xy' = x \sin x.$$

Problem 19.1.4

Klassificera differentialekvationen
$$y''' + xy' = x \sin x.$$

Lösning: Detta är en *linjär* differentialekvation, eftersom vänsterledet endast innehåller linjära termer i y; ekvationen innehåller inte några ickelinjära termer som $(y')^2$ eller e^y eller $y''y$. Detta är en viktig egenskap, det finns mycket kraftfulla verktyg för att lösa linjära differentialekvationer, till skillnad från de mycket mer komplicerade ickelinjära differentialekvationerna.

Linjära differentialekvationer delas upp i två kategorier: *Homogena* och *ickehomogena*, beroende på om ekvationens högerled $= 0$ eller $\neq 0$. Högerledet i vår ekvation, $x \sin x$, är förstås nollskilt och ekvationen är därför ickehomogen.

Slutligen noterar vi att ekvationen är av tredje ordningen, eftersom den innehåller tredjederivatan av y. Alltså är ekvationen en tredje ordningens, ickehomogen, linjär differentialekvation.

Anmärkning: Anledningen varför vi delar upp linjära ekvationer i homogena och ickehomogena ekvationer är att, om y_1, y_2 är lösningar på den homogena motsvarigheten av vår ekvation,

$$y''' + xy' = 0,$$

så kommer en godtycklig linjärkombination $Ay_1 + By_2$ också vara en lösning:

$$(Ay_1 + By_2)''' + x(Ay_1 + By_2)' = A\underbrace{(y_1''' + xy_1')}_{=0} + B\underbrace{(y_2''' + xy_2')}_{=0} = 0,$$

men detsamma är inte sant för ickehomogena ekvationer: Om y_1 och y_2 löser den ickehomogena ekvationen $y''' + xy' = x \sin x$ så kommer en godtycklig linjärkombination $Ay_1 + By_2$ uppfylla

$$(Ay_1 + By_2)''' + x(Ay_1 + By_2)' = A\underbrace{(y_1''' + xy_1')}_{=x \sin x} + B\underbrace{(y_2''' + xy_2')}_{=x \sin x} = (A + B)x \sin x,$$

vilket bara är en lösning på den ickehomogena ekvationen om $A + B = 1$. Godtyckliga linjärkombinationer kommer alltså inte lösa ekvationen om ekvationens högerled är nollskilt, dvs. om ekvationen är ickehomogen. Däremot kommer *skillnaden* mellan två godtyckliga ickehomogena lösningar, $y_h = y_2 - y_1$, vara en lösning på den *homogena* ekvationen:

$$y_h''' + xy_h' = (y_2 - y_1)''' + x(y_2 - y_1)' = \underbrace{(y_2''' + xy_2')}_{=x \sin x} - \underbrace{(y_1''' + xy_1')}_{=x \sin x} = 0.$$

Detta faktum,

> *Skillnaden $y_h = y_2 - y_1$, mellan två godtyckliga lösningar på den ickehomogena ekvationen, löser den homogena ekvationen.*

kan omformuleras på följande sätt:

> *Om vi finner både (1) en ("partikulär")lösning y_p på den ickehomogena ekvationen, samt (2) den allmänna lösningen y_h på motsvarande homogena ekvation, så kommer den allmänna lösningen på den ickehomogena ekvationen vara summan $y = y_p + y_h$.*

vilket vi kommer använda oss mycket av.

Problem 19.1.6

Klassificera differentialekvationen

$$y'' + 4y' - 3y = 2y^2$$

Problem 19.1.6

Klassificera differentialekvationen

$$y'' + 4y' - 3y = 2y^2$$

Lösning: Vi skriver om ekvationen så att alla termer innehållandes y hamnar i vänsterledet:

$$y'' + 4y' - 3y - 2y^2 = 0.$$

Detta är en ickelinjär andra ordningens differentialekvation, eftersom den innehåller andraderivatan av y och den ickelinjära termen y^2 gör ekvationen ickelinjär. Observera att vi inte säger något om homogenitet eftersom homogenitet bara är relevant för linjära ekvationer.

Anmärkning: I föregående uppgifts anmärkning förklarade vi skillnaden mellan homogena och ickehomogena linjära ekvationer, samt relationen mellan dem: Om vi har två lösningar y_1, y_2 på en homogen linjär ekvation så kommer en godtycklig linjärkombination $Ay_1 + By_2$ också vara en lösning, men detsamma är inte sant för ickehomogena ekvationer. Däremot kan man hitta den allmänna lösningen y på en ickehomogen ekvation genom att först hitta en partikulärlösning y_p och den allmänna lösningen y_h på motsvarande homogena ekvation, och helt enkelt addera dem:

$$y = y_p + y_h.$$

När det kommer till ickelinjära differentialekvationer, däremot, finns det ingen särskild anledning varför en linjärkombination $Ay_1 + By_2$ av två lösningar y_1, y_2 skulle vara en ny lösning, oavsett om ekvationens högerled $= 0$ eller $\neq 0$. Hela idén med linjärkombinationer av lösningar faller när ekvationen är ickelinjär, och indelningen i homogena vs. ickehomogena ekvationer förlorar därmed sitt syfte. Homogenitet är alltså inte ett relevant koncept när ekvationen är ickelinjär.

Problem 2.10.40*

Finn lösningen på begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' = 5x^2 - 3x^{-1/2} \\ y'(1) = 2 \\ y(1) = 0 \end{cases}.$$

På vilket intervall gäller denna lösning?

Problem 2.10.40*

Finn lösningen på begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' = 5x^2 - 3x^{-1/2} \\ y'(1) = 2 \\ y(1) = 0 \end{cases}.$$

På vilket intervall gäller denna lösning?

Lösning: Vänsterledet innehåller bara andraderivatan y'', vilket ju är derivatan av y', så om vi integrerar båda sidor erhåller vi förstaderivatan:

$$y' = \int y'' \, \mathrm{d}x = \int 5x^2 - 3x^{-1/2} \, \mathrm{d}x = \frac{5}{3}x^3 - 6x^{1/2} + C.$$

Vi kan även använda begynnelsevillkoret $y'(1) = 2$ för att hitta värdet på konstanten C:

$$2 = y'(1) = \frac{5}{3} - 6 + C \quad \Rightarrow \quad C = 8 - \frac{5}{3} = \frac{19}{3}.$$

Lösningen y finner vi på samma sätt:

$$y = \int y' \, \mathrm{d}x = \int \frac{5}{3}x^3 - 6x^{1/2} + \frac{19}{3} \, \mathrm{d}x = \frac{5}{12}x^4 - 4x^{3/2} + \frac{19}{3}x + D,$$

där konstanten D ges av begynnelsevillkoret $y(1) = 0$:

$$0 = y(1) = \frac{5}{12} - 4 + \frac{19}{3} + D \quad \Rightarrow \quad D = 4 - \frac{5}{12} - \frac{19}{3} = \frac{48 - 5 - 76}{12} = -\frac{33}{12} = -\frac{11}{4}.$$

Lösningen på begynnelsevärdesproblemet är alltså

$$y = \frac{5}{12}x^4 - 4x^{3/2} + \frac{19}{3}x - \frac{11}{4}.$$

Funktionen och dess derivator är definierade för alla positiva x-värden, men försöker vi mata in negativa x-värden så uppstår problem med komplexa kvadratrötter. Dessutom existerar $3x^{-1/2}$ inte för $x = 0$, så lösningen gäller bara på intervallet $(0, \infty)$.

Problem 3.4.12

Om halveringstiden för radium är 1690 år, hur stor andel av den nuvarande mängden kommer finnas kvar efter (a) 100 år? (b) 1000 år?

Problem 3.4.12

Om halveringstiden för radium är 1690 år, hur stor andel av den nuvarande mängden kommer finnas kvar efter (a) 100 år? (b) 1000 år?

Lösning: Låt $P(t)$ vara andelen radium som återstår efter t år, så att $P(0) = P_0 = 1$ eftersom andelen som återstår efter 0 år är 100%. Sönderfallshastigheten $P'(t)$ är proportionell mot den andel radium som återstår, $P'(t) = kP(t)$ för någon proportionalitetskonstant k. Detta innebär exempelvis att om vi dubblar mängden radium så kommer dubbelt så mycket att sönderfalla varje år, vilket känns ganska rimligt. Vi hittar alltså $P(t)$ genom att lösa begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} P'(t) = kP(t) \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

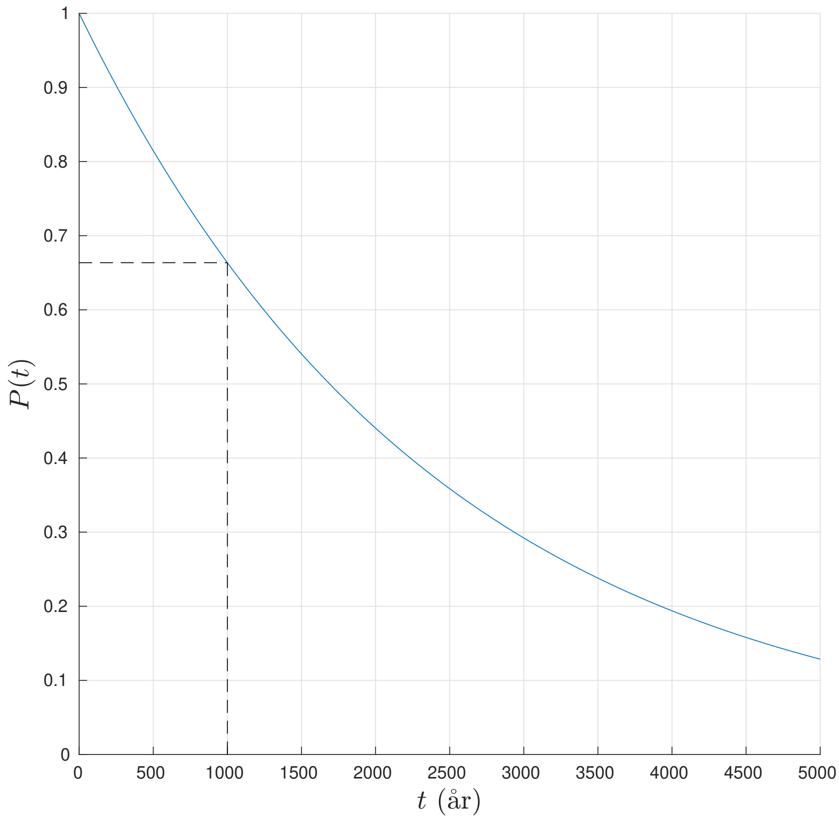
Detta är en standardekvation med lösningen $P(t) = P_0 e^{kt} = e^{kt}$. Vi kan även finna konstanten k eftersom vi vet halveringstiden: Andelen radium som återstår efter 1690 år ska vara 50%, så

$$\frac{1}{2} = P(1690) = e^{1690k} \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{1}{2} = 1690k \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\ln(1/2)}{1690} = -\frac{\ln 2}{1690}.$$

Andelen radium som återstår efter t år ges alltså av funktionen $P(t) = e^{-\frac{\ln(2)t}{1690}}$, och

$$P(100) = e^{100k} = e^{-\frac{100}{1690}\ln(2)} \approx 0.96, \qquad P(1000) = e^{1000k} = e^{-\frac{1000}{1690}\ln(2)} \approx 0.66$$

Efter 100 år återstår 96% av den ursprungliga mängden radium, och efter 1000 år återstår 66%.



Problem 3.4.26*

Ett objekt placeras i en frys som håller en konstant temperatur av $-5°\text{C}$. Om objektet kyls ned från $45°\text{C}$ till $20°\text{C}$ på 40 minuter, hur många fler minuter tar det att kyla ner objektet till $0°\text{C}$?

Problem 3.4.26*

Ett objekt placeras i en frys som håller en konstant temperatur av $-5°$C. Om objektet kyls ned från $45°$C till $20°$C på 40 minuter, hur många fler minuter tar det att kyla ner objektet till $0°$C?

Lösning: Låt $T(t)$ vara objektets temperatur t minuter efter att dess temperatur var $45°$C. Med andra ord är $T(0) = 45$ och $T(40) = 20$. Hastigheten med vilken temperaturen sjunker ges av *Newton's law of cooling*:

> "A hot object introduced into a cooler environment will cool at a rate proportional to the excess of its temperature above that of its environment."

(Sida 185 i min upplaga av kursboken.)

Omgivningen utgörs av frysen, som har temperaturen $-5°$C. Hastigheten med vilken objektets temperatur sjunker, $T'(t)$, är alltså proportionell mot skillnaden $T(t) - (-5)$ mellan objektets och omgivningens temperatur:

$$T'(t) = k(T(t) + 5)$$

för någon konstant k. Om vi sätter $u(t) = T(t) + 5$ får vi alltså begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = ku \\ u(0) = 50 \end{cases}$$

Själva differentialekvationen har lösningen $u = Ce^{kt}$ och begynnelsevärdet ger oss värdet på C:

$$50 = u(0) = Ce^0 = C, \qquad \Rightarrow \qquad u(t) = 50e^{kt}.$$

Vi kan dessutom lista ut k eftersom vi vet temperaturen efter $t = 40$ minuter:

$$25 = u(40) = 50e^{40k} \quad \Rightarrow \quad 40k = \ln\frac{25}{50} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{40}\ln\frac{1}{2} = -\frac{1}{40}\ln(2).$$

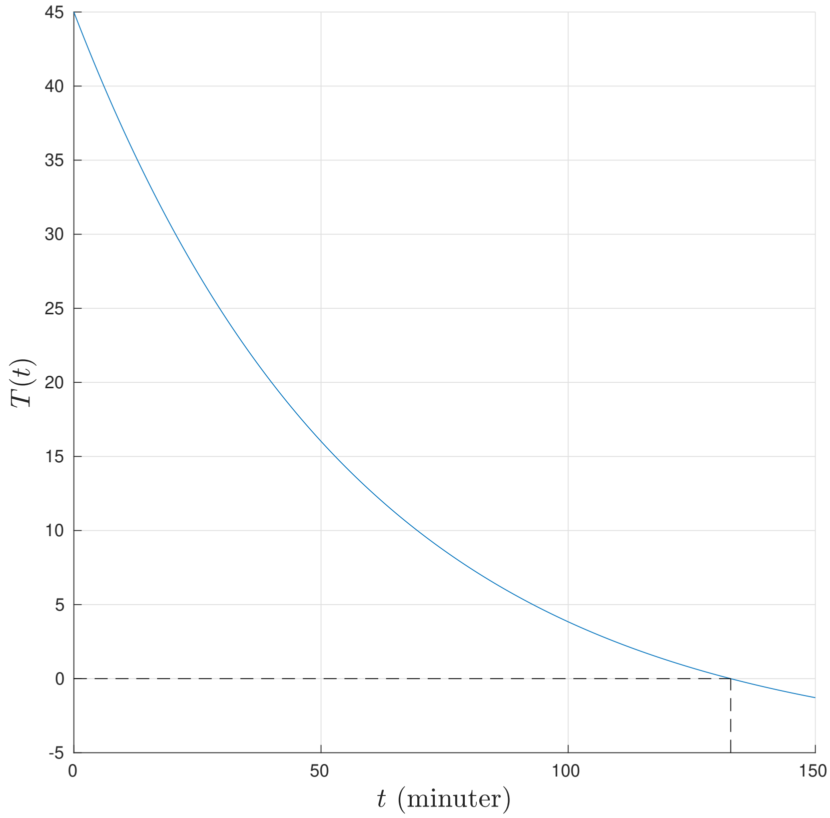
Nu kan vi allt om funktionen $u(t)$ och det är dags att lösa uppgiften. Vi vill beräkna den tid t för vilken temperaturen $T(t) = 0$, det vill säga $u(t) = 5$. Vi får att

$$5 = u(t) = 50e^{kt} \quad \Rightarrow \quad kt = \ln\frac{5}{50} \quad \Rightarrow t = \frac{1}{k}\ln\frac{1}{10} = -40\frac{\ln(1/10)}{\ln(2)} \approx 132.88 \text{ minuter.}$$

Temperaturen ges alltså av funktionen

$$T(t) = u(t) - 5 = 50e^{-\frac{\ln(2)t}{40}} - 5,$$

och det tar ytterligare ca. $132.88 - 40 = 92.88$ minuter att kyla ned objektet till $0°$C.


$T(t)$
t (minuter)
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
-5
0
50
100
150

Problem 7.9.6

Lös den separabla ekvationen

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = e^x \sin t.$$

Problem 7.9.6

Lös den separabla ekvationen

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = e^x \sin t.$$

Lösning: Vi flyttar över alla x till vänsterledet och alla t till högerledet,

$$e^{-x}\ \mathrm{d}x = \sin t\ \mathrm{d}t$$

och integrerar på båda sidor:

$$\int e^{-x}\ \mathrm{d}x = \int \sin t\ \mathrm{d}t \qquad \Longleftrightarrow \qquad -e^{-x} = -\cos t + C.$$

Multiplicera båda sidor med -1 och ta logaritmen på båda sidor. Det följer att[4]

$$x(t) = -\ln(\cos t + C).$$

[4]Man kan tycka att svaret borde vara $x(t) = -\ln(\cos t - C)$, men eftersom konstanten C är godtycklig så spelar dess tecken ingen roll och vi föredrar plustecken.

Problem 7.9.16*

Lös den separabla ekvationen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2e^x y = e^x.$$

Problem 7.9.16*

Lös den separabla ekvationen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2e^x y = e^x.$$

Lösning: Vi flyttar över alla y till vänsterledet och alla x till högerledet,[5]

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^x(1-2y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{1-2y}\ \mathrm{d}y = e^x\ \mathrm{d}x,$$

och integrerar på båda sidor:

$$\int \frac{1}{1-2y}\ \mathrm{d}y = \int e^x\ \mathrm{d}x \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{1}{2}\ln|1-2y| = e^x + C.$$

Notera absolutbeloppet i vänsterledet. Om vi nu exponentierar båda sidor får vi relationen

$$\begin{aligned} |1-2y| = e^{-2e^x+C} \quad &\Rightarrow \quad 1-2y = \pm e^{-2e^x+C} \\ &\Rightarrow \quad y = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}e^{-2e^x+C} = \frac{1}{2} + \left(\pm\frac{1}{2}e^C\right)e^{-2e^x} = \frac{1}{2} + De^{-2e^x}, \end{aligned}$$

där vi har satt $D = \pm\frac{1}{2}e^C$. Svaret är således

$$y = \frac{1}{2} + De^{-2e^x}.$$

Konstanten C som vi fick tidigare kan anta vilket värde som helst. En omedelbar konsekvens är att konstanten $D = +\frac{1}{2}e^C$ kan anta vilket positivt värde som helst, och konstanten $D = -\frac{1}{2}e^C$ kan anta vilket negativt värde som helst. Dessutom kan vi testa vad som händer om $D = 0$, dvs. om $y = \frac{1}{2}$. Då blir

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2e^x y = 0 + 2e^x\frac{1}{2} = e^x,$$

så $y = \frac{1}{2}$ är också en lösning på ekvationen; anledningen varför vi inte fann denna lösning tidigare är att metoden vi använde krävde att uttrycket $\frac{1}{1-2y}$ existerar, vilket inte stämmer om $y = \frac{1}{2}$. Resultatet av denna diskussion är att värdet på konstanten D inte spelar någon roll, funktionen

$$y = \frac{1}{2} + De^{-2e^x}$$

löser ekvationen för alla värden på D.

[5] Ekvivalensen utgår från att uttrycket $\frac{1}{1-2y}$ existerar, dvs att $y \neq \frac{1}{2}$. Mer om detta i slutet av lösningen.

Problem 7.9.18

Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 3x^2y = x^2 \\ \qquad\quad y(0) = 1 \end{cases}$$

Problem 7.9.18

Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 3x^2y = x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Lösning: Vi börjar med att separera variablerna,[6]

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2(1-3y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{1-3y}\ \mathrm{d}y = x^2\ \mathrm{d}x,$$

och integrera båda sidor:

$$\int \frac{1}{1-3y}\ \mathrm{d}y = \int x^2\ \mathrm{d}x \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{1}{3}\ln|1-3y| = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

Det följer att $|1-3y| = e^{-x^3+C}$, vilket låter oss lösa ut y på samma sätt som i föregående uppgift:

$$y = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{3}e^{-x^3+C} = \frac{1}{3} + \left(\pm\frac{1}{3}e^C\right)e^{-x^3} = \frac{1}{3} + De^{-x^3},$$

där vi har satt $D = \pm\frac{1}{3}e^C$. Begynnelsevärdet ger i detta fall ett specifikt värde på konstanten:

$$1 = y(0) = \frac{1}{3} + D \quad \Rightarrow \quad D = \frac{2}{3},$$

så lösningen är alltså

$$y = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-x^3}.$$

[6] Denna gång antar vi att $y \neq \frac{1}{3}$.

Övningstillfälle 3.2

Problem 3.7.4

Hitta den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$4y'' - 4y' - 3y = 0.$$

Problem 3.7.4

Hitta den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$4y'' - 4y' - 3y = 0.$$

Lösning: Vi vill undersöka om ekvationen har en lösning på formen $y = e^{rt}$. I så fall är

$$\begin{aligned} 0 &= 4y'' - 4y' - 3y \\ &= 4\left(e^{rt}\right)'' - 4\left(e^{rt}\right)' - 3\left(e^{rt}\right) \\ &= 4r^2e^{rt} - 4re^{rt} - 3e^{rt} = (4r^2 - 4r - 3)e^{rt}. \end{aligned}$$

Om en produkt försvinner (dvs. är lika med noll), så måste minst en av faktorerna i produkten försvinna, vilket alltså innebär att $4r^2 - 4r - 3 = 0$ och/eller $e^{rt} = 0$. Men en exponential som e^{rt} kan inte försvinna, så det måste vara polynomet som försvinner:

$$4r^2 - 4r - 3 = 0, \qquad \Longleftrightarrow \qquad r^2 - r - \frac{3}{4} = 0.$$

För att hitta lösningar $y = e^{rt}$ på differentialekvationen behöver vi alltså bara finna polynomets rötter, vilket vi kan göra med PQ-formeln eller valfri annan metod:

$$r = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{1} \qquad \Rightarrow \qquad r_1 = -\frac{1}{2}, \quad r_2 = \frac{3}{2}.$$

Vi har med andra ord funnit de två lösningarna

$$y = e^{-\frac{1}{2}t} \qquad \text{och} \qquad y = e^{\frac{3}{2}t}.$$

Ekvationen är dessutom linjär, vilket innebär att alla linjärkombinationer

$$y = Ae^{-\frac{1}{2}t} + Be^{\frac{3}{2}t}$$

är lösningar. Faktum är att samtliga lösningar kan skrivas på denna form, det finns inga andra lösningar. Den som vill försöka bevisa detta faktum kan ta sig en titt på Problem 3.7.18 i boken.

Problem 3.7.14

Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' + 10y' + 25y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 2 \end{cases}$$

Problem 3.7.14

Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' + 10y' + 25y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 2 \end{cases}$$

Lösning: Precis som i föregående uppgift söker vi efter lösningar på formen $y = e^{rt}$. Vi får att

$$\begin{aligned} 0 &= y'' + 10y' + 25y = \\ &= \left(e^{rt}\right)'' + 10\left(e^{rt}\right)' + 25\left(e^{rt}\right) = \\ &= r^2e^{rt} + 10re^{rt} + 25e^{rt} = (r^2 + 10r + 25)e^{rt}, \end{aligned}$$

vilket, enligt samma logik som i föregående uppgift, implicerar att polynomet försvinner:

$$0 = r^2 + 10r + 25 = (r + 5)^2.$$

Detta polynom har den enda roten $r = -5$. Den allmänna lösningen är därför på formen

$$y = Ae^{-5t} + Bte^{-5t}.$$

För att förstå varifrån koeffcienten Bt kommer, se **CASE II** i början av sektion 3.7 i kursboken.

Om uppgiften bara hade varit att lösa differentialekvationen $y'' + 10y' + 25y = 0$ så hade vi varit klara nu. Uppgiften ber oss dock inte att hitta den *allmänna* lösningen, men den *specifika* lösning som dessutom uppfyller begynnelsevillkoren $y(1) = 0$ och $y'(1) = 2$. Dessa villkor kommer ge oss specifika värden på koefficienterna A och B. För att hitta dessa värden så beräknar vi derivatan av den allmänna lösningen,

$$y' = -5Ae^{-5t} + (1 - 5t)Be^{-5t}$$

och sätter sedan in $t = 1$ i våra uttryck för den allmänna lösningen och dess derivata:

$$\begin{cases} 0 = y(1) = Ae^{-5} + Be^{-5} = (A + B)e^{-5} \\ 2 = y'(1) = -5Ae^{-5} - 4Be^{-5} = (-5A - 4B)e^{-5} \end{cases}$$

Vänsterledet i respektive rad är det värde som uppgiften säger att lösningen/derivatan ska anta, medan högerledet är det värde vi faktiskt får när vi sätter in $t = 1$. Allt vi behöver göra nu är att finna de koefficienter A och B för vilka vänster- och högerleden sammanfaller, vilket innebär att vi behöver lösa ekvationssystemet:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -5A - 4B = 2e^5 \end{cases}$$

Den första ekvationen säger att $B = -A$, och om vi nu ersätter B med $-A$ i den andra ekvationen så får vi relationen

$$-5A + 4A = 2e^5 \quad\Longleftrightarrow\quad A = -2e^5.$$

Alltså är $B = -A = 2e^5$, så lösningen på vårt begynnelsevärdesproblem är

$$y = -2e^{-5(t-1)} + 2te^{-5(t-1)} = 2(t - 1)e^{-5(t-1)}.$$

Problem 3.7.24*

Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -5 \end{cases}$$

Bestäm lösningens vinkelfrekvens, frekvens, period och amplitud.

Problem 3.7.24*

Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -5 \end{cases}$$

Bestäm lösningens vinkelfrekvens, frekvens, period och amplitud.

Lösning: Än en gång testar vi att ansätta $y = e^{rt}$, vilket ger ekvationen

$$0 = y'' + 4y = \left(e^{rt}\right) + 4\left(e^{rt}\right) = r^2e^{rt} + 4e^{rt} = (r^2+4)e^{rt}.$$

Den resulterande andragradsekvationen $r^2+4=0$ är på formen $ar^2+br+c=0$ för koefficenterna $a=1$, $b=0$, $c=4$. Eftersom $b^2-4ac=-16<0$ befinner vi oss den situation som boken kallar **Case III**, och lösningen är därför på formen[7]

$$y = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t),$$

för några konstanter A, B och någon vinkelfrekvens ω. Notera att

$$y'' = -\omega^2 A\cos(\omega t) - \omega^2 B\sin(\omega t) = -\omega^2 y, \qquad \Rightarrow \qquad y'' + \omega^2 y = 0,$$

från vilket vi drar slutsatsen att $\omega^2 = 4$. Detta skulle kunna innebära antingen att $\omega = -2$ eller att $\omega = +2$ men det visar sig att båda alternativen ger upphov till exakt samma lösning, så det spelar ingen roll vilket alternativ vi väljer. Av ren konvention väljer vi därför den positiva vinkelfrekvensen $\omega = 2$. Begynnelsevillkoren säger oss även att

$$\begin{cases} 2 = y(0) = A\cos(0) + B\sin(0) = A*1 + B*0 = A, \\ -5 = y'(0) = -\omega A\sin(0) + \omega B\cos(0) = -\omega A*0 + \omega B*1 = \omega B = 2B, \end{cases}$$

vilket innebär att $A = 2$ och $B = -\frac{5}{2}$. Den allmänna lösningen är således

$$y = 2\cos(2t) - \frac{5}{2}\sin(2t).$$

Definitionerna av de fyra kvantiteterna som vi ska beräkna står i slutet av Sektion 3.7 i kursboken, den del som handlar om *harmonisk rörelse*. Jag rekommenderar er varmt att läsa denna sektion och försöka förstå innebörden hos de fyra termerna, de är viktiga såväl inom fysik som inom kemi och många andra områden; den så kallade *harmoniska oscillatorn* är troligen en av de viktigaste modellerna inom modern naturvetenskap.

- **Amplituden** är $R = \sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{4+25/4} = \sqrt{41}/2$.
- **Vinkelfrekvensen** är $\omega = 2$.
- **Perioden** är $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.
- **Frekvensen** är $1/T = 1/\pi$.

[7]**Möjligen överkurs:** Denna metod skiljer sig från tidigare lösningars metod därför att polynomet r^2+4 har komplexa rötter. Det går visserligen att lösa differentialekvationen ändå, med precis samma metod som i tidigare uppgifter, och få en lösning på formen

$$y = Ce^{r_1 t} + De^{r_2 t},$$

där r_1, r_2 är polynomets komplexa rötter: $r_1 = x_1 + iy_1$ och $r_2 = x_2 + iy_2$. Via Eulers identitet,

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t),$$

kan man sedan skriva om denna komplexa lösning på formen vi använder: $y = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$. Boken tar helt enkelt en genväg och går omedelbart till denna alternativa form på lösningen, så man slipper göra omskrivningar.

Problem 19.6.4

Finn den allmänna lösningen på differentialekvationen

$$y'' + y' - 2y = e^x \tag{3}$$

via metoden om obestämda koefficienter.

Problem 19.6.4

Finn den allmänna lösningen på differentialekvationen

$$y'' + y' - 2y = e^x \tag{4}$$

via metoden om obestämda koefficienter.

Lösning: Denna ekvation är en linjär, ickehomogen differentialekvation. Kom ihåg, från bokens kapitel 18.6, att den allmänna lösningen kan skrivas som summan $y = y_p + y_h$ av en godtyckligt vald partikulärlösning y_p, och den allmänna lösningen y_h på den homogena motsvarigheten av samma ekvation. Vi börjar med att lösa den homogena ekvationen

$$y_h'' + y_h' - 2y_h = 0. \tag{5}$$

När vi ansätter $y_h = e^{rt}$ får vi, precis som i tidigare uppgifter, en polynomekvation:

$$r^2 + r - 2 = 0 \quad\iff\quad (r+2)(r-1) = 0, \quad\iff\quad r_1 = -2,\ r_2 = 1,$$

vilket ger de två lösningarna $y_h = e^{-2x}$ och $y_h = e^x$. Den allmänna lösningen på den homogena, linjära ekvationen (5) är således linjärekvationen

$$y_h = Ae^x + Be^{-2x}.$$

Metoden om obestämda koefficienter, som uppgiften ber oss använda, handlar egentligen bara om att göra en kvalificerad gissning om hur lösningen skulle kunna se ut. Vi noterar att högerledet i den inhomogena ekvationen är e^x, vilket indikerar att vår partikulärlösning också skulle kunna innehålla en faktor e^x. Vi provar att ansätta

$$y_p = Cxe^x. \tag{6}$$

Om vi matar in den här funktionen i differentialekvationens vänsterled så får vi nämligen

$$y_p'' + y_p' - 2y_p = (2Ce^x + Cxe^x) + (Ce^x + Cxe^x) - 2Ce^x = 3Ce^x.$$

Högerledet ska vara lika med e^x, så vi får en partikulärlösning om vi sätter $C = \frac{1}{3}$. Den allmänna lösningen på den inhomogena ekvationen är således summan

$$y = y_p + y_h = \frac{1}{3}xe^x + Ae^x + Be^{-2x}.$$

Överkurs: En av de vanligaste frågorna när man studerar differentialekvationer är *Hur vet vi att det inte finns ännu fler lösningar? Hur vet vi att vår lösning är den allmänna lösningen?* Detta är en mycket bra och högst befogad fråga som tyvärr är svår att besvara i vissa fall, eftersom svaret kan kräva avancerad matematik. När man läser sin första kurs om differentialekvationer så brukar man lära sig en uppsättning standardlösningar och bara bevisa *några* allmänna lösningar. När det gäller just **Problem 18.6.4.** så kan vi faktiskt bevisa att lösningen som vi fann är allmän:

Antag att $y'' + y' - 2y = e^x$ och skriv om den allmänna lösningen på formen $y = g(x)e^x$ för någon hittills okänd funktion g. Vi kan alltid göra denna omskrivning genom att multiplicera och dividera den allmänna lösningen med e^x:

$$y = \big(ye^{-x}\big)e^x = g(x)e^x, \qquad g(x) = ye^{-x}.$$

Om vi matar in denna lösning i differentialekvationen så får vi relationen

$$y'' + y' - 2y = [g''(x) + 2g'(x) + g(x)]e^x + [g'(x) + g(x)]e^x - 2g(x)e^x = e^x,$$

vilken vi kan skriva om som

$$[g''(x) + 3g'(x)]e^x = e^x \quad \Longleftrightarrow \quad g''(x) + 3g'(x) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad g'(x) + 3g(x) = x + C.$$

Differentialekvationen $g' + 3g = x + C$ löses av

$$g(x) = De^{-3x} + \frac{x}{3} + \frac{C}{3} - \frac{1}{9},$$

så den allmänna lösningen $y = g(x)e^x$ till den ursprungliga ekvationen är

$$y = g(x)e^x = \left(De^{-3x} + \frac{x}{3} + \frac{C}{3} - \frac{1}{9}\right)e^x = \frac{1}{3}xe^x + Ae^x + Be^{-2x},$$

där vi har satt $A = \frac{C}{3} - \frac{1}{9}$ och $B = D$.

Problem 19.6.12

Finn den allmänna lösningen på den ickehomogena ekvationen

$$y'' + 2y' + y = xe^{-x}$$

via metoden om obestämda koeffcienter.

Problem 19.6.12

Finn den allmänna lösningen på den ickehomogena ekvationen

$$y'' + 2y' + y = xe^{-x}$$

via metoden om obestämda koeffcienter.

Lösning: Vi börjar återigen med att lösa den homogena ekvationen

$$y_h'' + 2y_h' + y_h = 0.$$

När vi matar in den vanliga ansatsen $y_h = e^{rx}$ i högerledet så får vi relationen

$$(r^2 + 2r + 1)e^{rx} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r^2 + 2r + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (r+1)^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r = -1,$$

vilket ger den allmänna lösningen

$$y_h = (C_1 + C_2 x)e^{-x}.$$

Högerledet i den inhomogena ekvationen är ett polynom x multiplicerat med e^{-x}, så låt oss leta efter en partikulärlösning på samma form: ett polynom gånger e^{-x}. Vi behöver inte bry oss om termer av grad 0 och grad 1 eftersom den homogena lösningen y_h redan innehåller såna termer, så vi begränsar oss till termer av lite högre grad:

$$y = (Ax^3 + Bx^2)e^{-x},$$

Om vi inte skulle hitta en partikulärlösning på ovanstående form så skulle vi kunna prova termer av grad 4, grad 5, etc. men i detta fall visar sig grad 3 vara tillräckligt. För detta polynom ger

$$\begin{cases} y = (Ax^3 + Bx^2)e^{-x} \\ y' = (3Ax^2 + 2Bx)e^{-x} - y \\ y'' = (6Ax + 2B)e^{-x} - (3Ax^2 + 2Bx)e^{-x} - y' = \\ \quad = (6Ax + 2B)e^{-x} - 2y' - y \end{cases} \tag{7}$$

vilket ger relationen

$$y'' + 2y' + y = \Big((6Ax + 2B)e^{-x} - 2y' - y\Big) + 2y' + y = (6Ax + 2B)e^{-x}.$$

Vi vill nu hitta värden på koefficienterna A, B så att uttrycket ovan sammanfaller med högerledet xe^{-x} i den ickehomogena ekvationen. Termen $6Ax$ måste alltså bli x medan termen $2B$ måste försvinna, så vi drar slutsatsen att $A = \frac{1}{6}$ och $B = 0$. Vi får med andra ord partikulärlösningen

$$y_p = \frac{1}{6}x^3 e^{-x},$$

och den allmänna lösningen

$$y = y_p + y_h = \frac{1}{6}x^3 e^{-x} + (C_1 + C_2 x)e^{-x} = \left(\frac{1}{6}x^3 + C_2 x + C_1\right) e^{-x}.$$

Övriga uppgifter

Problem 2.10.8

Beräkna den indefinita integralen

$$\int \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x$$

Problem 2.10.8

Beräkna den indefinita integralen

$$\int \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

Lösning: Uppgiften är med andra ord att beräkna en primitiv funktion till $f(x) = \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x}$. Ett sätt är att hitta lösningen är att dela upp funktionen i två delar,

$$f(x) = \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\cos^3 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x,$$

och använda en lista över derivator av trigonometriska funktioner för att se att $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x$. Det följer att

$$\int \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x\,\mathrm{d}x = \tan x + \sin x + C.$$

Problem 2.10.26

Använd trigonometriska identiteter som

$$\begin{cases} \sec^2 x = 1 + \tan^2 x, \\ \sin(2x) = 2\sin x \cos x, \\ \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \end{cases}$$

för att beräkna den indefinita integralen

$$\int \sin^2 x \ \mathrm{d}x$$

Problem 2.10.26

Använd trigonometriska identiteter som

$$\begin{cases} \sec^2 x = 1 + \tan^2 x, \\ \sin(2x) = 2\sin x \cos x, \\ \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \end{cases}$$

för att beräkna den indefinita integralen

$$\int \sin^2 x \ \mathrm{d}x$$

Lösning: Låt oss använda den sistnämnda identiteten, som kan skrivas om på formen

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}.$$

Det följer att

$$\int \sin^2 x \ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} \ \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C.$$

Problem 5.3.6.

Betrakta funktionen

$$f(x) = \cos x, \qquad x \in [0, 2\pi].$$

Partitionera intervallet i $n = 4$ stycken lika stora delintervall P_n av längd $2\pi/n$. Utvärdera den lägre Riemann-summan $L(f, P_n)$ och den övre Riemann-summan $U(f, P_n)$.

Problem 5.3.6.

Betrakta funktionen

$$f(x) = \cos x, \qquad x \in [0, 2\pi].$$

Partitionera intervallet i $n = 4$ stycken lika stora delintervall P_n av längd $2\pi/n$. Utvärdera den lägre Riemann-summan $L(f, P_n)$ och den övre Riemann-summan $U(f, P_n)$.

Lösning: Vi är alltså intresserade av delintervallen

$$P_1 = [0, \pi/2], \qquad P_2 = [\pi/2, \pi], \qquad P_3 = [\pi, 3\pi/2], \qquad P_4 = [3\pi/2, 2\pi].$$

Vi har plottat funktionen $f(x) = \cos(x)$ och de fyra delintervallen i Figur 15. Vi ser tydligt att funktionen antingen ökar eller minskar på varje delintervall, vilket innebär att minimipunkterna och maximipunkterna finnes i delintervallens ändpunkter:

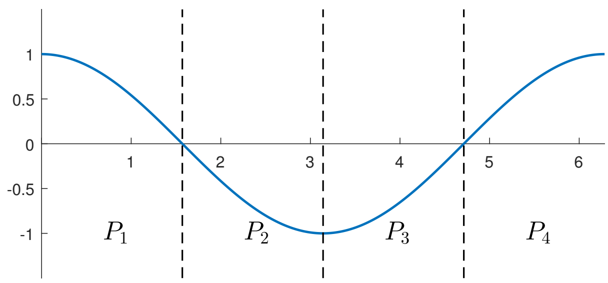
$$\begin{array}{lll} P_1: & l_1 = \pi/2, & u_1 = 0 \\ P_2: & l_2 = \pi, & u_2 = \pi/2 \\ P_3: & l_3 = \pi, & u_3 = 3\pi/2 \\ P_4: & l_4 = 3\pi/2, & u_4 = 2\pi \end{array}$$

Eftersom alla delintervall har samma längd $\Delta x = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ får vi den lägre Riemann-summan

$$\begin{aligned} L(f, P_n) = \sum_{i=1}^{4} \cos(l_i)\Delta x &= \Big(\cos(\pi/2) + \cos(\pi) + \cos(\pi) + \cos(3\pi/2)\Big)\Delta x = \\ &= \Big(0 - 1 - 1 + 0\Big)\frac{\pi}{2} = -\pi, \end{aligned}$$

och den övre Riemann-summan

$$\begin{aligned} U(f, P_n) = \sum_{i=1}^{4} \cos(u_i)\Delta x &= \Big(\cos(0) + \cos(\pi/2) + \cos(3\pi/2) + \cos(2\pi)\Big)\Delta x = \\ &= \Big(1 + 0 + 0 + 1\Big)\frac{\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$



Figur 15: Grafen till funktionen $f(x) = \cos(x)$ indelad i de fyra delintervallen P_1, P_2, P_3, P_4. Vi ser att minimum och maximum för varje intervall finnes i respektive intervalls ändpunkter.

Problem 5.4.6

Utvärdera integralen

$$\int_{-1}^{2} (1 - 2x)\, \mathrm{d}x$$

genom att tolka integralen i termer av areor.

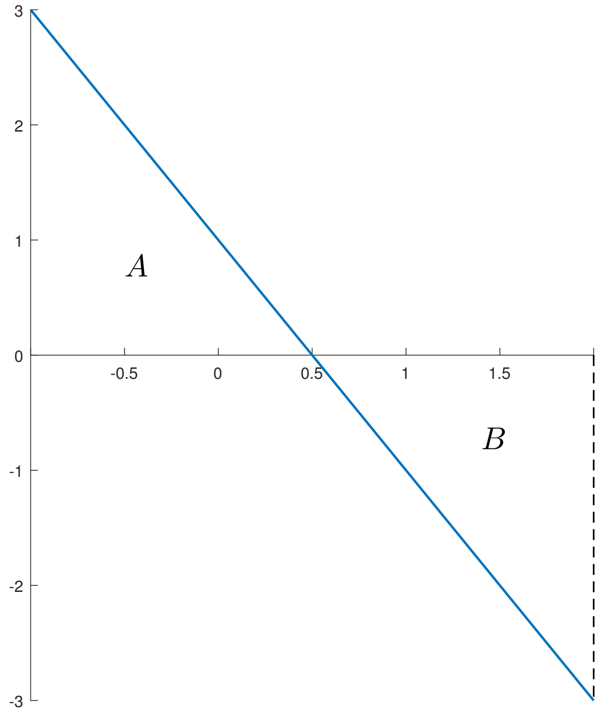
Problem 5.4.6

Utvärdera integralen

$$\int_{-1}^{2} (1 - 2x) \, \mathrm{d}x$$

genom att tolka integralen i termer av areor.

Lösning: Vi börjar med att plotta funktionen:



Figur 16

Som vi ser kan regionen mellan x-axeln och grafen delas in i två stycken trianglar A och B. Integralen är summan av dessa två trianglars areor, men eftersom triangeln B ligger nedanför x-axeln kommer dess area att räknas negativt:

$$\int_{-1}^{2} (1 - 2x) \, \mathrm{d}x = \text{area}(A) - \text{area}(B) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0.$$

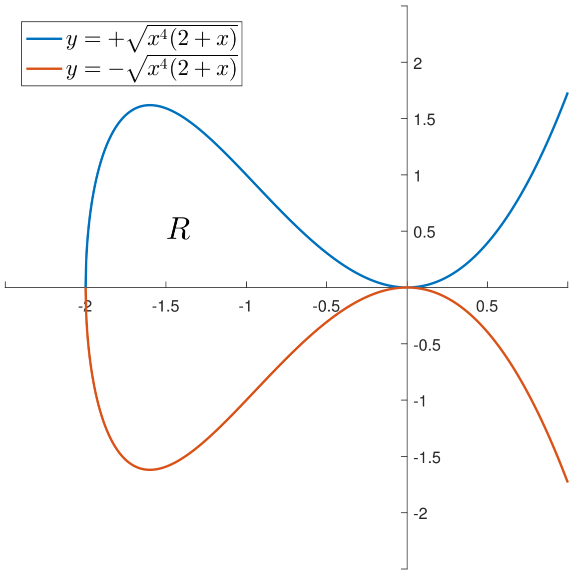
Problem 5.7.28

Beräkna arean hos den region R som innesluts av loopen $y^2 = x^4(x+2)$ och som ligger till vänster om origo.

Problem 5.7.28

Beräkna arean hos den region R som innesluts av loopen $y^2 = x^4(x+2)$ och som ligger till vänster om origo.

Lösning: Vi börjar med att sketcha regionen i fråga för att se hur den ser ut. Notera att loopen utgörs av de två graferna $y = +\sqrt{x^4(2+x)}$ och $y = -\sqrt{x^4(2+x)}$.



Figur 17

Som vi ser är regionen symmetrisk kring x-axeln, vilket innebär att halva arean ligger ovanför x-axeln och halva arean ligger nedanför. Det räcker därför att beräkna arean hos den övre halvan och sedan multiplicera med 2:

$$\begin{aligned}\text{area}(R) &= 2\int_{-2}^{0} \sqrt{x^4(2+x)}\ \mathrm{d}x = 2\int_{-2}^{0} x^2\sqrt{2+x}\ \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u^2 = 2+x \\ 2u\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \end{bmatrix} = \\ &= 2\int_{0}^{\sqrt{2}} (u^2-2)^2 u * 2u\ \mathrm{d}u = 4\int_{0}^{\sqrt{2}} u^6 - 4u^4 + 4u^2\ \mathrm{d}u = \\ &= 4\left[\frac{1}{7}u^7 - \frac{4}{5}u^5 + \frac{4}{3}u^3\right]_0^{\sqrt{2}} = 4\left(\frac{\sqrt{128}}{7} - \frac{4\sqrt{32}}{5} + \frac{4\sqrt{8}}{3}\right) = \frac{256\sqrt{2}}{105}.\end{aligned}$$

Problem 7.2.12

Betrakta en solid med cirkulär bas av radie r, och antag att samtliga tvärsnittsytor längsmed en given diameter är liksidiga trianglar. Beräkna solidens volym.

Problem 7.2.12

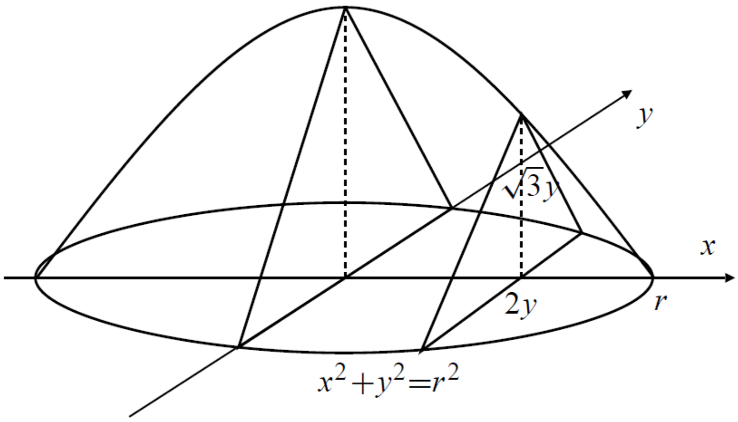
Betrakta en solid med cirkulär bas av radie r, och antag att samtliga tvärsnittsytor längsmed en given diameter är liksidiga trianglar. Beräkna solidens volym.

Lösning: Vi placerar soliden med centrum i origo och roterar den så att alla triangelformade tvärsnittsytor är parallella med y-axeln, se Figur 18. För varje x i intervallet $-r \leq x \leq r$ får vi en liksidig triangel med basen $b = 2y$ och höjden $h = \sqrt{3}y$, där vi har nyttjat att triangeln är liksidig. Triangelns tvärsnittsarea är alltså

$$A(x) = \frac{bh}{2} = \frac{2y * \sqrt{3}y}{2} = \sqrt{3}y^2 = \sqrt{3}(r^2 - x^2),$$

där vi har använd cirkels ekvation $x^2 + y^2 = r^2$. Allt som återstår är att "summera" alla tvärsnittsareor, det vill säga integrera över x:

$$V = \int_{-r}^{r} A(x)\ \mathrm{d}x = \sqrt{3}\int_{-r}^{r} r^2 - x^2\ \mathrm{d}x = \sqrt{3}\left[r^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r} = \frac{4}{\sqrt{3}}r^3.$$



Figur 18: Bild tagen från *Instructor's Solution Manual*.

Problem 19.6.6

Finn den allmänna lösningen på den ickehomogena ekvationen

$$y'' + 4y = x^2$$

via metoden om obestämda koeffcienter.

Problem 19.6.6

Finn den allmänna lösningen på den ickehomogena ekvationen

$$y'' + 4y = x^2$$

via metoden om obestämda koeffcienter.

Lösning: Precis som i föregående uppgift kommer vi beräkna (1) den allmänna lösningen y_h på den homogena ekvationen, och (2) en partikulärlösning på den ickehomogena ekvationen; den allmänna lösningen på den ickehomogena ekvationen kan sedan skrivas som linjärkombinationen $y = y_p + y_h$. Den homogena ekvationen får vi genom att nollställa högerledet:

$$y_h'' + 4y_h = 0.$$

Vi vet sedan tidigare (**Problem 3.7.24**) att den allmänna lösningen på denna ekvation är

$$y_h = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x).$$

Härnäst söker vi en partikulärlösning till den ickehomogena ekvationen, och vi noterar först och främst att högerledet x^2 är ett polynom; kanske det finns ett polynom y som löser ekvationen? I så fall bör y vara ett andragradspolynom

$$y = Ax^2 + Bx + C. \tag{8}$$

Om lösningen y istället hade varit ett tredjegradspolynom, säg, så skulle termen $4y$ göra vänsterledet $y'' + 4y$ till ett tredjegradspolynom, och vänsterledet skulle därför inte kunna vara lika med andragradspolynomet x^2 i högerledet. När vi matar in ansättningen (8) i ekvationen så får vi

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= \big(Ax^2 + Bx + C\big)'' + 4(Ax^2 + Bx + C) = \\ &= 4Ax^2 + 4Bx + (2A + 4C), \end{aligned}$$

och om vi kräver att detta ska sammanfalla med högerledet x^2 så kan vi lista ut vilka koefficienter som behövs: Termen $4Ax^2$ ska bli x^2, vilket ger koefficienten $A = \frac{1}{4}$. Dessutom ska båda termerna $4Bx$ och $2A + 4C = \frac{1}{2} + 4C$ försvinna, eftersom vi inte vill ha någonting mer än x^2-termen kvar. Det följer att $B = 0$, och $C = -1/8$, och vi har därför partikulärlösningen

$$y_p = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}.$$

Den allmänna lösningen är således summan

$$y = y_p + y_h = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8} + C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x).$$

Uppgifter ur Lay

Övningstillfälle 3.3

Problem 1.1.22 (repetition)

Har de tre planen

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \qquad x_2 - x_3 = 1, \qquad \text{och} \qquad x_1 + 3x_2 = 0,$$

någon punkt gemensamt? Förklara.

Problem 1.1.22 (repetition)

Har de tre planen

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \qquad x_2 - x_3 = 1, \qquad \text{och} \qquad x_1 + 3x_2 = 0,$$

någon punkt gemensamt? Förklara.

Lösning: Om de tre planen har en punkt (x_1, x_2, x_3) gemensamt så måste denna punkt uppfylla alla tre ekvationer ovan. Med andra ord måste punkten uppfylla ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ \qquad x_2 - x_3 = 1 \\ \quad x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}, \tag{9}$$

vilket vi kan representera på matrisform:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Varje rad utgörs alltså av en ekvation i ekvationssystemet. Elementen i den första kolumnen representerar koefficienten framför x_1 i respektive ekvation, elementen i den andra kolumnen representerar koefficienten framför x_2 i respektive ekvation, elementen i den tredje kolumnen representerar koefficienten framför x_3 i respektive ekvation, elementen i den fjärde kolumnen representerar högerledet i respektive ekvation. Målet är att radreducera matrisen så att den får formen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & A \\ 0 & 1 & 0 & B \\ 0 & 0 & 1 & C \end{bmatrix},$$

eftersom denna matris representerar ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 = A \\ x_2 = B \\ x_3 = C \end{cases}.$$

Om vi lyckas med detta mål så kommer $x_1 = A$, $x_2 = B$, $x_3 = C$ lösa det ursprungliga ekvationssystemet (9), vilket innebär att punkten (A, B, C) är en gemensam punkt för de tre planen.

Dags att radreducera!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \Big[\text{Subtrahera första raden från tredje raden}\Big] \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Redan efter detta första steg kan vi faktiskt avbryta radreduceringen, eftersom de två nedersta raderna i matrisen motsäger varandra: Om en punkt (x_1, x_2, x_3) ligger på alla tre plan så säger ovanstående matris att punkten måste uppfylla både $x_2 - x_3 = 1$ och $x_2 - x_3 = -4$, vilket förstås inte är möjligt. **Slutsats:** De tre planen har inte någon punkt gemensamt.

Problem 1.2.4 (repetition)

Reducera matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

till *reduced echelon form*, det vill säga trappmatrisform. Ringa in pivotelementen i den ursprungliga matrisen och i den slutgiltiga matrisen, och lista pivotkolumnerna.

Problem 1.2.4 (repetition)

Reducera matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

till *reduced echelon form*, det vill säga trappmatrisform. Ringa in pivotelementen i den ursprungliga matrisen och i den slutgiltiga matrisen, och lista pivotkolumnerna.

Lösning: När vi radreducerar, låt oss först göra oss av med trean och femman i första kolumnen, så att bara den översta ettan kvarstår. Sedan gör vi oss av med sjuan längst ned i andra kolumnen.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix} \qquad \left[\text{Subtrahera } 3 * \text{första raden från den andra raden}\right]$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix} \qquad \left[\text{Subtrahera } 5 * \text{första raden från den tredje raden}\right]$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -34 \end{bmatrix} \qquad \left[\text{Subtrahera } 2 * \text{andra raden från den tredje raden}\right]$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \qquad \left[\text{Dividera andra raden med } -4 \text{ och sista raden med } -10\right]$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi har ringat in pivot-elementen. Då vi inte arrangerade om några rader under radreduceringen, finnes pivot-elementen i den ursprungliga matrisen på exakt samma positioner:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

Pivot-kolumnerna är precis de kolumner som innehåller pivot-element, det vill säga första, andra och fjärde kolumnen.

Vi avslutar med en observation. Precis som i föregående uppgift kan den ursprungliga matrisen tolkas som ett ekvationssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} 1x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 7 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 9 \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 = 1 \end{cases}$$

och syftet med att radreducera, syftet med att överföra matrisen på reducerad triangelmatrisform, *reduced echelon form*, är att den reducerade matrisen löser ovanstående ekvationssystem:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} 1x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 7 \\ 0x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 3 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1 \end{cases}$$

Den nedersta ekvationen säger oss att $0 = 1$, vilket förstås är omöjligt. Ekvationssystemet är alltså inkonsekvent och har inte någon lösning.

Problem 1.2.13 (repetition)

Finn den allmänna lösningen på ekvationssystemet som motsvarar matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Problem 1.2.13 (repetition)

Finn den allmänna lösningen på ekvationssystemet som motsvarar matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lösning: Ekvationssystemet i fråga är

$$\begin{cases} 1x_1 - 3x_2 + 0x_3 - 1x_4 + 0x_5 = -2 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 - 4x_5 = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 9x_5 = 4 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0 \end{cases},$$

vilket vi kan skriva på den enklare formen

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_4 = -2 \\ \qquad x_2 - 4x_5 = 1 \\ \qquad x_4 + 9x_5 = 4 \end{cases}.$$

Variabeln x_3 tillåts ha vilket värde som helst eftersom den inte förekommer i ekvationssystemet. Notera även att om vi fixerar värdet på x_5 så kommer värdena på variablerna x_1, x_2 och x_4 vara helt bestämda, eftersom[8]

$$\begin{cases} x_4 = 4 - 9x_5 \\ x_2 = 1 + 4x_5 \\ x_1 = 3x_2 + x_4 - 2 = \\ \quad = 3(1 + 4x_5) + (4 - 9x_5) - 2 = \\ \quad = 5 + 3x_5 \end{cases}.$$

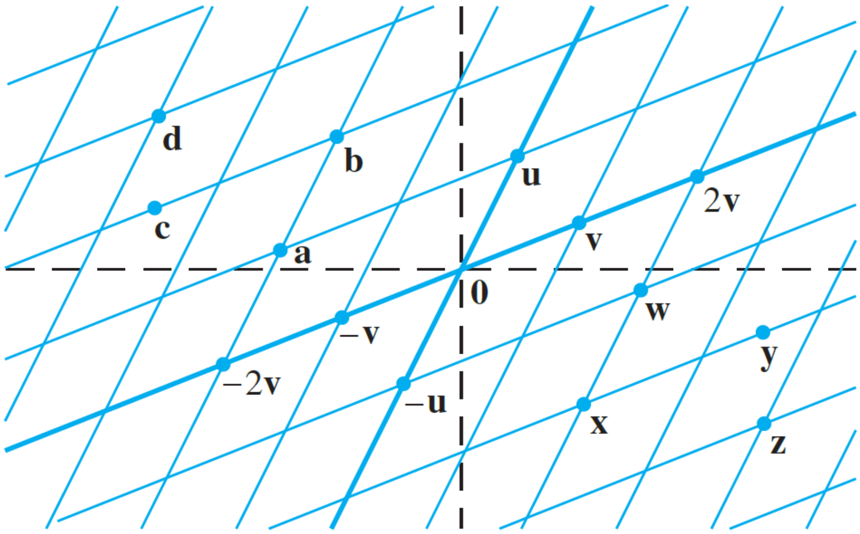
Den allmänna lösningen är därför

$$\begin{cases} x_1 = 5 + 3x_5 \\ x_2 = 1 + 4x_5 \\ x_3 \text{ fri variabel} \\ x_4 = 4 - 9x_5 \\ x_5 \text{ fri variabel} \end{cases}$$

[8]Vi hade även kunnat fixera värdet på x_4, i vilket fall värdena på x_1, x_2 och x_5 hade varit helt bestämda. Huvudsaken är att vi har två fria variabler.

Problem 1.3.8

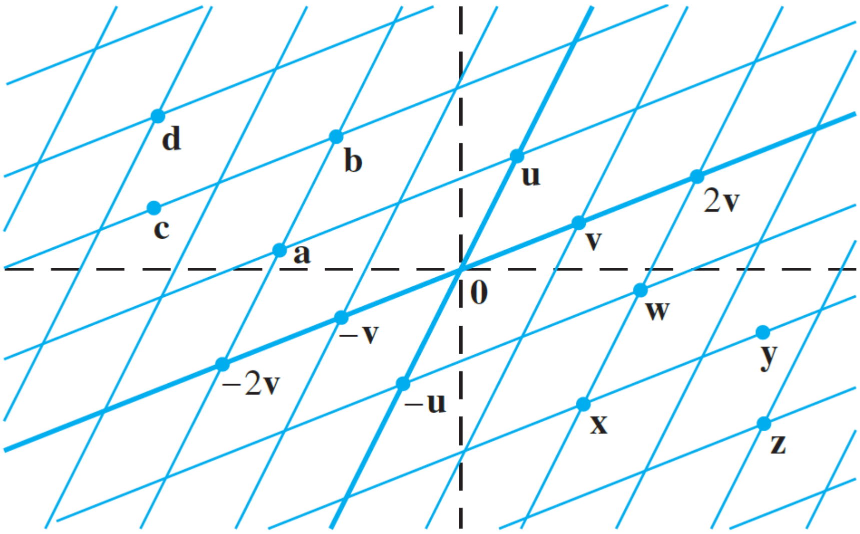
Använd följande figur för att skriva vektorerna $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ och $\boldsymbol{z}$ som linjärkombinationer av de två vektorerna $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$. Är varje vektor i $\mathbb{R}^2$ en linjärkombination av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$?



Figur 19: Bild tagen från sida 32 i kursboken *Linear Algebra and Its Appliations* av Lay.

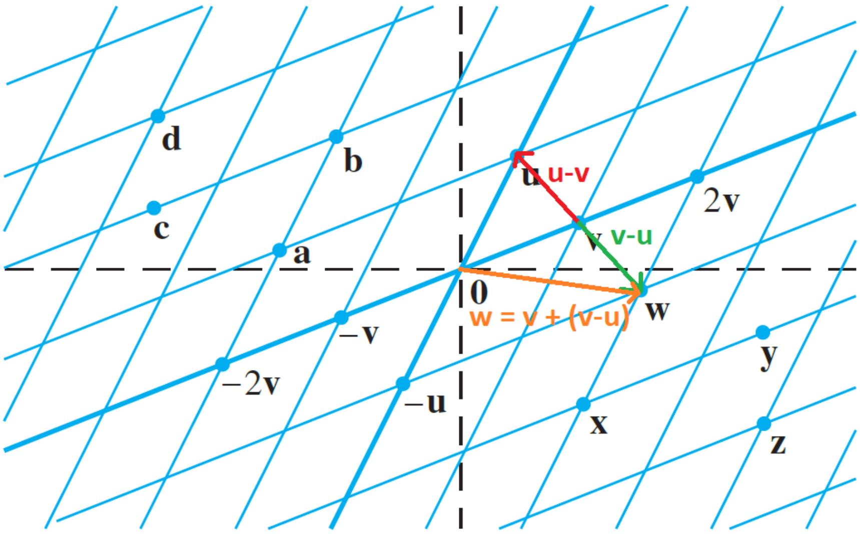
Problem 1.3.8

Använd följande figur för att skriva vektorerna $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ och $\boldsymbol{z}$ som linjärkombinationer av de två vektorerna $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$. Är varje vektor i $\mathbb{R}^2$ en linjärkombination av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$?



Figur 20: Bild tagen från sida 32 i kursboken *Linear Algebra and Its Appliations* av Lay.

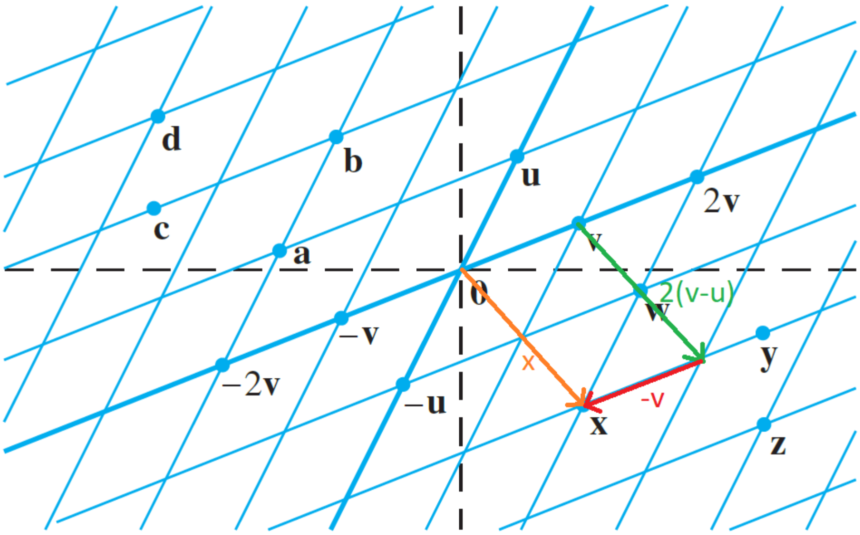
Lösning: Om vi befinner oss i punkten $\boldsymbol{v}$ (det vill säga vid spetsen av vektorn $\boldsymbol{v}$) och vill ta oss till punkten $\boldsymbol{u}$ så kommer vektorn $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$ att ta oss dit, eftersom $\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}$ (Figur 21). Om vi istället vill ta oss från punkten $\boldsymbol{v}$ till punkten $\boldsymbol{w}$ så behöver vi gå i motsatt riktning, vilket innebär att $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})=2\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}$.



Figur 21

Om vi fortsätter förbi $\boldsymbol{w}$ till korsningspunkten mellan vektorerna $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{y}$, och sedan går snett nedåt parallellt med $\boldsymbol{v}$, så kommer vi till vektorn $\boldsymbol{x}$ (Figur 22). Detta innebär att

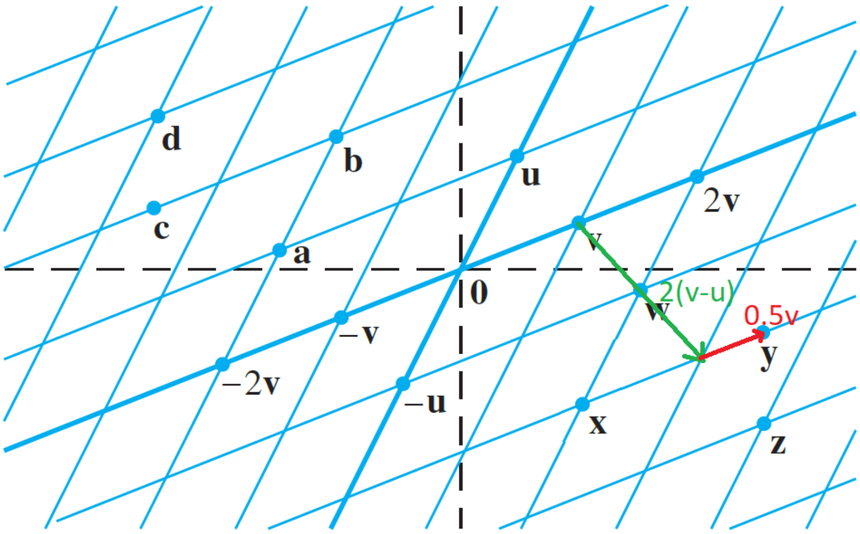
$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} + 2(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) + (-\boldsymbol{v}) = 2(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})$$



Figur 22

På samma sätt når vi vektorn $\boldsymbol{y}$ (Figur 23):

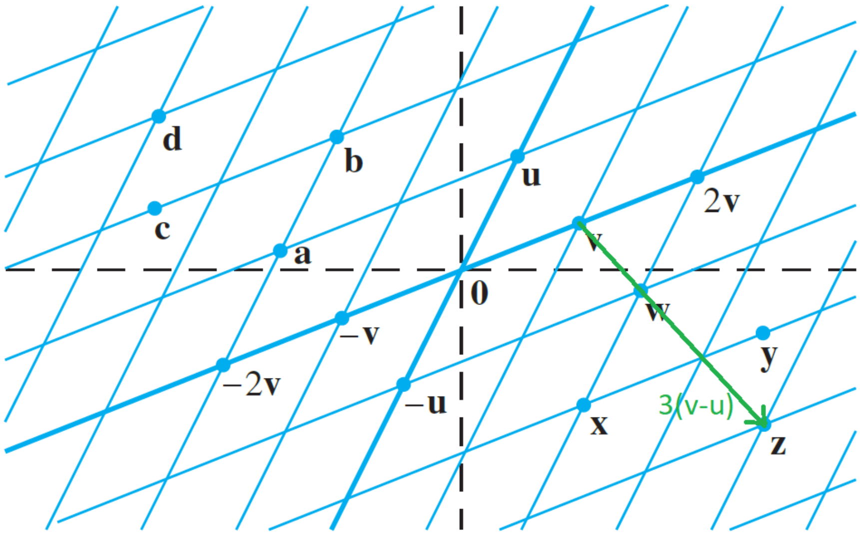
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{v} + 2(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{v} = \frac{7}{2}\boldsymbol{v} - 2\boldsymbol{u}.$$



Figur 23

Den sista vektorn $\boldsymbol{z}$ är ännu enklare att nå (Figur 24):

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{v} + 3(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) = 4\boldsymbol{v} - 3\boldsymbol{u}.$$



Figur 24

Sammanfattningsvis har vi relationerna

$$\begin{cases} \boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{v} - 2\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \frac{7}{2}\boldsymbol{v} - 2\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{z} = 4\boldsymbol{v} - 3\boldsymbol{u} \end{cases}.$$

Den sista frågan är huruvida varje vektor i $\mathbb{R}^2$ kan skrivas som en linjärkombination av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$. Svaret på denna fråga är **Ja**, eftersom de två vektorerna är *linjärt oberoende*. Vi kommer snart lära oss mer om detta begrepp.

Problem 1.3.12

Betrakta vektorerna

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 11 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Avgör huruvida $\boldsymbol{b}$ kan skrivas som en linjärkombination av $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ och $\boldsymbol{a}_3$.

Problem 1.3.12

Betrakta vektorerna

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 11 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Avgör huruvida $\boldsymbol{b}$ kan skrivas som en linjärkombination av $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ och $\boldsymbol{a}_3$.

Lösning: Det finns flera sätt att lösa denna uppgift, man kan exempelvis ställa upp problemet som ett linjärt ekvationssystem: Vi vill finna konstanter x_1, x_2, x_3 sådana att

$$\begin{aligned}
x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{b} \qquad &\leftrightarrow \qquad x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 11 \\ -7 \end{bmatrix} \\
&\leftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} 1x_1 + 0x_2 + 2x_3 \\ -2x_1 + 5x_2 + 0x_3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 11 \\ -7 \end{bmatrix} \\
&\leftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} x_1 + 2x_3 \\ -2x_1 + 5x_2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 11 \\ -7 \end{bmatrix} \\
&\leftrightarrow \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_3 = -5 \\ -2x_1 + 5x_2 = 11 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 = -7 \end{cases}
\end{aligned}$$

och vi kan lösa detta ekvationssystem genom att radreducera motsvarande matris:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ -2 & 5 & 0 & 11 \\ 2 & 5 & 8 & -7 \end{bmatrix} \qquad \left[\text{Addera } 2 * \text{första raden till andra raden}\right] \\
\sim &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & -7 \end{bmatrix} \qquad \left[\text{Subtrahera } 2 * \text{första raden från tredje raden}\right] \\
\sim &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

De två nedersta raderna säger oss att $5x_2 + 4x_3 = 1$ och $5x_2 + 4x_3 = 3$. Eftersom dessa två ekvationer inte kan vara uppfyllda samtidigt, drar vi slutsatsen att $\boldsymbol{b}$ inte kan skrivas som en linjärkombination av $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ och $\boldsymbol{a}_3$.

Problem 1.3.18*

Låt

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} h \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

För vilka värden på h ligger vektorn $\boldsymbol{y}$ i planet som genereras av $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$?

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition*. Siffrorna skiljer sig något från Problem 1.3.18 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.

Problem 1.3.18*

Låt

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} h \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

För vilka värden på h ligger vektorn $\boldsymbol{y}$ i planet som genereras av $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$?

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition*. Siffrorna skiljer sig något från Problem 1.3.18 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.

Lösning: Vektorn $\boldsymbol{y}$ ligger i planet genererat av $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$ om och endast om vektorn $\boldsymbol{y}$ kan skrivas som en linjärkombination av $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$:

$$\boldsymbol{y} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 \qquad \leftrightarrow \qquad \begin{cases} x_1 - 3x_2 = h \\ \qquad x_2 = -5 \\ -2x_1 + 8x_2 = -3 \end{cases}$$

Låt oss attackera problemet precis som i förra uppgiften, genom att radreducera följande matris:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 1 & -3 & h \\ 0 & 1 & -5 \\ -2 & 8 & -3 \end{bmatrix} && \Big[\text{Addera } 2 * \text{första raden till den tredje raden}\Big] \\
\sim &\begin{bmatrix} 1 & -3 & h \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 2h-3 \end{bmatrix} && \Big[\text{Subtrahera } 2 * \text{andra raden från den tredje raden}\Big] \\
\sim &\begin{bmatrix} 1 & -3 & h \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2h+7 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Denna matris motsvarar ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = h \\ \qquad x_2 = -5 \\ \qquad\ 0 = 2h+7 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x_1 = h + 3x_2 \\ x_2 = -5 \\ h = -\dfrac{7}{2} \end{cases}.$$

Vektorn $\boldsymbol{y}$ ligger alltså i planet genererat av $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$ om $h = -\frac{7}{2}$, och i så fall är

$$\boldsymbol{y} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 = \left(-\frac{7}{2} + 3 * (-5)\right)\boldsymbol{v}_1 - 5\boldsymbol{v}_2 = -\frac{37}{2}\boldsymbol{v}_1 - 5\boldsymbol{v}_2.$$

Problem 1.4.18

Låt

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -3 & 7 \\ -2 & -8 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Spänner kolonnerna hos B rummet $\mathbb{R}^4$? Har ekvationen $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ en lösning för varje $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^4$?

Problem 1.4.18

Låt

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -3 & 7 \\ -2 & -8 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Spänner kolonnerna hos B rummet $\mathbb{R}^4$? Har ekvationen $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ en lösning för varje $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^4$?

Lösning: De två frågorna är ekvivalenta, om svaret på den ena frågan är Ja så är svaret på den andra frågan Ja och vice versa. Om kolonnerna $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_3$, $\boldsymbol{B}_4$ hos matrisen B spänner rummet $\mathbb{R}^4$, så betyder detta (per definition) att varje vektor $\boldsymbol{y}$ kan skrivas som en linjärkombination

$$\boldsymbol{y} = x_1\boldsymbol{B}_1 + x_2\boldsymbol{B}_2 + x_3\boldsymbol{B}_3 + x_4\boldsymbol{B}_4 = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 1x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 \\ 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 - 5x_4 \\ 1x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 7x_4 \\ -2x_1 - 8x_2 + 2x_3 - 1x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -3 & 7 \\ -2 & -8 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = B\boldsymbol{x},$$

vilket innebär att varje vektor $\boldsymbol{y}$ kan skrivas på formen $\boldsymbol{y} = B\boldsymbol{x}$. Ett liknande argument visar implikationen i andra riktningen, dvs. att om varje vektor $\boldsymbol{y}$ kan skrivas på formen $\boldsymbol{y} = B\boldsymbol{x}$ så spänner kolonnerna hos matrisen B rummet $\mathbb{R}^4$.

Det räcker alltså att besvara en av frågorna - vi väljer den andra: Huruvida varje vektor $\boldsymbol{y}$ kan skrivas som en lösning på ekvationen $\boldsymbol{y} = B\boldsymbol{x}$. Detta är ett linjärt ekvationssystem

$$\begin{bmatrix} 1x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 \\ 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 - 5x_4 \\ 1x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 7x_4 \\ -2x_1 - 8x_2 + 2x_3 - 1x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = A \\ x_2 + x_3 - 5x_4 = B \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 7x_4 = C \\ -2x_1 - 8x_2 + 2x_3 - x_4 = D \end{cases},$$

där vi har satt

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix}$$

för att betona att elementen i vektorn $\boldsymbol{y}$ antas vara *kända*. Idén är alltså att vi först fixerar en valfri vektor $\boldsymbol{y}$ och sedan försöker hitta en vektor $\boldsymbol{x}$ sådan att $\boldsymbol{y} = B\boldsymbol{x}$, och frågan är huruvida det går att hitta en sådan vektor $\boldsymbol{x}$ oavsett vilken vektor $\boldsymbol{y}$ vi har valt. Ovanstående ekvationssystem kan i vanlig ordning lösas genom att radreducera:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & A \\ 0 & 1 & 1 & -5 & B \\ 1 & 2 & -3 & 7 & C \\ -2 & -8 & 2 & -1 & D \end{bmatrix} \qquad \left[\text{Subtrahera första raden från den tredje raden}\right]$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & A \\ 0 & 1 & 1 & -5 & B \\ 0 & -1 & -1 & 5 & C-A \\ -2 & -8 & 2 & -1 & D \end{bmatrix} \qquad \left[\text{Addera andra raden till tredje raden}\right]$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & A \\ 0 & 1 & 1 & -5 & B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C-A+B \\ -2 & -8 & 2 & -1 & D \end{bmatrix}$$

Den tredje raden säger att om vektorn

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix}$$

ska kunna skrivas på formen $\boldsymbol{y} = B\boldsymbol{x}$ så måste den uppfylla ekvationen $C - A + B = 0$. Det finns oändligt många vektorer som inte uppfyller denna ekvation, exempelvis vektorn

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

så svaret är att inte alla vektorer kan skrivas på formen $\boldsymbol{y} = B\boldsymbol{x}$.

Anmärkning: Vi hade inte behövt ha med vektorn $\boldsymbol{y}$ längst till höger i matrisen som vi radreducerade, det hade räckt att radreducera den ursprungliga matrisen B. Om man kan reducera en kvadratisk matris B till reducerad trappmatrisform med enbart ettor i diagonalen,

$$\begin{bmatrix} 1 & ? & ? & ? \\ 0 & 1 & ? & ? \\ 0 & 0 & 1 & ? \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

så är svaret på frågan **Ja**, varje vektor $\boldsymbol{y}$ kan skrivas på formen $\boldsymbol{y} = B\boldsymbol{x}$. Om den radreducerade matrisen däremot har en rad som bara innehåller nollor så är svaret på frågan **Nej**.

Problem 1.4.36*

Låt

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Man kan visa att $3\boldsymbol{u} - 5\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \mathbf{0}$. Använd detta faktum (och inga radoperationer) för att hitta konstanter x_1 och x_2 som uppfyller ekvationen

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Problem 1.4.36*

Låt

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Man kan visa att $3\boldsymbol{u} - 5\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \mathbf{0}$. Använd detta faktum (och inga radoperationer) för att hitta konstanter x_1 och x_2 som uppfyller ekvationen

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Lösning: Vi börjar med att utföra matrismultiplikationen i ovanstående ekvation:

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + 1x_2 \\ 5x_1 + 3x_2 \end{bmatrix},$$

och vi väljer nu att skriva om denna vektor som en linjärkombination:

$$\begin{bmatrix} 7x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + 1x_2 \\ 5x_1 + 3x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = x_1\boldsymbol{u} + x_2\boldsymbol{v}.$$

Den ursprungliga ekvationen (10) kan nu formuleras som

$$x_1\boldsymbol{u} + x_2\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w},$$

vilket leder oss direkt till svaret $x_1 = 3$ och $x_2 = -5$, eftersom vi vet att $3\boldsymbol{u} - 5\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \mathbf{0}$.

Övningstillfälle 4.1

Problem 1.5.6

Skriv lösningsmängden för det homogena ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 0 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

på parametrisk vektorform.

Problem 1.5.6

Skriv lösningsmängden för det homogena ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 0 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

på parametrisk vektorform.

Lösning: Målet är att skriva lösningen på formen $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{v}x$ där x är en fri variabel. Ekvationssystemet kan representeras genom följande matris och som vanligt löser vi ekvationssystemet genom radreducering:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & -8 & 0 \\ -3 & -7 & 9 & 0 \end{bmatrix} \qquad \left[\text{Subtrahera första raden från den andra raden}\right]$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ -3 & -7 & 9 & 0 \end{bmatrix} \qquad \left[\text{Addera } 3 * \text{ första raden till den tredje raden}\right]$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 0 \end{bmatrix} \qquad \left[\text{Subtrahera } 2 * \text{ andra raden från den tredje raden}\right]$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \left[\text{Subtrahera } 3 * \text{ andra raden från den första raden}\right]$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ekvationssystemet lyder nu

$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x_1 = -4x_3 \\ x_2 = 3x_3 \\ x_3 \text{ fri variabel} \end{cases}$$

vilket innebär att lösningen har formen

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x_3 \\ 3x_3 \\ 1x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} x_3.$$

Lösningens parametriska vektorform är alltså

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} x,$$

dvs. $\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Problem 1.6.6

När lösningar av natriumsulfat och bariumnitrat blandas, formas bariumfosfat och natriumnitrat. Den obalanserade ekvationen är

$$\mathrm{Na_3PO_4 + Ba(NO_3)_2 \rightarrow Ba_3(PO_4)_2 + NaNO_3}$$

För var och ett av dessa fyra ämnen, konstruera en vektor som listar antalet natrium-, fosfor-, syre-, barium- och kväveatomer. Använd sedan dessa vektorer för att balansera ekvationen.

Problem 1.6.6

När lösningar av natriumsulfat och bariumnitrat blandas, formas bariumfosfat och natriumnitrat. Den obalanserade ekvationen är

$$\mathrm{Na_3PO_4} + \mathrm{Ba(NO_3)_2} \to \mathrm{Ba_3(PO_4)_2} + \mathrm{NaNO_3}$$

För var och ett av dessa fyra ämnen, konstruera en vektor som listar antalet natrium-, fosfor-, syre-, barium- och kväveatomer. Använd sedan dessa vektorer för att balansera ekvationen.

Lösning: Det första ämnet, natriumfosfat, innehåller

- 3 st natriumatomer,
- 1 st fosforatom,
- 4 st syreatomer,
- 0 st bariumatomer,
- 0 st kväveatomer,

och motsvarar därför vektorn

$$\mathrm{Na_3PO_4} : \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

På precis samma sätt får vi resterande vektorer:

$$\mathrm{Ba(NO_3)_2} : \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{Ba_3(PO_4)_2} : \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{NaNO_3} : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi vill ta reda på hur många molekyler av varje ämne som krävs för att balansera ekvationen och vi kan skriva detta problem på formen

$$x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

där x_1 representerar antalet natriumsulfat-molekyler och så vidare. Om vi flyttar över alla vektorer till vänsterledet och sätter ihop dem till en enda stor vektor kan vi skriva om den balanserade ekvation på formen

$$\begin{bmatrix} 3x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 1x_4 \\ 1x_1 + 0x_2 - 2x_3 + 0x_4 \\ 4x_1 + 6x_2 - 8x_3 - 3x_4 \\ 0x_1 + 1x_2 - 3x_3 + 0x_4 \\ 0x_1 + 2x_2 + 0x_3 - 1x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Detta är ett linjärt ekvationssystem som kan lösas genom att radreducera följande matris:

$$\begin{bmatrix}3&0&0&-1&0\\1&0&-2&0&0\\4&6&-8&-3&0\\0&1&-3&0&0\\0&2&0&-1&0\end{bmatrix} \quad \left[\text{Placera den andra raden överst och fjärde raden näst överst}\right]$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&-2&0&0\\0&1&-3&0&0\\3&0&0&-1&0\\4&6&-8&-3&0\\0&2&0&-1&0\end{bmatrix} \quad \left[\text{Subtrahera } 3*\text{ första raden från den tredje raden}\right]$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&-2&0&0\\0&1&-3&0&0\\0&0&6&-1&0\\4&6&-8&-3&0\\0&2&0&-1&0\end{bmatrix} \quad \left[\text{Subtrahera } 4*\text{ första raden från den fjärde raden}\right]$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&-2&0&0\\0&1&-3&0&0\\0&0&6&-1&0\\0&6&0&-3&0\\0&2&0&-1&0\end{bmatrix} \quad \left[\text{Subtrahera } 6*\text{ andra raden från den fjärde raden}\right]$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&-2&0&0\\0&1&-3&0&0\\0&0&6&-1&0\\0&0&18&-3&0\\0&2&0&-1&0\end{bmatrix} \quad \left[\text{Subtrahera } 3*\text{ tredje raden från den fjärde raden}\right]$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&-2&0&0\\0&1&-3&0&0\\0&0&6&-1&0\\0&0&0&0&0\\0&2&0&-1&0\end{bmatrix} \quad \left[\text{Subtrahera } 2*\text{ andra raden från den femte raden}\right]$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&-2&0&0\\0&1&-3&0&0\\0&0&6&-1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&6&-1&0\end{bmatrix} \quad \left[\text{Subtrahera tredje raden från den femte raden}\right]$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&-2&0&0\\0&1&-3&0&0\\0&0&6&-1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases}x_1-2x_3=0\\x_2-3x_3=0\\6x_3-x_4=0\end{cases}$$

Om vi sätter $x_3 = 1$ så får vi $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ och $x_4 = 6$. Den balanserade ekvationen är alltså

$$2Na_3PO_4 + 3Ba(NO_3)_2 \to Ba_3(PO_4)_2 + 6NaNO_3$$

Det är inte konstigt att vi får en fri variabel - tvärtom! Om man ser på den balanserade reaktionen som ett recept, och ämnena som ingredienser, anger den fria variabeln x_3 antalet satser vi bakar.

Övningstillfälle 4.2

Problem 1.7.14

Finn det värde h som gör följande vektorer linjärt beroende:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ h \end{bmatrix}.$$

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition.* Siffrorna skiljer sig något från Problem 1.7.14 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.

Problem 1.7.14

Finn det värde h som gör följande vektorer linjärt beroende:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ h \end{bmatrix}.$$

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition*. Siffrorna skiljer sig något från Problem 1.7.14 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.

Lösning: Ett sätt att lösa denna uppgift är att omformulera den som ett linjärt ekvationssystem. De tre vektorerna är (per definition) linjärt beroende om det existerar konstanter a_1, a_2, a_3, minst en av dem nollskild, sådana att

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{11}$$

vilket visar sig vara ekvivalent med att hitta konstanter x_1, x_2 sådana att[9]

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ h \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Denna ekvation motsvarar det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 = 1 \\ -x_1 + 7x_2 = 1 \\ 3x_1 + 8x_2 = h \end{cases},$$

och som vanligt kan vi lösa detta ekvationssystem genom radreducering:

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 \\ -1 & 7 & 1 \\ 3 & 8 & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 23 & h-3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 23 & h-3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & h-26 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & h-26 \end{bmatrix}.$$

Ekvationssystemet lyder nu

$$\begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 1 \\ 0 = h - 26 \end{cases},$$

och vi drar slutsatsen att en lösning existerar för $h = 26$. Indeed, man kontrollerar enkelt att

$$6 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 26 \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad 6 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

[9]Konstanten a_3 kan inte vara lika med 0 eftersom de två första vektorerna $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$ är linjärt oberoende. Vi kan därför dividera hela ekvation (11) med $-a_3$ och flytta över vektorn $\boldsymbol{v}_3$ till högerledet. Om vi sedan definierar $x_1 = -a_1/a_3$ och $x_2 = -a_2/a_3$ så får vi ekvation (12).

Problem 1.7.45

Antag att A är en $m \times n$-matris med egenskapen att ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har högst en lösning för varje vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Använd definitionen av linjärt oberoende för att förklara varför kolumnerna i matrisen A måste vara linjärt oberoende.

Problem 1.7.45

Antag att A är en $m \times n$-matris med egenskapen att ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har högst en lösning för varje vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Använd definitionen av linjärt oberoende för att förklara varför kolumnerna i matrisen A måste vara linjärt oberoende.

Lösning: Kalla kolonnvektorerna för $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^m$, det vill säga att

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}.$$

Definitionen av matrismultiplikation ger då att

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n.$$

Enligt problemformuleringen antar vi att ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har högst en lösning $\boldsymbol{x}$ för varje $\boldsymbol{b}$, och detta antagande gäller i synnerhet nollvektorn $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$. Med andra ord har ekvationen

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0} \tag{13}$$

högst en lösning. Men vi känner redan till en sådan lösning: nollvektorn $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, dvs.

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0.$$

Det finns alltså ingen *annan* lösning på ekvation (13), det finns inga *andra* värden på skalärerna $x_1, \ldots, x_n$ som uppfyller ekvation (13), och per definition innebär detta att kolonnvektorerna $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ är linjärt oberoende.

Problem 1.8.16*

Betrakta den linjära transformationen

$$T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Använd ett rektangulärt koordinatsystem för att plotta vektorerna

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

samt vektorerna $T(\boldsymbol{u})$, $T(\boldsymbol{v})$. Beskriv geometriskt vad T gör med varje vektor i $\mathbb{R}^2$.

Problem 1.8.16*

Betrakta den linjära transformationen

$$T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

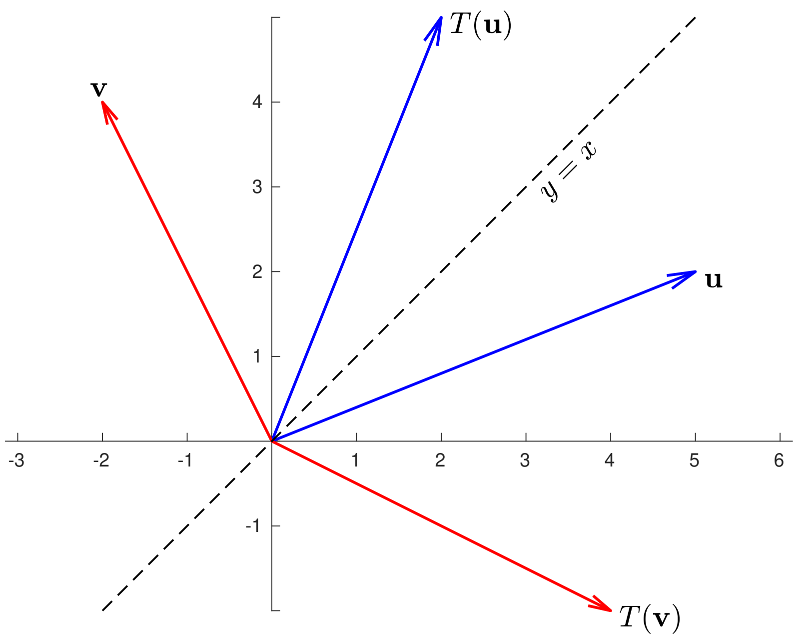
Använd ett rektangulärt koordinatsystem för att plotta vektorerna

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

samt vektorerna $T(\boldsymbol{u})$, $T(\boldsymbol{v})$. Beskriv geometriskt vad T gör med varje vektor i $\mathbb{R}^2$.

Lösning: Genom att betrakta figure nedan ser vi att den linjära transformationen T reflekterar vektorerna kring linjen $y = x$. Med andra ord byter T plats på vektorernas x- och y-koordinater, vilket vi kan bekräfta genom att utföra matrismultiplikationen:

$$T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 * x + 1 * y \\ 1 * x + 0 * y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}.$$



Problem 1.9.8

Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära transformationen som först spegelvänder vektorer kring den horisontella x_1-axeln och sedan spegelvänder vektorerna kring linjen $x_2 = x_1$. Finn standardmatrisen för T.

Jag visste inte riktigt hur jag skulle översätta uppgiften till svenska på ett tydligt sätt, så låt mig illustrera den linjära transformationen i Figur 25. Först speglas en godtycklig vektor kring x_1-axeln ($(a) \to (b)$), sedan speglas vektorn kring den streckade linjen $x_2 = x_1$ ($(b) \to (c)$).

(a) (b) (c)

Figur 25

Problem 1.9.8

Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära transformationen som först spegelvänder vektorer kring den horisontella x_1-axeln och sedan spegelvänder vektorerna kring linjen $x_2 = x_1$. Finn standardmatrisen för T.

Jag visste inte riktigt hur jag skulle översätta uppgiften till svenska på ett tydligt sätt, så låt mig illustrera den linjära transformationen i Figur 26. Först speglas en godtycklig vektor kring x_1-axeln $((a) \to (b))$, sedan speglas vektorn kring den streckade linjen $x_2 = x_1$ $((b) \to (c))$.

(a) (b) (c)

Figur 26

Lösning: Låt oss kalla de två spegelvändningarna för A_1 och A_2. När vi spegelvänder en vektor

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

kring x_1-axeln så byter vi tecken på x_2-koordinaten utan att ändra värdet på x_1-koordinaten:

$$A_1 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}.$$

Vi vill kunna skriva denna transformation med hjälp av matrismultiplikation, och vi måste därför hitta passande värden på matriselementen så att

$$A_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}.$$

Hur gör man egentligen för att lista ut hur matrisen ska se ut? Det kan vara utmanande, särskilt om matrisen är stor, så man får titta på många exempel och med tiden utveckla en känsla för hur matriser fungerar. Efter ett tag har man tillräckligt god koll på matrismultiplikation för att kunna reverse-engineera matrisen. Ett tips är att matriser på formen

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

multiplicerar x-koordinaten hos en vektor $\boldsymbol{v}$ med a och multiplicerar y-koordinaten med b:

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a * x + 0 * y \\ 0 * x + b * y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ by \end{bmatrix}.$$

Vi ville att matrisen A_1 skulle lämna x_1-koordinaten orörd och byta tecken på x_2-koordinaten, så vi kan använda ovanstående matris med $a = 1$ och $b = -1$.

Låt oss nu titta på den andra transformationen, A_2. Vad som händer när vi spegelvänder en vektor kring linjen $x_2 = x_1$ är att vi byter plats på de två koordianterna:

$$A_2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}.$$

Se till exempel $(b) \to (c)$ i Figur 26. Denna transformation representeras av matrisen

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

eftersom denna matris byter plats på koordinaterna:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 * x + 1 * y \\ 1 * x + 0 * y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}.$$

Om vi vill spegelvända en vektor kring x_1-axeln och sedan spegla den resulterande vektorn kring linjen $x_2 = x_1$, så börjar vi med att multiplicera vektorn med A_1 och sedan multiplicerar vi den resulterande vektorn med A_2. Med andra ord beräknar vi $\boldsymbol{v} \mapsto A_1\boldsymbol{v} \mapsto A_2A_1\boldsymbol{v}$. Istället för att betrakta detta som två separata transformationer så kan vi beräkna matrisprodukten $A = A_2A_1$ och se transformationen $\boldsymbol{v} \mapsto A_1\boldsymbol{v} \mapsto A_2A_1\boldsymbol{v}$ som en enda transformation $\boldsymbol{v} \mapsto A\boldsymbol{v}$:

$$A = A_2A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 * 1 + 1 * 0 & 0 * 0 + 1 * (-1) \\ 1 * 1 + 0 * 0 & 1 * 0 + 0 * (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Detta är alltså standardmatrisen för transformationen T som utför de två speglingarna.

Kuriosa: Standardmatrisen ovan kan tolkas som

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{bmatrix},$$

vilken är matrisen som roterar en vektor $\pi/2$ radianer moturs. Se $(a) \to (c)$ i Figur 26.

Problem 1.9.38*

Låt $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ vara en surjektiv linjär transformation. Beskriv hur standardmatrisen till T kan se ut efter att ha reducerats till trappstegsform.

Problem 1.9.38*

Låt $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ vara en surjektiv linjär transformation. Beskriv hur standardmatrisen till T kan se ut efter att ha reducerats till trappstegsform.

Lösning: Kom ihåg att man konstruerar standardmatrisen A genom att utvärdera T i standardbasen $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4 \in \mathbb{R}^4$ och stapla vektorerna $T(\boldsymbol{e}_1), T(\boldsymbol{e}_2), T(\boldsymbol{e}_3), T(\boldsymbol{e}_4) \in \mathbb{R}^3$ bredvid varandra som kolonnvektorer:

$$A = \begin{bmatrix} T(\boldsymbol{e}_1) & T(\boldsymbol{e}_2) & T(\boldsymbol{e}_3) & T(\boldsymbol{e}_4) \end{bmatrix}.$$

Standardmatrisen är alltså en 3×4-matris. För en godtycklig vektor

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 + x_4\boldsymbol{e}_4 \in \mathbb{R}^4,$$

så använder man linjariteten hos T för att beräkna

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{x}) &= T(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 + x_4\boldsymbol{e}_4) \\ &= x_1T(\boldsymbol{e}_1) + x_2T(\boldsymbol{e}_2) + x_3T(\boldsymbol{e}_3) + x_4T(\boldsymbol{e}_4), \end{aligned}$$

där högerledet kan skrivas om som matrismultiplikation:

$$T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} T(\boldsymbol{e}_1) & T(\boldsymbol{e}_2) & T(\boldsymbol{e}_3) & T(\boldsymbol{e}_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = A\boldsymbol{x}.$$

Att den linjära transformationen T är *surjektiv* innebär per definition att varje vektor $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$ kan skrivas som $\boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x})$ för minst en vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$. I termer av standardmatrisen A innebär detta att ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ har minst en lösning $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ för varje $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$. Enligt Theorem 4 i kapitel 1.4 är denna egenskap ekvivalent (bland annat) med att matrisen A har en pivotposition i varje rad, så svaret på uppgiften är att A måste ha följande trappstegsform:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \end{bmatrix},$$

för några skalärer $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

Övningstillfälle 5.1

Problem 2.1.6

Låt

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Beräkna matrisprodukten AB på två olika sätt: först genom att dela upp matrisen B i sina kolonnvektorer $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ och beräkna $A\boldsymbol{b}_1$ och $A\boldsymbol{b}_2$ var för sig, sedan via rad-kolumn formeln

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Problem 2.1.6

Låt

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Beräkna matrisprodukten AB på två olika sätt: först genom att dela upp matrisen B i sina kolonnvektorer $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ och beräkna $A\boldsymbol{b}_1$ och $A\boldsymbol{b}_2$ var för sig, sedan via rad-kolumn formeln

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Lösning: Den första metoden ger kolonnvektorerna

$$A\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4*1 & + & (-2)*2 \\ (-3)*1 & + & 0*2 \\ 3*1 & + & 5*2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 13 \end{bmatrix},$$

$$A\boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4*3 & + & (-2)*(-1) \\ (-3)*3 & + & 0*(-1) \\ 3*3 & + & 5*(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -9 \\ 4 \end{bmatrix},$$

så matrisprodukten är

$$AB = \begin{bmatrix} A\boldsymbol{b}_1 & A\boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 14 \\ -3 & -9 \\ 13 & 4 \end{bmatrix}.$$

Den andra metoden ger matriselementen

$$\begin{aligned}
(AB)_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 4*1 + (-2)*2 &&= 0, \\
(AB)_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 4*3 + (-2)*(-1) &&= 14, \\
(AB)_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = (-3)*1 + 0*2 &&= -3, \\
(AB)_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = (-3)*3 + 0*(-1) &&= -9, \\
(AB)_{31} &= a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} = 3*1 + 5*2 &&= 13, \\
(AB)_{32} &= a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} = 3*3 + 5*(-1) &&= 4,
\end{aligned}$$

så matrisprodukten är återigen

$$AB = \begin{bmatrix} (AB)_{11} & (AB)_{12} \\ (AB)_{21} & (AB)_{22} \\ (AB)_{31} & (AB)_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 14 \\ -3 & -9 \\ 13 & 4 \end{bmatrix}.$$

Personligen tycker jag att den första metoden är snabbast och enklast, men det är en smaksak. I vilket fall som helst är de två metoderna förstås mycket nära relaterade.

Problem 2.1.30

Visa att om kolonnerna i matrisen B är linjärt beroende, så är kolonnerna i matrisen AB också linjärt beroende.

Problem 2.1.30

Visa att om kolonnerna i matrisen B är linjärt beroende, så är kolonnerna i matrisen AB också linjärt beroende.

Lösning: Eftersom kolonnvektorerna $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ till matrisen B är linjärt beroende så existerar skalärer $r_1, \ldots, r_n$ sådana att minst en skalär $r_i \neq 0$ och

$$r_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + r_n\boldsymbol{b}_n = \mathbf{0}.$$

Matrisen AB har kolonnvektorerna $A\boldsymbol{b}_1, \ldots, A\boldsymbol{b}_n$ och enligt Theorem 2 på sida 99 är matrismultiplikation en så kallad linjär operation, vilket innebär att vi kan göra följande omskrivningar:

$$r_1 A\boldsymbol{b}_1 + \cdots + r_n A\boldsymbol{b}_n = A(r_1\boldsymbol{b}_1) + \cdots + A(r_n\boldsymbol{b}_n) = A(\underbrace{r_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + r_n\boldsymbol{b}_n}_{\mathbf{0}}) = A\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Linjärkombinationen i vänsterledet är alltså lika med nollvektorn, så kolonnvektorerna till AB är linjärt beroende.

Problem 2.2.28

Antag att P är en inverterbar matris och att $A = PBP^{-1}$. Hitta ett uttryck för B i termer av A.

Problem 2.2.28

Antag att P är en inverterbar matris och att $A = PBP^{-1}$. Hitta ett uttryck för B i termer av A.

Lösning: Eftersom matrisen P är inverterbar gäller att $PP^{-1} = I$ och $P^{-1}P = I$. Vi kan därför bli av med faktorn P^{-1} i uttrycket PBP^{-1} genom att högermultiplicera med P:

$$A = PBP^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad AP = (PBP^{-1})P = PB(P^{-1}P) = PBI = PB.$$

På samma sätt blir vi av med faktorn P i uttrycket PB genom att vänstermultiplicera med P^{-1}:

$$AP = PB \quad \Longleftrightarrow \quad P^{-1}AP = P^{-1}(PB) = (P^{-1}P)B = IB = B.$$

Uttrycket vi söker är alltså

$$B = P^{-1}AP.$$

Problem 2.2.39

Om den existerar, finn inversen till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Använd algoritmen som introducerades i detta kapitel.

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition.* Siffrorna skiljer sig något från Problem 2.2.39 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.

Problem 2.2.39

Om den existerar, finn inversen till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Använd algoritmen som introducerades i detta kapitel.

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition*. Siffrorna skiljer sig något från Problem 2.2.39 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.

Lösning: För säkerhets skull börjar vi med att kontrollera att matrisen faktiskt är inverterbar. Ett sätt att undersöka detta är att beräkna dess determinant - ett koncept med geometrisk tolkning som vi egentligen inte tar upp förrän nästa vecka. Det finns nämligen en viktig sats som säger att en (kvadratisk) matris är inverterbar om och endast om dess determinant är nollskild. Determinanten av en 2×2-matrix

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

beräknas kort sagt med formeln $\det A = ad - bc$, vilket i vårt fall blir

$$\det A = 5 * 7 - 10 * 4 = 35 - 40 = -5 \neq 0.$$

Vi drar slutsatsen att vår matris är inverterbar.

Låt oss nu tillämpa den algoritm som presenteras på sida 110: Om en matris A är inverterbar så kommer matrisen $[A \mid I]$, där elementen i A ställs bredvid elementen i identitetsmatrisen I, vara radekvivalent med matirisen $[I \mid A^{-1}]$. Allt vi behöver göra är alltså att radreducera.

$$[A \mid I] = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1/5 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1/5 & 0 \\ 0 & -1 & -4/5 & 1 \end{bmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 4/5 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7/5 & 2 \\ 0 & 1 & 4/5 & -1 \end{bmatrix} = [I \mid A^{-1}]$$

Inversen ges alltså av

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}.$$

Låt oss bekräfta detta genom att beräkna matrisprodukterna $AA^{-1} = I$ och $A^{-1}A = I$:

$$AA^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 * (-7) + 10 * 4 & 5 * 10 + 10 * (-5) \\ 4 * (-7) + 7 * 4 & 4 * 10 + 7 * (-5) \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$A^{-1}A = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} (-7) * 5 + 10 * 4 & (-7) * 10 + 10 * 7 \\ 4 * 5 + (-5) * 4 & 4 * 10 + (-5) * 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Problem 2.3.6

Avgör huruvida matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

är inverterbar. Använd så få beräkningar som möjligt, men rättfärdiga ditt svar.

Problem 2.3.6

Avgör huruvida matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

är inverterbar. Använd så få beräkningar som möjligt, men rättfärdiga ditt svar.

Lösning: The Invertible Matrix Theorem på sida 145 ger oss många olika metoder för att kontrollera huruvida matrisen är inverterbar. En sådan metod är att kontrollera om matrisen har en pivot-position för varje rad. Radreducering ger att

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -9 & -12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Denna matris har ingen pivot-position på sista raden, så matrisen kan inte vara inverterbar.

Övningstillfälle 5.2

Problem 2.8.10

Låt

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Avgör huruvida $\boldsymbol{u}$ ligger i Nul A.

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition*. Siffrorna skiljer sig något från Problem 2.8.10 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.

Problem 2.8.10

Låt

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Avgör huruvida $\boldsymbol{u}$ ligger i Nul A.

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition*. Siffrorna skiljer sig något från Problem 2.8.10 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.

Lösning: Vektorn $\boldsymbol{u}$ ligger i nollrummet till A om $A\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$, så låt oss beräkna produkten.

$$A\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-3) * (-2) & + & (-2) * 3 & + & 0 * 1 \\ 0 * (-2) & + & 2 * 3 & + & (-6) * 1 \\ 6 * (-2) & + & 3 * 3 & + & 3 * 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Svaret är alltså **Ja**, vektorn $\boldsymbol{u}$ ligger i nollrummet till matrisen A.

Problem 2.8.34

Låt A vara följande matris tillsammans med dess reducerade trappstegsform:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 & 3 & 9 \\ -2 & 2 & -2 & 7 & 5 \\ -5 & 9 & 3 & 3 & 4 \\ -2 & 6 & 6 & 3 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finn en bas för Col A samt en bas för Nul A.

Problem 2.8.34

Låt A vara följande matris tillsammans med dess reducerade trappstegsform:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 & 3 & 9 \\ -2 & 2 & -2 & 7 & 5 \\ -5 & 9 & 3 & 3 & 4 \\ -2 & 6 & 6 & 3 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finn en bas för Col A samt en bas för Nul A.

Lösning: Att finna en bas för kolonnrummet är en enkel uppgift, Theorem 13 på sida 152 säger nämligen att pivotkolonnerna formar en sådan bas:

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

För att finna en bas till nollrummet behöver vi undersöka lösningarna till ekvationen $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Den reducerade matrisen ger oss ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 7x_3 + 6x_5 = 0 \\ \qquad 2x_2 + 4x_3 + 3x_5 = 0 \\ \qquad\qquad x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -3x_3 - 2.5x_5 \\ x_2 = -2x_3 - 1.5x_5 \\ x_4 = -x_5 \end{cases}$$

där x_3 och x_5 är fria parametrar (vi hade såklart kunnat välja två andra fria parametrar). Varje lösning till ekvationen $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ kan därför skrivas som en linjärkombination

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -2.5 \\ -1.5 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

vilket innebär att

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} -2.5 \\ -1.5 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

utgör en bas för nollrummet.

Problem 2.8.40*

Om R är en 6×6-matris och Nul R *inte* är det triviala delrummet, vad kan man säga om Col R?

Problem 2.8.40*

Om R är en 6×6-matris och Nul R *inte* är det triviala delrummet, vad kan man säga om Col R?

Lösning: Om nollrummet inte är det triviala delrummet så måste det innehålla fler vektorer än bara nollvektorn; det måste finnas minst en vektor $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ som uppfyller $R\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Annorlunda uttryckt existerar fler än en lösning på ekvationen $R\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, vilket i sin tur innebär att motsvarande linjära ekvationssystem har minst en fri parameter. Matrisen R kommer därför *inte* ha följande typ av radreducering:

$$R \not\sim \begin{bmatrix} 1 & a & b & c & d & e \\ 0 & 1 & f & g & h & i \\ 0 & 0 & 1 & j & k & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 & m & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & o \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

istället kommer radreduceringen se ut exempelvis såhär:

$$R \sim \begin{bmatrix} 1 & a & b & c & d & e \\ 0 & 1 & f & g & h & i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & j & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Vi ser att det finns kolonner som inte är pivotkolonner. Eftersom pivotkolonnerna utgör en bas för kolonnrummet Col A så måste detta ha färre än 6 st basvektorer; kolonnrummets *dimension*[10] är strikt mindre än 6.

Dimensionen på *nollrummet*, å andra sidan, är antalet fria parametrar, och vi får en fri parameter för varje kolonn som *inte* är en pivotkolonn. Anledningen är att den radreducerade matrisen (14) kan radreduceras ytterligare till

$$R \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & p & 0 & q & 0 \\ 0 & 1 & r & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

och ekvationen $R\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ är därför ekvivalent med ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & p & 0 & q & 0 \\ 0 & 1 & r & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1 + px_3 + qx_5 = 0 \\ x_2 + rx_3 + sx_5 = 0 \\ x_4 + tx_5 = 0 \\ x_6 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -px_3 - qx_5 \\ x_2 = -rx_3 - sx_5 \\ x_3 \text{ fri variabel} \\ x_4 = -tx_5 \\ x_5 \text{ fri variabel} \\ x_6 = 0 \end{cases}.$$

[10] Begreppet *dimension* introduceras i kapitel 2.9 och definieras som antalet element i en bas. Dimensionen på kolonnrummet är alltså antalet pivotkolonner.

Detta är förstås bara ett exempel, men det illustrerar ett allmänt faktum: De komponenter som svarar mot pivotkolonner (x_1, x_2, x_4, x_6 i vårt fall), kan skrivas i termer av de komponenter (x_3, x_5) som *inte* svarar mot pivotkolonner, och dessa blir våra fria parametrar.

Sammanfattning: Antalet fria parametrar = antalet ej pivotkolonner. Vi får därför relationen

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{Col}\ R + \dim \mathrm{Nul}\ R &= \text{antalet pivotkolonner} + \text{antalet fria parametrar}\\ &= \text{antalet pivotkolonner} + \text{antalet ej pivotkolonner}\\ &= \text{totala antalet kolonner} = 6.\end{aligned}$$

Detta är ett allmänt resultat kallat the *rank-nullity theorem* eftersom det relaterar dimensionen på kolonnrummet (the *rank*) till dimensionen på nollrummet (the *nullity*): Om R är en godtycklig $m \times n$-matris så är

$$\dim \mathrm{Col}\ R + \dim \mathrm{Nul}\ R = n.$$

Problem 2.8.42*

Om P är en 5×5-matris och Nul P är det triviala delrummet, vad kan du säga om lösningarna på ekvationen $P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ för $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^5$?

Problem 2.8.42*

Om P är en 5×5-matris och Nul P är det triviala delrummet, vad kan du säga om lösningarna på ekvationen $P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ för $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^5$?

Lösning: Om Nul P är det triviala delrummet så innehåller ekvationssystemet $P\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ inga fria parametrar, så varje kolonn i matrisen P är en pivotkolonn. För varje $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^5$ kommer vi därför få radreduceringen

$$[P, \boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} & P_{15} & b_1 \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} & P_{25} & b_2 \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} & P_{35} & b_3 \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} & P_{45} & b_4 \\ P_{51} & P_{52} & P_{53} & P_{54} & P_{55} & b_5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & e \end{bmatrix}$$

för några siffror a, b, c, d, e som beror på vilken vektor $\boldsymbol{b}$ vi har valt. Ekvationen $P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har därför den unika lösningen

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix}.$$

Notera att det inte spelar någon roll att P är en 5×5-matris, det enda som krävs är att matrisen är kvadratisk (eftersom vi behöver exakt ett pivotelement per rad och kolonn). Vi kan alltså dra samma slutsats för alla kvadratiska matriser: Om P är en $n \times n$-matris och Nul P är det triviala delrummet så har ekvationen $P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ en unik lösning för varje $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$.

Ett annat sätt att komma fram till samma resultat är att tillämpa the invertible matrix theorem: om P är en $n \times n$-matris och Nul P är det triviala delrummet så har ekvationen $P\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ inga fria parametrar; ekvationen har bara den triviala lösningen $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. The invertible matrix theorem säger därför att matrisen P är inverterbar, så för varje $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ har ekvationen $P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ den unika lösningen $\boldsymbol{x} = P^{-1}\boldsymbol{b}$.

Ett tredje sätt att få information om lösningarna till $P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ är att använda faktumet att matrismultiplikation är en linjär operation: Antag att $\boldsymbol{x}_1$ och $\boldsymbol{x}_2$ är två lösningar på samma ekvation $P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Då är

$$P(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) = P\boldsymbol{x}_1 - P\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \mathbf{0}.$$

Vektorn $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$ är alltså en lösning på ekvationen $P\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ men eftersom Nul P är det triviala delrummet så existerar bara en enda lösning på denna ekvation, nämligen $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Det följer att $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$. Detta säger oss att *om* ekvationen $P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har en lösning så är den lösningen unik, det finns inte fler lösningar, men det säger inte om lösningen existerar från första början.

Problem 2.9.3

Låt

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Vektorn $\boldsymbol{x}$ ligger i ett vektorrum H med bas $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$. Hitta koordinaterna för vektorn $\boldsymbol{x}$ i denna bas.

Problem 2.9.3

Låt

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Vektorn $\boldsymbol{x}$ ligger i ett vektorrum H med bas $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$. Hitta koordinaterna för vektorn $\boldsymbol{x}$ i denna bas.

Lösning: Uppgiften säger alltså att vektorn $\boldsymbol{x}$ kan skrivas som en linjärkombination

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2,$$

och vi ombeds hitta värdena på skalärerna c_1 och c_2. Dessa skalärer kallas också för *koordinaterna* för vektorn $\boldsymbol{x}$ i basen $\mathcal{B}$. Ovanstående linjärkombination kan tolkas som ekvationen

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{x} \quad \iff \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix},$$

så vi kan lösa problemet genom radreducering:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 7 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Lösningen är alltså $c_1 = 7$ och $c_2 = 5$, vilket funkar finfint:

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Problem 2.9.12

Låt A vara följande matris tillsammans med dess reducerade trappstegsform:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & 3 \\ 5 & 10 & -9 & -7 & 8 \\ 4 & 8 & -9 & -2 & 7 \\ -2 & -4 & 5 & 0 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finn en bas för Col A samt en bas för Nul A, och bestäm dimensionerna hos dessa två delrum.

Problem 2.9.12

Låt A vara följande matris tillsammans med dess reducerade trappstegsform:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & 3 \\ 5 & 10 & -9 & -7 & 8 \\ 4 & 8 & -9 & -2 & 7 \\ -2 & -4 & 5 & 0 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finn en bas för Col A samt en bas för Nul A, och bestäm dimensionerna hos dessa två delrum.

Lösning: Kom ihåg att pivotkolonnerna ger en bas för kolonnrummet:

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ -9 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Kolonnrummet har alltså en bas innehållandes tre stycken basvektorer, så dess dimension är 3.

För att hitta en bas för nollrummet tittar vi på lösningarna till ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Den reducerade matrisen ger oss ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \\ -5x_5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -2x_2 + 5x_4 \\ x_3 = 2x_4 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

med de fria variablerna x_2 och x_4. Varje lösning till denna ekvation kan alltså skrivas som

$$\boldsymbol{x} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

så de två vektorerna

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

utgör en bas för nollrummet. Detta rum har således dimension 2.

OBS: Observera att matrisen har 5 kolumner och att

$$\operatorname{rank} A + \dim \operatorname{nul} A = 3 + 2 = 5.$$

Detta är ingen slump. **Theorem 14** säger nämligen att $\operatorname{rank} A + \dim \operatorname{nul} A =$ antalet kolumner. Faktum är att dimensionen på nollrummet = antalet fria variabler, som vi såg ovan, och ranken är antalet *ej* fria variabler. Summan $\operatorname{rank} A + \dim \operatorname{nul} A$ ger alltså det totala antalet variabler, vilket är samma som antalet kolumner eftersom varje variabel i det linjära ekvationssystemet ger en kolumn i matrisen.

Problem 2.9.29

Låt A vara en 7×6 matris sådan att $\operatorname{rank} A = 4$. Vad är dimensionen på rummet av alla lösningar till ekvationen $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$?

Problem 2.9.29

Låt A vara en 7×6 matris sådan att $\operatorname{rank} A = 4$. Vad är dimensionen på rummet av alla lösningar till ekvationen $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$?

Lösning: Rummet av alla lösningar på ekvationen $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ är inget annat än *nollrummet.* Uppgiften ber oss alltså beräkna dimensionen på nollrummet, $\dim \operatorname{nul} A$, och denna dimension kan beräknas med hjälp av **Theorem 14:** *Om en matris B har n stycken kolumner så är*

$$\operatorname{rank} B + \dim \operatorname{nul} B = n.$$

Vår matris A har $n = 6$ kolonner och $\operatorname{rank} A = 4$, så insättning ger

$$4 + \dim \operatorname{nul} A = 6 \quad \Rightarrow \quad \dim \operatorname{nul} A = 2.$$

Problem 2.9.32*

Konstruera en 4×3-matris med rank 1.

Problem 2.9.32*

Konstruera en 4×3-matris med rank 1.

Lösning: Rangen hos en matris är dimensionen på kolonnrummet och vi vet att pivotkolonnerna utgör en bas för detta rum, så uppgiften ber oss att konstruera en 4×3-matris med en enda pivotkolonn. Min filosofi är att den bästa lösningen är en enkel lösning, så vi behöver inte göra något mer avancerat än att ta följande matris:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Problem 3.1.22

Syftet med denna uppgift är att undersöka effekten som en radoperation har på determinanten. Beräkna determinanten för de två radekvivalenta matriserna

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \text{och} \qquad \begin{bmatrix} a + kc & b + kd \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Problem 3.1.22

Syftet med denna uppgift är att undersöka effekten som en radoperation har på determinanten. Beräkna determinanten för de två radekvivalenta matriserna

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \text{och} \qquad \begin{bmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Lösning: Determinanten av den första matrisen ges av formeln

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

Determinanten av den andra matrisen ges enligt samma process: multiplicera diagonalelementen och subtrahera sedan produkten av de två andra elementen.

$$\det \begin{bmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{bmatrix} = (a+kc)d - c(b+kd) = (ad+kcd) - (cb+kcd) = ad - bc.$$

Radoperationen har alltså ingen påverkan på determinanten.

Problem 3.2.22

Använd determinanter för att avgöra huruvida matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

är inverterbar.

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition*. Siffrorna skiljer sig något från Problem 3.2.22 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.

Problem 3.2.22

Använd determinanter för att avgöra huruvida matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

är inverterbar.

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition*. Siffrorna skiljer sig något från Problem 3.2.22 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.

Lösning: Denna uppgift bygger på Theorem 4 på sida 173, som säger att en (kvadratisk) matris är inverterbar om och endast om $\det A \neq 0$. Detta är alltså ännu en del av the Invertible Matrix Theorem, och det är den här metoden som jag personligen använder för att undersöka huruvida en matris är inverterbar (men jag beräknar normalt inte determinanten för hand, det blir väldigt traggligt om matrisen är större än 3×3).

Via detta teorem inser vi också att nästan alla matriser är inverterbara: om du skapar en matris helt på måfå och slänger in en massa random siffror på olika ställen i matrisen så är det väldigt osannolikt att siffrorna skulle balansera varandra på ett sådant sätt att determinanten blir exakt lika med 0. Det är alltså extremt osannolikt att en matris har determinant 0 av ren slump. Om du arbetar med något problem inom kemi eller något annat område och stöter på en matris som inte är inverterbar så finns det ofta en god anledning, faktumet att matrisen inte är inverterbar lär säga dig någonting viktigt om problemet som du betraktar.

Att determinanten är 0 innebär nämligen att lösningar på ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ inte behöver vara unika eller ens existera; motsvarande ekvationssystem har fria parametrar. Detta kan vara en viktig insikt, som när vi balanserade en kemisk reaktion i **Problem 1.6.6**. Kom ihåg att vi fick en fri parameter med en naturlig tolkning: Vi kan dubbla eller trippla eller femdubbla antalet molekyler av varje sort och fortfarande få en balanserad reaktion, vi "bakar fler satser" av samma reaktion. Ur denna synvinkel hade det varit betydligt konstigare om vi *inte* fick en fri parameter; om determinanten *inte* hade varit 0. Det var långt ifrån en slump.

Låt oss nu beräkna determinanten av ovanstående matris, och låt oss göra det på två olika sätt. Först använder vi följande metod:

$$\begin{aligned} \det A &= 5 \det \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - 1 \det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + (-1) \det \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \\ &= 5\Big((-3) * 3 - (-2) * 4\Big) - 1\Big(1 * 3 - (-2) * 0\Big) + (-1)\Big(1 * 4 - (-3) * 0\Big) = \\ &= 5 * (-1) - 1 * 3 - 1 * 4 = -12. \end{aligned}$$

där de tre termerna kommer från följande indelningar av matrisen A:

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

En annan metod är att radreducera matrisen så att den står på trappstegsform. Determinanten kommer i så fall vara produkten av diagonalelementen $* \ (-1)^r$ där r är antalet gånger vi har bytt plats på två rader i matrisen, och till sist dividerar vi detta med eventuella skalningar som vi har gjort av raderna. Se Theorem 3 på sida 171. Vi får att

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 16 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

så $\det A = (-1)^2 * 1 * 4 * (-3) = -12$, precis som ovan. Matrisen är inverterbar ty $\det A \neq 0$.

Problem 3.3.6*

Använd Cramer's rule för att beräkna lösningen på följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ \quad -x_1 + 2x_3 = 2 \\ \quad\ 3x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition.* Siffrorna skiljer sig något från Problem 3.3.6 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.

Problem 3.3.6*

Använd Cramer's rule för att beräkna lösningen på följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition.* Siffrorna skiljer sig något från Problem 3.3.6 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.

Lösning: Ovanstående ekvationssystem kan skrivas om på formen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}}$$

Cramer's rule säger att om matrisen A är inverterbar och om $A_i(\boldsymbol{b})$ är matrisen där den i:te kolonnen är utbytt mot vektorn $\boldsymbol{b}$,

$$A_i(b) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{i-1} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}_{i+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix},$$

så kommer ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ha den unika lösningen

$$x_i = \frac{\det A_i(\boldsymbol{b})}{\det A}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Vi börjar med att beräkna $\det A$ för att se om matrisen är inverterbar. Radreducering ger

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -8 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -15 \end{bmatrix},$$

så matrisen har determinanten $(-1)^1 * 1 * 1 * (-15) = 15$ och är därmed inverterbar.

Låt oss nu beräkna determinanterna för de tre matriserna $A_1(\boldsymbol{b})$, $A_2(\boldsymbol{b})$, $A_3(\boldsymbol{b})$.

$$A_1(\boldsymbol{b}) = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \det A_1(\boldsymbol{b}) = 6,$$

$$A_2(\boldsymbol{b}) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \det A_2(\boldsymbol{b}) = 12,$$

$$A_3(\boldsymbol{b}) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -18 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \det A_3(\boldsymbol{b}) = 18.$$

Ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har således lösningen

$$x_1 = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}, \qquad x_2 = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}, \qquad x_3 = \frac{18}{15} = \frac{6}{5},$$

vilket är lätt att verifiera för hand: Beräkna $A\boldsymbol{x}$ och observera att produkten blir vektorn $\boldsymbol{b}$.

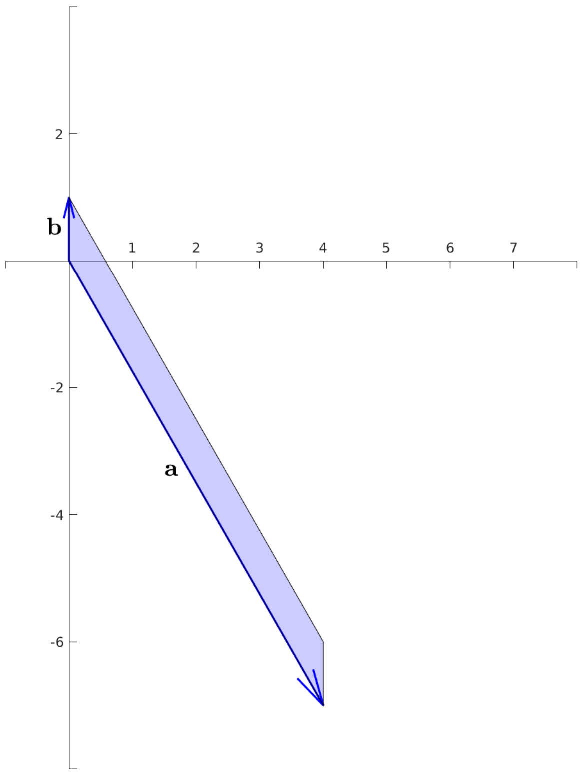
Problem 3.3.28*

Låt S vara det parallellogram som bestäms av vektorerna

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{och sätt} \qquad A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Beräkna hur arean hos parallellogrammet S förändras genom transformationen $T : \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$.

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition*. Siffrorna skiljer sig något från Problem 3.3.28 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.



Figur 27: Parallellogramet som $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ spänner upp.

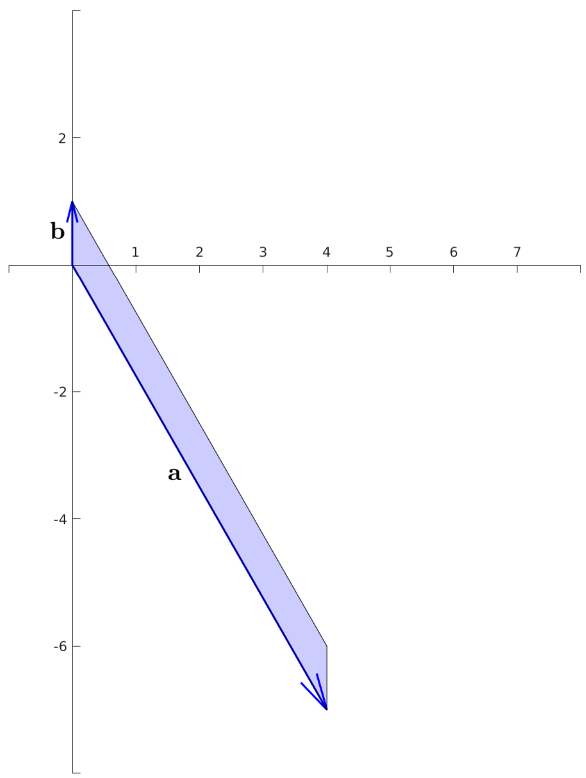
Problem 3.3.28*

Låt S vara det parallellogram som bestäms av vektorerna

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{och sätt} \qquad A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Beräkna hur arean hos parallellogrammet S förändras genom transformationen $T : \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$.

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition*. Siffrorna skiljer sig något från Problem 3.3.28 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.

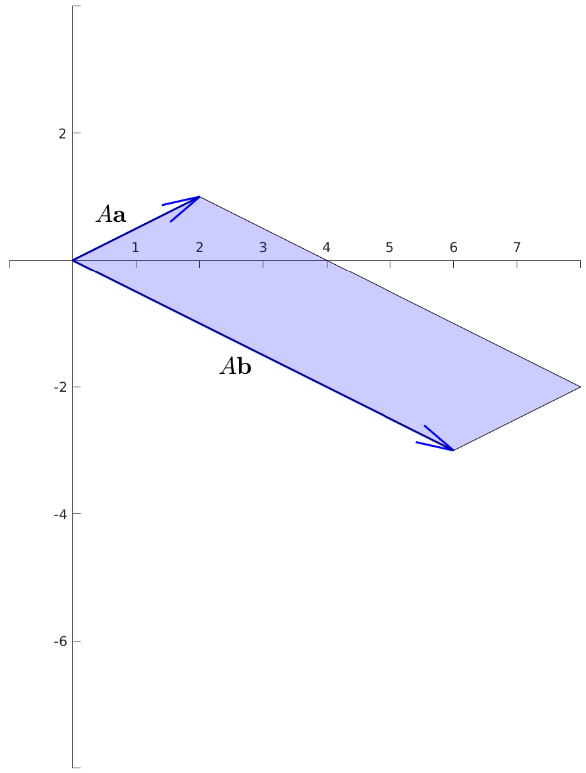


Figur 28: Parallellogramet som $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ spänner upp.

Lösning: Theorem 10 på sida 184 säger att parallellogrammets area kommer förändras med en faktor som bestäms av determinanten hos matrisen A:

$$\text{area}(T(S)) = \det A * \text{area}(S) = (5 * 1 - 2 * 1) * \text{area}(S) = 3 * \text{area}(S).$$

Arean kommer med andra ord att bli 3 gånger större.



Figur 29: Parallellogramet som $A\boldsymbol{a}, A\boldsymbol{b}$ spänner upp har 3 gånger större area än det som $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ spänner upp.

Övningstillfälle 6.1

Problem 5.1.6

Är vektorn $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ en egenvektor till matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 5 \end{bmatrix}$? Hitta i så fall egenvärdet.

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition.* Siffrorna skiljer sig något från Problem 5.1.6 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.

Problem 5.1.6

Är vektorn $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ en egenvektor till matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 5 \end{bmatrix}$? Hitta i så fall egenvärdet.

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition.* Siffrorna skiljer sig något från Problem 5.1.6 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.

Lösning: Per definition är $\boldsymbol{x}$ en egenvektor till matrisen A om $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ för någon skalär λ, som vi i så fall kallar för egenvärdet till $\boldsymbol{x}$. Vi finner att

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = -2\boldsymbol{x},$$

så $\boldsymbol{x}$ är en egenvektor till matrisen A med egenvärde $\lambda = -2$.

Problem 5.1.12

Låt

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda = 1 \text{ resp. } 5.$$

Hitta en egenbas för respektive egenrum.

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition*. Siffrorna skiljer sig något från Problem 5.1.12 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.

Problem 5.1.12

Låt

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda = 1 \text{ resp. } 5.$$

Hitta en egenbas för respektive egenrum.

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition*. Siffrorna skiljer sig något från Problem 5.1.12 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.

Lösning: Låt oss leta efter en egenvektor med egenvärde $\lambda = 1$, vilket innebär att vi måste lösa ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$. Om vi skriver högerledet som $I\boldsymbol{x}$ där I är identitetsmatrisen så kan vi flytta över allting till vänsterledet och få ekvationen $(A - I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. På matrisform blir denna ekvation

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}}_{A-I} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Denna ekvation svarar mot ekvationssystemet

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 = 0 \\ -3x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases},$$

vilket har en fri variabel x_1 och lösningen

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1.5 \end{bmatrix}.$$

Med andra ord är egenrummet för $\lambda = 1$ endimensionellt med basvektor $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.5 \end{bmatrix}$.

För att finna en egenvektor med egenvärde $\lambda = 5$ så löser vi ekvationen $A\boldsymbol{x} = 5\boldsymbol{x}$ på samma sätt som ovan, genom att först skriva om ekvationen som $(A - 5I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}}_{A-5I} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Denna ekvation svarar mot ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 0 \\ -3x_1 - 6x_2 = 0 \end{cases},$$

vilket har en fri variabel x_1 och lösningen

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix}.$$

Med andra ord är egenrummet för $\lambda = 5$ endimensionellt med basvektor $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix}$.

Problem 5.2.14

Skriv ner den karaktäristiska ekvationen för matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & -2 \end{bmatrix},$$

och finn det karaktäristiska polynomet.

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition*. Siffrorna skiljer sig något från Problem 5.2.14 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.

Problem 5.2.14

Skriv ner den karaktäristiska ekvationen för matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & -2 \end{bmatrix},$$

och finn det karaktäristiska polynomet.

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition*. Siffrorna skiljer sig något från Problem 5.2.14 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.

Lösning: Idén bakom den karaktäristiska ekvationen är följande: Om λ är ett egenvärde till matrisen A så existerar minst en nollskild (egen)vektor $\boldsymbol{v}$ sådan att $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$. Om vi skriver om denna ekvation som $(A - \lambda I)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ så ser vi att matrisen $A - \lambda I$ har en icketrivial lösning på ekvationen $(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, så the invertible matrix theorem säger att matrisen $A - \lambda I$ inte är inverterbar. En annan del av the invertible matrix theorem säger därför att

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

och det är genom att lösa denna *karaktäristiska ekvation* som vi finner egenvärdena λ.

Låt oss nu beräkna determinanten.

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 6 & 7 & -2-\lambda \end{bmatrix} = \\
&= (5-\lambda)\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 7 & -2-\lambda \end{bmatrix} - (-2)\det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6 & -2-\lambda \end{bmatrix} + 3\det \begin{bmatrix} 0 & 1-\lambda \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \\
&= (5-\lambda)\Big((1-\lambda)(-2-\lambda) + 0 * 7\Big) - (-2)\Big(0 * (-2-\lambda) - 0 * 6\Big) + 3\Big(0 * 7 - (1-\lambda) * 6\Big) = \\
&= -(5-\lambda)(1-\lambda)(2+\lambda) + 18(1-\lambda) = \\
&= (\lambda^2 - 3\lambda + 8)(1-\lambda) = \\
&= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 11\lambda + 8.
\end{aligned}$$

Det karaktäristiska *polynomet* är alltså $-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 11\lambda + 8$. Den karaktäristiska *ekvationen* får man således om man sätter polynomet till 0:

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 11\lambda + 8 = 0.$$

Problem 5.2.18*

Låt

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & h & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Man kan visa att den algebraiska multipliciteten[11] hos ett egenvärde λ alltid är större än eller lika med dimensionen hos motsvarande egenrum. Finn det värde på h i ovanstående matris som gör egenrummet för $\lambda = 5$ tvådimensionellt.

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition*. Siffrorna skiljer sig något från Problem 5.2.18 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.

[11] Den *algebraiska multipliciteten* hos ett egenvärde λ definieras som antalet gånger som faktorn $x-\lambda$ förekommer i det karaktäristiska polynomet. Om det karaktäristiska polynomet är $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, till exempel, så har egenvärdet $\lambda = 1$ den algebraiska multipliciteten 2. Dimensionen hos motsvarande egenrum kallas ofta för den *geometriska multipliciteten*.

Problem 5.2.18*

Låt

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & h & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Man kan visa att den algebraiska multipliciteten hos ett egenvärde λ alltid är större än eller lika med dimensionen hos motsvarande egenrum. Finn det värde på h i ovanstående matris som gör egenrummet för $\lambda = 5$ tvådimensionellt.

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition*. Siffrorna skiljer sig något från Problem 5.2.18 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.

Lösning: Vi finner egenvektorerna med egenvärde $\lambda = 5$ genom att lösa det ekvationssystem som svarar mot matrisekvationen $(A - 5I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Radreducering ger

$$A - 5I = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & h-6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

så ekvationssystemet har lösningen

$$\begin{cases} x_2 - 3x_3 = 0 \\ (h-6)x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 \text{ fri variabel} \\ x_2 = 3x_3 \\ (h-6)x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Om $h = 6$ så blir x_3 en fri variabel och den allmänna lösningen på $(A - 5I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ kan skrivas

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 3x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Egenrummet är tvådimensionellt, eftersom vi har två basvektorer.

Om $h \neq 6$ så ger ekvationen $(h-6)x_3 = 0$ att $x_3 = 0$. Detta ger i sin tur att $x_2 = 3x_3 = 0$. Den allmänna lösningen på ekvationen $(A - 5I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ kan därför skrivas som

$$\boldsymbol{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Egenrummet är endimensionellt, eftersom vi bara har en basvektor.

Egenrummet för $\lambda = 5$ är alltså tvådimensionellt om och endast om $h = 6$.

Problem 5.3.8

Om möjligt, diagonalisera matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Problem 5.3.8

Om möjligt, diagonalisera matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Lösning: Vi följer den metod som presenteras på sidorna 316-317 i kursboken.

Steg 1. *Beräkna matrisens egenvärden.*

Eftersom matrisen är på trappstegsform ligger egenvärdena på diagonalen, matrisen har alltså det enkla egenvärdet $\lambda = 5$. För tydlighets skull illustrerar vi detta faktum genom att också beräkna det karaktäristiska polynomet

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 0 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (5-\lambda)^2,$$

som indeed har den enda roten $\lambda = 5$.

Steg 2. *Finn två linjärt oberoende egenvektorer till matrisen.*

Eftersom matrisen bara har ett egenvärde så måste varje egenvektor $\boldsymbol{v}$ uppfylla ekvationen

$$A\boldsymbol{v} = 5\boldsymbol{v} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (A - 5I)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0},$$

så vi kan finna egenvektorerna genom att radreducera matrisen $A - 5I$. Detta är en lätt uppgift eftersom denna matris bara har en etta uppe i högra hörnet:

$$A - 5I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrisen är alltså redan radreducerad och svarar mot ekvationssystemet $v_2 = 0$. Varje egenvektor kan alltså skrivas på formen

$$\boldsymbol{v} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

vilket innebär att egenrummet är endimensionellt. Vi kan alltså inte hitta två stycken linjärt oberoende egenvektorer till matrisen A, så matrisen är inte diagonaliserbar.

Denna uppgift illustrerar ett allmänt resultat som säger att en $n \times n$-matris är diagonaliserbar om dess egenvektorer bildar en (egen)bas för $\mathbb{R}^n$, och detta är omöjligt att göra om något av egenrummen har för låg dimension; den algebraiska multipliciteten[12] måste vara lika med den geometriska multipliciteten[13] för varje egenvärde. I vårt fall har egenvärdet $\lambda = 5$ den algebraiska multipliciteten 2 men den geometriska multipliciteten 1, så matrisen är inte diagonaliserbar.

[12] Antalet gånger faktorn (*egenvärde* $- \lambda$) förekommer i det karaktäristiska polynomet.
[13] Dimensionen på egenrummet.

Problem 5.3.16

Om möjligt, diagonalisera matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix},$$

givet egenvärdena $\lambda = 2$ resp. 1.

Problem 5.3.16

Om möjligt, diagonalisera matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix},$$

givet egenvärdena $\lambda = 2$ resp. 1.

Lösning: Eftersom uppgiften har givit oss egenvärdena så hoppar vi direkt till **Steg 2.** i den metod som beskrivs på sidorna 316-317 i *Lay, 6th edition.*

Steg 2. *Finn tre linjärt oberoende egenvektorer till matrisen.*

Vi börjar med att hitta egenvektorerna för egenvärdet $\lambda = 1$ genom att radreducera

$$A - 1I = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -6 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Denna matris säger oss att ekvationen $(A - 1I)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ har den allmänna lösningen

$$\begin{cases} v_1 + 2v_3 = 0 \\ v_2 + v_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} v_1 = -2v_3 \\ v_2 = -v_3 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2v_3 \\ -v_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = v_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Egenrummet för $\lambda = 1$ är alltså endimensionellt med ovanstående vektor som bas.

På samma sätt finner vi egenvektorerna för egenvärdet $\lambda = 2$:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Detta säger oss att ekvationen $(A - 2I)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ har den allmänna lösningen

$$v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2v_2 - 3v_3 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = v_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Egenrummet för $\lambda = 2$ är alltså tvådimensionellt med ovanstående vektorer som bas.

De tre linjärt oberoende egenvektorerna vi söker är alltså

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Steg 3. *Konstruera matrisen* $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix}$.

Sagt och gjort:

$$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Steg 4. *Skapa den diagonala matrisen D från motsvarande egenvärden.*

Matrisen D är diagonalmatrisen vars i:te element är egenvärdet för $\boldsymbol{v}_i$:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vi är nu klara. Om vi har gjort rätt så ska matriserna uppfylla ekvationen $A = PDP^{-1}$ och vi kan kontrollera detta genom att undersöka den ekvivalenta ekvationen $AP = PD$. Indeed,

$$\begin{aligned} AP &= \begin{bmatrix} 0 & -4 & -6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \\ PD &= \begin{bmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Kommentar: Vi har nu löst uppgiften, men vi har inte diskuterat varför man över huvud taget *vill* diagonalisera en matris. Det finns många skäl, såväl teoretiska som praktiska. Låt mig ge ett exempel på hur diagonalisering kraftigt förenklar komplicerade matrisberäkningar: Inom de många områden som tillämpar differentialekvationer behöver man ofta beräkna exponentialen av en matris A. Denna definieras via sin Taylorutveckling,

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!},$$

men det vore hopplöst att försöka beräkna denna oändliga summa direkt. Om man först diagonaliserar matrisen, $A = PDP^{-1}$, så kan vi skriva om matrisexponenter som A^2 på formen

$$A^2 = AA = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD\underbrace{(P^{-1}P)}_{I}DP^{-1} = PD^2P^{-1},$$

där D^2 är enkel att beräkna - kvadrera helt enkelt varje diagonalelement:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_m \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad D^2 = \begin{bmatrix} d_1^2 & & & \\ & d_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_m^2 \end{bmatrix}.$$

På exakt samma sätt blir $A^n = PD^nP^{-1}$ för alla exponenter n, och för att beräkna D^n behöver vi bara ta diagonalelementen upphöjt till n. Den oändliga summan kan nu skrivas som

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{PD^nP^{-1}}{n!} = P\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n}{n!}\right)P^{-1} = Pe^DP^{-1},$$

och tack vare att matrisen D är diagonal så är dess exponential e^D mycket lätt att beräkna:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_m \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^D = \begin{bmatrix} e^{d_1} & & & \\ & e^{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{d_m} \end{bmatrix}.$$

Om vi till exempel tillämpar formeln $e^A = Pe^D P^{-1}$ på matrisen A i denna uppgift,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix},$$

så får vi matrisexponentialen

$$e^A = Pe^D P^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} e^1 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix}}_{e^D} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}}_{P^{-1}} \approx \begin{bmatrix} -2.0 & -18.7 & -28 \\ -4.7 & -2.0 & -14.0 \\ 4.7 & 9.3 & 21.4 \end{bmatrix}.$$

Att först diagonalisera $A = PDP^{-1}$ och sedan använda formeln $e^A = Pe^D P^{-1}$ är alltså betydligt enklare än att försöka beräkna den oändliga summan $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$.

Låt mig även ge ett exempel på när matrisexponentialer används. Inom kvantmekanik används tidsberoende vektorer $\boldsymbol{v}(t)$ för att beskriva tillståndet hos ett kvantmekaniskt system, exempelvis en elektron som färdas genom ett magnetfält. Vektorn är tidsberoende eftersom elektronen är i rörelse samt påverkas av magnetfältet - elektronens position, momentum och annat beror alltså på tiden. Elektronens tidsutveckling beskrivs av den allmänna Schrödingerekvationen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}(t) = -\frac{i}{\hbar} H\boldsymbol{v}(t),$$

där $i = \sqrt{-1}$ är den imaginära enheten, $\hbar$ är Placks reducerade konstant, och *Hamiltonianen* H är en kvadratisk matris som beror på vilket kvantsystem man undersöker. Denna *elektron i ett magnetfält* beskrivs av en Hamiltonian, medan *fem protoner i ett elektriskt fält* beskrivs av någon helt annan Hamiltonian, osv. Oavsett hur den ser ut är Hamiltonianen ofta konstant, obereoende av tiden, och då har Schrödingerekvationens lösning alltid samma form:[14]

$$\boldsymbol{v}(t) = e^{-iHt/\hbar}\boldsymbol{v}(0) = U(t)\boldsymbol{v}(0),$$

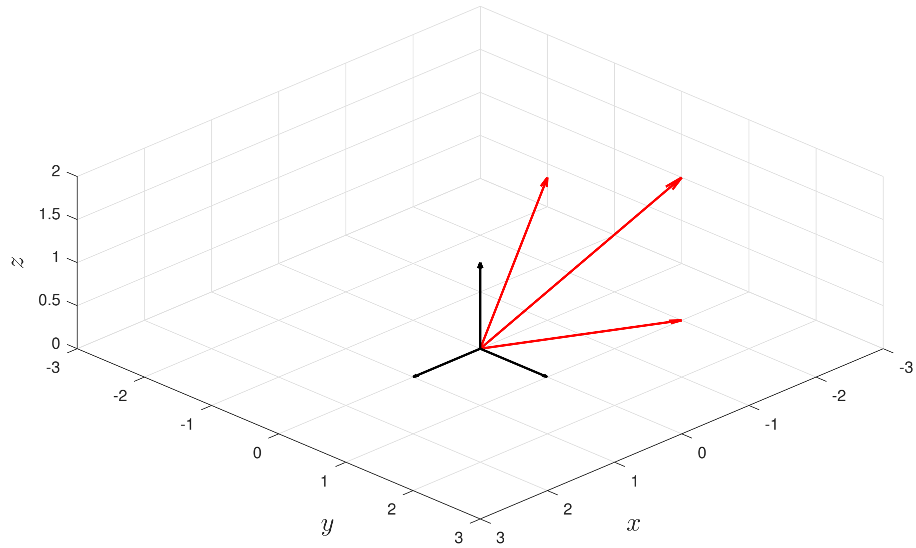
där *tidsevolutionsoperatorn* $U(t) = e^{-iHt/\hbar}$ är en sådan matrisexponential som vi beskrev ovan. Numeriska modeller av kvantmekaniska system kräver alltså att man beräknar matrisexponentialer, och diagonalisering är därför ett ovärdeligt verktyg.

[14]Schrödingerekvationen är en vektorvärd motsvarighet av $y'(t) = ay(t)$, som har lösningen $y(t) = y(0)e^{at}$.

Extramaterial: Vad innebär det egentligen att diagonalisera en matris? För att svara på denna fråga måste vi förstå innebörden hos ett *basbyte*, en förändring av koordinatsystemet i vektorrummet som vi arbetar i. Låt oss begränsa oss till tre dimensioner för att förenkla notationen. Normalt skriver vi en vektor på formen

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

där x, y, z är vektorns koordinater i det vanliga tredimensionella rummet, så till exempel pekar vektorn med koordinaterna $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$ rakt uppåt. Följande figur visar standardbasen i svart och de tre egenvektorerna $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ i rött:



Vad notationen $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ egentligen betyder är att vektorn kan skrivas som en linjärkombination

$$\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$$

där $\boldsymbol{e}_1$ är enhetsvektorn som pekar i x-led, och så vidare. Vektorns *koordinater* (x, y, z) är helt enkelt de skalärer som vi behöver placera framför våra basvektorer för att få vektorn $\boldsymbol{v}$.

Faktumet att de tre egenvektorerna utgör en bas för $\mathbb{R}^3$ innebär att varje vektor $\boldsymbol{v}$ kan skrivas som en linjärkombination

$$\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2 + c\boldsymbol{v}_3 \tag{15}$$

vilket innebär att *vektorn* $\boldsymbol{v}$ *har koordinaterna* (a, b, c) *i denna egenbas.* Ovanstående linjärkombination kan sammanfattas mer koncist genom att skriva

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

om vi kommer ihåg vilka basvektorer vi använder. Samma vektor $\boldsymbol{v}$ kan alltså skrivas som en kolonnvektor på flera olika sätt beroende på vilken bas vi använder:

$$\textbf{Standardbasen:} \quad \boldsymbol{v} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

$$\textbf{Egenbasen:} \quad \boldsymbol{v} = a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2 + c\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Till exempel kan den första egenvektorn $\boldsymbol{v}_1$ skrivas på följande vis:

$$\textbf{Standardbasen:} \quad \boldsymbol{v}_1 = (-2)\boldsymbol{e}_1 + (-1)\boldsymbol{e}_2 + 1\boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\textbf{Egenbasen:} \quad \boldsymbol{v}_1 = 1\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 + 0\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

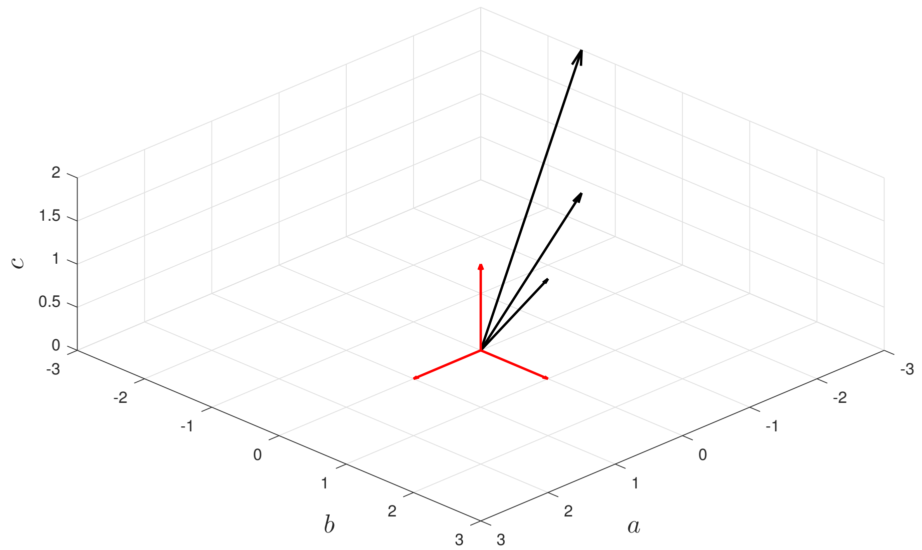
Att arbeta i egenbasen innebär att vi tänker på varje vektor som en linjärkombination (15) med koordinater (a, b, c), och vi kan då plotta varje vektor genom att placera a- och b-koordinaterna på de två horisontella axlarna och c-koordinaten på den vertikala axeln. Precis som på föregående bild är de tre egenvektorerna

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 1\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 + 0\boldsymbol{v}_3, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 0\boldsymbol{v}_1 + 1\boldsymbol{v}_2 + 0\boldsymbol{v}_3, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 0\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 + 1\boldsymbol{v}_3 \end{aligned}$$

plottade i rött, medan de tre standardbas-vektorerna

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= 1\boldsymbol{e}_1 + 0\boldsymbol{e}_2 + 0\boldsymbol{e}_3 = (-1)\boldsymbol{v}_1 + (-0.5)\boldsymbol{v}_2 + 0.5\boldsymbol{v}_3, \\ \boldsymbol{e}_2 &= 0\boldsymbol{e}_1 + 1\boldsymbol{e}_2 + 0\boldsymbol{e}_3 = (-2)\boldsymbol{v}_1 + (-0.5)\boldsymbol{v}_2 + 1\boldsymbol{v}_3, \\ \boldsymbol{e}_3 &= 0\boldsymbol{e}_1 + 0\boldsymbol{e}_2 + 1\boldsymbol{e}_3 = (-3)\boldsymbol{v}_1 + (-1.5)\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3 \end{aligned}$$

är plottade i svart.



Att byta från standardbasen där vi representerar vektorer som kolonner

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

till egenbasen (eller någon annan bas) där vi representerar vektorer som kolonner

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$$

kallas att göra ett *basbyte*. När vi utför ett basbyte så är det inte bara våra kolonnvektorer som får nya koordinater, matriserna får också nya matriselement. Kom ihåg att varje $m \times n$-matris representerar en linjär transformation $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ enligt ekvationen $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ och *matriselementen beror på vilken bas vi arbetar i, men den underliggande linjära transformationen är basoberoende.* Vad detta innebär är att de två matriserna

$$\textbf{Standardbasen:} \quad \begin{bmatrix} 0 & -4 & -6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \textbf{Egenbasen:} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

representerar samma linjära transformation $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ i två olika baser. Diagonalmatriser är väldigt lätta att arbeta med, så om man undersöker en linjär transformation T blir det ofta enklare om man byter till egenbasen där transformationen representeras av en diagonalmatris.

Problem 5.7.6

Lös begynnelsevärdesproblemet[15] $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$ för

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \ t \geq 0.$$

Notera att origo är en stationär punkt:

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{x}'(t) = A\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Avgör huruvida den stationära punkten $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ är attraktiv, repulsiv eller en sadelpunkt. Finn även den mest attraktiva/repulsiva riktningen.

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition.* Siffrorna skiljer sig något från Problem 5.7.6 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.

[15]Notera att ekvationen $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$ är väsentligen identisk med den tidigare nämna Schrödingerekvationen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}(t) = -\frac{i}{\hbar}H\boldsymbol{v}(t)$$

som beskriver hur ett kvantmekaniskt system utvecklas över tid.

Problem 5.7.6

Lös begynnelsevärdesproblemet $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$ för

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix},\ t \geq 0.$$

Notera att origo är en stationär punkt:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}.$$

Avgör huruvida den stationära punkten $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ är attraktiv, repulsiv eller en sadelpunkt. Finn även den mest attraktiva/repulsiva riktningen.

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition*. Siffrorna skiljer sig något från Problem 5.7.6 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.

Lösning: Idén är att först hitta egenvärdena λ_1, λ_2 och egenvektorerna $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ till matrisen A och sedan skriva lösningen $\boldsymbol{x}(t)$ som en linjärkombination av egenvektorerna:

$$\boldsymbol{x}(t) = a(t)\boldsymbol{v}_1 + b(t)\boldsymbol{v}_2.$$

Vi kan göra detta eftersom vår matris råkar ha två linjärt oberoende egenvektorer, vilket innebär att de utgör en bas för $\mathbb{R}^2$. Vektorn $\boldsymbol{x}(t)$ förändras över tid, så dess koefficienter $a(t), b(t)$ är även dem tidsberoende, och vi löser differentialekvationen genom att finna uttryck för koefficienterna.

Fördelen med att skriva $\boldsymbol{x}(t)$ i *egenbasen* $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ är att vi kan utnyttja att basvektorerna är egenvektorer till matrisen: $A\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1\boldsymbol{v}_1$ och $A\boldsymbol{v}_2 = \lambda_2\boldsymbol{v}_2$. En direkt utvärdering av differentialekvationen ger nämligen att

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t) &= A\big[a(t)\boldsymbol{v}_1 + b(t)\boldsymbol{v}_2\big] \\ &= a(t)A\boldsymbol{v}_1 + b(t)A\boldsymbol{v}_2 \\ &= a(t)\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + b(t)\lambda_2\boldsymbol{v}_2, \end{aligned} \tag{16}$$

vilket kan jämföras med uttrycket som en direkt beräkning av tidsderivatan $\boldsymbol{x}'(t)$ ger oss:

$$\boldsymbol{x}'(t) = a'(t)\boldsymbol{v}_1 + b'(t)\boldsymbol{v}_2. \tag{17}$$

Ekvationerna (16) och (17) sammanfaller alltså, båda är lika med $\boldsymbol{x}'(t)$, och om vi subtraherar den ena ekvationen från den andra får vi nollvektorn:

$$\big[a'(t) - \lambda_1 a(t)\big]\boldsymbol{v}_1 + \big[b'(t) - \lambda_2 b(t)\big]\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{x}'(t) - \boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{0}.$$

Vi har alltså nollvektorn som en linjärkombination av två linjärt oberoende vektorer $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$, och enligt själva definitionen av *linjärt oberoende* är linjärkombinationens koefficienter därför noll:

$$a'(t) - \lambda_1 a(t) = 0 \qquad \text{och} \qquad b'(t) - \lambda_2 b(t) = 0.$$

Dessa ekvationer är differentialekvationer med lösningarna

$$a(t) = a(0)e^{\lambda_1 t}, \qquad \text{respektive} \qquad b(t) = b(0)e^{\lambda_2 t}.$$

Ekvationen $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$ har alltså den allmänna lösningen

$$\boxed{\boldsymbol{x}(t) = a(0)e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}_1 + b(0)e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}_2}$$

Allt vi behöver göra för att lösa uppgiften är att hitta egenvärdena λ_1, λ_2 och egenvektorerna $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ till matrisen A samt begynnelsevärdena $a(0), b(0)$. En direkt insättning av dessa, i formeln ovan, kommer då ge oss lösningen på uppgiften.

Vi har redan gått igenom hur man hittar egenvärden och egenvektorer till matriser, så jag skriver inte ut processen. Det visar sig att vår matris A har egenvärdena $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = -2$, med respektive egenvektorer

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

så lösningen på ekvationen $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$ kan skrivas som

$$\boldsymbol{x}(t) = a(0)e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b(0)e^{-2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(0)e^{-t} + 2b(0)e^{-2t} \\ a(0)e^{-t} + 3b(0)e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

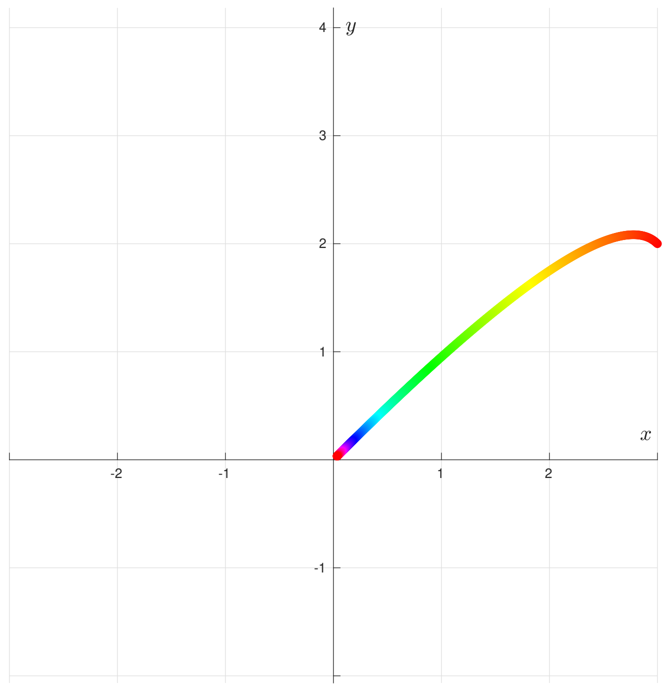
Begynnelsevärdena $a(0)$ och $b(0)$ hittar vi genom att jämföra med det kända värdet på $\boldsymbol{x}(0)$:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} a(0) + 2b(0) \\ a(0) + 3b(0) \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} a(0) = 5 \\ b(0) = -1 \end{cases}.$$

Lösningen är alltså

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} 5e^{-t} - 2e^{-2t} \\ 5e^{-t} - 3e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Fundera nu över vad som händer med denna vektor över lång tid. När tiden t är väldigt stor så är exponentialerna e^{-t} och e^{-2t} väldigt små, så vektorn kommer närmre och närmre nollvektorn ju längre tiden går. Detta innebär att nollvektorn är *attraktiv*, vilket alltid är sant när båda egenvärdena är negativa.



Figur 30: Lösningen $\boldsymbol{x}(t)$ börjar i punkten $(3, 2)$ och rör sig mot origo.

Om egenvärdena istället hade varit positiva så hade exponentialerna $e^{\lambda_1 t}$ och $e^{\lambda_2 t}$ blivit större och större med tiden och vi hade hamnat längre och längre från origo, vilket innebär att nollvektorn hade varit *repulsiv*. Situationen blir lite mer komplicerad om ett egenvärde är positivt och ett är negativt, i så fall säger vi att nollvektorn är en *sadelpunkt*. Men i vårt fall är nollvektorn som sagt attraktiv eftersom egenvärdena är negativa.

Olika begynnelsevärden $a(0), b(0)$ ger lösningar $\boldsymbol{x}(t) = a(t)\boldsymbol{v}_1 + b(t)\boldsymbol{v}_2$ som beter sig lite olika, och som i synnerhet rör sig mot origo olika snabbt. När man talar om den *mest attraktiva riktnigen* så undrar man hur $a(0), b(0)$ ska väljas för att $\boldsymbol{x}(t)$ ska färdas mot origo så snabbt som möjligt. Svaret på denna fråga är att låta startvektorn

$$\boldsymbol{x}(0) = a(0)\boldsymbol{v}_1 + b(0)\boldsymbol{v}_2,$$

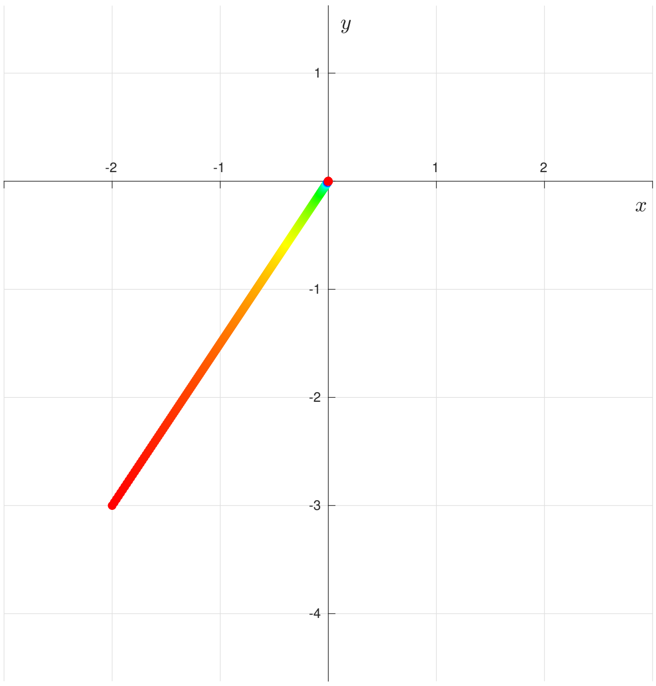
peka i samma riktning som egenvektorn med det mest negativa egenvärdet. Eftersom $\lambda_2 = -2$ är det mest negativa egenvärdet ska $\boldsymbol{x}(0)$ peka i samma riktning som $\boldsymbol{v}_2$:

$$\boldsymbol{x}(0) = b(0)\boldsymbol{v}_2.$$

Alltså är $a(0) = 0$ och det följer att $a(t) = a(0)e^{-t} = 0$ för alla tider t. Lösningen blir då

$$\boldsymbol{x}(t) = b(0)e^{-2t}\boldsymbol{v}_2,$$

Bilden nedan visar hur denna lösning rör sig spikrakt mot origo. Mest attraktiv lösning, indeed.



Figur 31: Lösningen $\boldsymbol{x}(t) = b(0)e^{-2t}\boldsymbol{v}_2$ färdas rakt mot origo, oavsett värdet på $b(0)$.

Problem 5.7.12

Låt
$$A = \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}.$$
Konstruera den allmänna lösningen på ekvationen $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ inklusive komplexa egenvärden och finn sedan den allmänna reella lösningen. Beskriv hur en typisk bana ser ut.

Problem 5.7.12

Låt

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Konstruera den allmänna lösningen på ekvationen $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ inklusive komplexa egenvärden och finn sedan den allmänna reella lösningen. Beskriv hur en typisk bana ser ut.

Lösning: Vi fann den allmänna lösningen på ekvationen $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ i förra uppgiften,

$$\boldsymbol{x}(t) = a_0 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}_1 + b_0 e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}_2,$$

och eftersom vi inte antog att egenvärdena λ_1, λ_2 är reella så gäller samma lösning även om vi har komplexa egenvärden. De två egenvärdena ges av den karaktäristiska ekvationen:

$$\det(A - \lambda I) = x^2 + 2x + 5 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = -1 + 2i, \quad \lambda_2 = -1 - 2i,$$

och om vi radreducerar matriserna $A - \lambda_1 I$ respektive $A - \lambda_2 I$ finner vi motsvarande egenvektorer

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 - i \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 + i \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Den allmänna lösningen på ekvationen $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ är alltså linjärkombinationen

$$\boxed{\boldsymbol{x}(t) = a_0 \begin{bmatrix} 3 - i \\ 2 \end{bmatrix} e^{(-1+2i)t} + b_0 \begin{bmatrix} 3 + i \\ 2 \end{bmatrix} e^{(-1-2i)t}}$$

Vi ombads även hitta den allmänna *reella* lösningen - idén är att dela upp den allmänna lösningen i en reell och en imaginär term:

$$\boldsymbol{x}(t) = \operatorname{Re}\big(\boldsymbol{x}(t)\big) + i \operatorname{Im}\big(\boldsymbol{x}(t)\big),$$

där $\operatorname{Re}\big(\boldsymbol{x}(t)\big)$ och $\operatorname{Im}\big(\boldsymbol{x}(t)\big)$ är två reella vektorer och allting imaginärt kommer från den lilla koefficienten i framför andra termen. Vi finner den reella lösningen via följande formel, där komplexkonjugatet $\overline{\boldsymbol{x}(t)}$ fås från $\boldsymbol{x}(t)$ genom att byta tecken på varje i.

$$\operatorname{Re}\big(\boldsymbol{x}(t)\big) = \frac{1}{2}\Big(\boldsymbol{x}(t) + \overline{\boldsymbol{x}(t)}\Big) = \frac{a_0 + b_0}{2}\left(\begin{bmatrix} 3 - i \\ 2 \end{bmatrix} e^{(-1+2i)t} + \begin{bmatrix} 3 + i \\ 2 \end{bmatrix} e^{(-1-2i)t}\right).$$

Detta uttryck kanske inte ser ut att vara en reell vektor eftersom vi fortfarande har en massa i:n överallt, men om man matar in detta uttryck i Matlab och utvärderar det för olika värden på t så märker man att man bara får ut reella värden på vektorerna. Alla i:n tar ut varandra.

Vi är egentligen klara nu, men det går faktiskt att få bort alla i:n om man använder formeln

$$e^{\alpha + \beta i} = e^{\alpha}(\cos\beta + i \sin\beta)$$

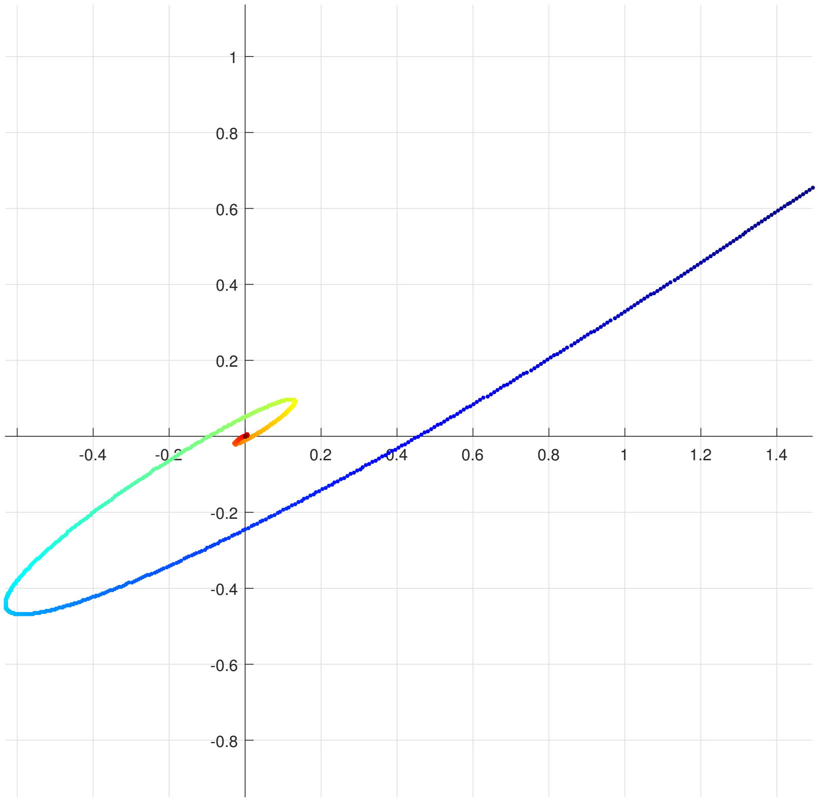
och delar upp de två vektorerna $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ i sina reella och komplexa komponenter:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 3 - i \\ 2 \end{bmatrix} e^{(-1+2i)t} + \begin{bmatrix} 3 + i \\ 2 \end{bmatrix} e^{(-1-2i)t} = \\
&= \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} i\right) e^{-t}\Big(\cos 2t + i \sin 2t\Big) + \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} i\right) e^{-t}\Big(\cos 2t - i \sin 2t\Big) = \\
&= 2\cos(2t)e^{-t}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 2\sin(2t)e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Den reella lösningen kan nu skrivas som

$$\operatorname{Re}\big(\boldsymbol{x}(t)\big) = (a_0 + b_0)e^{-t}\begin{bmatrix} 3\cos(2t) + \sin(2t) \\ 2\cos(2t) \end{bmatrix}.$$

En typisk bana går i en sorts spiral ned till den attraktiva punkten origo, vilket nedanstående figur visar. Man kan även se detta om man noterar att de trigonometriska funktionerna i lösningen håller sig runt relativt små värden medan exponentialen e^{-t} pressar $\operatorname{Re}\big(\boldsymbol{x}(t)\big)$ nedåt mot origo.



Övningstillfälle 6.2

Problem 6.2.10

Visa att de tre vektorerna

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix},$$

utgör en ortogonal bas för $\mathbb{R}^3$, och skriv följande vektor i denna ortogonala bas:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition.* Siffrorna skiljer sig något från Problem 6.2.10 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.

Problem 6.2.10

Visa att de tre vektorerna

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix},$$

utgör en ortogonal bas för $\mathbb{R}^3$, och skriv följande vektor i denna ortogonala bas:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition*. Siffrorna skiljer sig något från Problem 6.2.10 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.

Lösning: För att se att de tre vektorerna utgör en ortogonal bas beräknar vi skalärprodukterna:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 &= 3 * 2 + (-3) * 2 + 0 * (-1) = 0, \\ \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_3 &= 3 * 1 + (-3) * 1 + 0 * 4 = 0, \\ \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_3 &= 2 * 1 + 2 * 1 + (-1) * 4 = 0. \end{aligned}$$

Alla tre skalärprodukter är lika med noll, så vektorerna är ortogonala mot varandra. Detta medför att vektorerna också är linjärt oberoende, för om c_1, c_2, c_3 är skalärer sådana att

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + c_3\boldsymbol{u}_3 = \mathbf{0}, \tag{18}$$

så får vi för alla tre index $i = 1, 2, 3$ att

$$0 = \boldsymbol{u}_i \cdot \mathbf{0} = \boldsymbol{u}_i \cdot \Big(c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + c_3\boldsymbol{u}_3\Big) = c_1\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_2 + c_3\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_3 = c_i\|\boldsymbol{u}_i\|^2.$$

Ingen av vektorerna $\boldsymbol{u}_i$ är nollvektorn, så vektornormen $\|\boldsymbol{u}_i\|$ är nollskild och vi drar slutsatsen att $c_i = 0$. Ekvation (18) kan alltså bara vara uppfylld om alla tre skalärer är lika med noll, så per definition är vektorerna linjärt oberoende.

De tre vektorerna $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ utgör alltså en ortogonal bas för $\mathbb{R}^3$, så allt som återstår är att skriva vektorn $\boldsymbol{x}$ som en linjärkombination av dessa:

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + c_3\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{x}.$$

Värdena på skalärerna c_1 kan vi hitta med hjälp av en fiffig metod: För $i = 1, 2, 3$ har vi

$$\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_i \cdot \Big(c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + c_3\boldsymbol{u}_3\Big) = c_i\|\boldsymbol{u}_i\|^2 \qquad \Rightarrow \qquad c_i = \frac{\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{u}_i\|^2}.$$

Om vi tillämpar denna formeln på våra vektorer så får vi skalärerna

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{u}_1\|^2} = \frac{3 * 5 + (-3) * (-3) + 0 * 1}{3^2 + (-3)^2 + 0^2} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}, \\ c_2 &= \frac{\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{u}_2\|^2} = \frac{2 * 5 + 2 * (-3) + (-1) * 1}{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \\ c_3 &= \frac{\boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{u}_3\|^2} = \frac{1 * 5 + 1 * (-3) + 4 * 1}{1^2 + 1^2 + 4^2} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

och det är lätt att kontrollera att dessa siffror stämmer:

$$\frac{4}{3}\boldsymbol{u}_1 + \frac{1}{3}\boldsymbol{u}_2 + \frac{1}{3}\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{x}.$$

Problem 6.3.8

Låt W vara det delrum till $\mathbb{R}^3$ som spänns upp av vektorerna

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Skriv vektorn

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix},$$

som en summa av en vektor i W och en vektor som är ortogonal mot W.

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition.* Siffrorna skiljer sig något från Problem 6.3.8 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.

Problem 6.3.8

Låt W vara det delrum till $\mathbb{R}^3$ som spänns upp av vektorerna

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Skriv vektorn

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix},$$

som en summa av en vektor i W och en vektor som är ortogonal mot W.

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition.* Siffrorna skiljer sig något från Problem 6.3.8 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.

Lösning: Vi använder oss av *The Orthogonal Decomposition Theorem* på sida 392, som säger att om $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ är en ortogonal bas för W så kan vektorn $\boldsymbol{y}$ skrivas unikt som $\boldsymbol{y} = \hat{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{z}$, där

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \frac{\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{u}_1}{\|\boldsymbol{u}_1\|^2}\boldsymbol{u}_1 + \frac{\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{u}_2}{\|\boldsymbol{u}_2\|^2}\boldsymbol{u}_2 \in W,$$

och $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}}$ är ortogonal mot W.

De två vektorerna $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ i uppgiften är redan ortogonala, så vi kan tillämpa teoremet omedelbart:

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \frac{(-1) * 1 + 4 * 1 + 3 * 1}{1^2 + 1^2 + 1^2}\boldsymbol{u}_1 + \frac{(-1) * (-1) + 4 * 3 + 3 * (-2)}{(-1)^2 + 3^2 + (-2)^2}\boldsymbol{u}_2 = 2\boldsymbol{u}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_2.$$

Vektorns ortogonala dekomposition är alltså $\boldsymbol{y} = \hat{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{z}$ där

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 7/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} -5/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Notera att de två komponenterna indeed är ortogonala:

$$\hat{\boldsymbol{y}} \cdot \boldsymbol{z} = \frac{3}{2} * \left(-\frac{5}{2}\right) + \frac{7}{2} * \frac{1}{2} + 1 * 2 = -\frac{15}{4} + \frac{7}{4} + \frac{8}{4} = 0.$$

Problem 6.3.12

Finn den närmaste punkten till

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 13 \end{bmatrix},$$

i det delrum W som spänns av vektorerna

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition.* Siffrorna skiljer sig något från Problem 6.3.12 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.

Problem 6.3.12

Finn den närmaste punkten till

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 13 \end{bmatrix},$$

i det delrum W som spänns av vektorerna

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition*. Siffrorna skiljer sig något från Problem 6.3.12 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.

Lösning: *The Best Approximation Theorem* på sida 352 i kursboken säger att den närmsta punkten till $\boldsymbol{y}$ i delrummet W är den ortogonala projektionen $\hat{\boldsymbol{y}}$. Med andra ord,

$$\|\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}}\| < \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{v}\|$$

för alla vektorer $\boldsymbol{v} \in W$ sådana att $\boldsymbol{v} \neq \hat{\boldsymbol{y}}$. Uppgiften ber oss således att beräkna den ortogonala projektionen $\hat{\boldsymbol{y}}$ och detta är en enkel uppgift: eftersom vektorerna $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ utgör en ortogonal bas för delrummet W så kan vi använda formeln i *The Orthogonal Decomposition Theorem.*

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \frac{\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}\boldsymbol{v}_1 + \frac{\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_2\|^2}\boldsymbol{v}_2 = 3\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Vi är nu klara men för att verkligen illustrera att *The Best Approximation Theorem* fungerar så kan vi testa att jämföra $\|\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}}\|$ med $\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{v}\|$ för någon vektor $\boldsymbol{v} \in W$, exempelvis $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$.

$$\|\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}}\| = \| \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{64} = 8,$$

$$\|\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)\| = \| \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 14 \end{bmatrix} \| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 2^2 + 14^2} = \sqrt{208} > 8.$$

Här är alltså ett konkret exempel på att $\|\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}}\| < \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{v}\|$ för varje $\boldsymbol{v} \neq \hat{\boldsymbol{y}}$ i delrummet W.

Problem 1.4.14

Låt

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{och} \qquad A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ligger $\boldsymbol{u}$ i rummet av de vektorer som spänns av kolonnerna i A? Varför eller varför inte?

Problem 1.4.14

Låt

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{och} \qquad A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ligger $\boldsymbol{u}$ i rummet av de vektorer som spänns av kolonnerna i A? Varför eller varför inte?

Lösning: Vi ska alltså undersöka om $\boldsymbol{u}$ ligger i kolonnrummet Col A. En av flera möjliga metoder för att besvara denna fråga är att tillämpa Theorem 3 i kapitel 6.1:

$$(\text{Row}\, A)^{\perp} = \text{Nul}\, A \qquad \text{och} \qquad (\text{Col}\, A)^{\perp} = \text{Nul}\, A^T.$$

Med andra ord kan vi undersöka huruvida $\boldsymbol{u}$ är ortogonal mot alla vektorer i nollrummet Nul A^T, i så fall ligger $\boldsymbol{u}$ i kolonnrummet Col A. Som tur är behöver vi inte beräkna den inre produkten mellan $\boldsymbol{u}$ och samtliga oändligt många vektorer i nollrummet för att se huruvida de är ortogonala, det räcker att hitta en bas för nollrummet och undersöka huruvida $\boldsymbol{u}$ är ortogonal mot de ändligt många basvektorerna. Detta är en av många fördelar med att arbeta med baser.

Vi undersöker nollrummet Nul A^T genom att lösa ekvationen $A^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ via radreducering:

$$A^T = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 3 \\ 7 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/5 \\ 8 & 1 & 3 \\ 7 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 7/5 \\ 0 & -1 & -7/5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 7/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Den radreducerade matrisen svarar mot ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{1}{5}x_3 = 0 \\ x_2 + \dfrac{7}{5}x_3 = 0 \end{cases}, \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{5}x_3 \\ x_2 = -\dfrac{7}{5}x_3 \\ x_3 = \text{fri variabel} \end{cases},$$

vilket innebär att varje lösning på ekvationen $A^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ kan skrivas på formen

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} -1/5 \\ -7/5 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}}.$$

Nollrummet är således endimensionellt, med en bas som utgörs av vektorn $\boldsymbol{b}$. För att undersöka om $\boldsymbol{u}$ ligger i kolonnrummet Col A räcker det alltså att kontrollera huruvida $\boldsymbol{u}$ är ortogonal mot denna basvektor till Nul A^T:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/5 \\ -7/5 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 * (-1/5) + (-3) * (-7/5) + 1 * 2 = \frac{-2 + 21 + 10}{5} \neq 0.$$

Vektorn $\boldsymbol{u}$ är alltså inte ortogonal mot Nul A^T och därför ligger $\boldsymbol{u}$ inte i kolonnrummet Col A.

Problem 6.4.12*

Finn en ortogonal bas för kolonnrummet till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix}.$$

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition*. Siffrorna skiljer sig något från Problem 6.4.12 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.

Problem 6.4.12*

Finn en ortogonal bas för kolonnrummet till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix}.$$

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition*. Siffrorna skiljer sig något från Problem 6.4.12 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.

Lösning: Vi börjar med att radreducera matrisen för att hitta pivotkolonnerna, vilka utgör en bas för kolonnrummet. Om denna bas inte redan är ortogonal så kan vi använda basvektorerna för att konstruera en ortogonal bas via Gram-Schmidt metoden. Radreducering ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alla tre kolonner är alltså pivotkolonner och kolonnrummet är således tredimensionellt, men kolonnerna är inte ortogonala mot varandra. Idén med Gram-Schmidt är följande:

Låt W_1 vara det endimensionella delrum som spänns av den första kolonnvektorn $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1$. Den andra kolonnvektorn $\boldsymbol{v}_2$ kan skrivas som sin projektion på W_1 plus dess ortogonala komplement:

$$\boldsymbol{v}_2 = \hat{\boldsymbol{v}}_2 + \boldsymbol{u}_2 \qquad \text{där} \qquad \hat{\boldsymbol{v}}_2 \in W_1 \;\text{ och }\; \hat{\boldsymbol{v}}_2 \cdot \boldsymbol{u}_2 = 0.$$

Vi har nu två stycken ortogonala vektorer $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \hat{\boldsymbol{v}}_2$. Vi finner den tredje vektorn på samma sätt: Låt W_2 vara det tvådimensionella delrum som spänns av $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ och dela upp den tredje kolonnvektorn $\boldsymbol{v}_3$ i sin projektion på W_2 och dess ortogonala komplement:

$$\boldsymbol{v}_3 = \hat{\boldsymbol{v}}_3 + \boldsymbol{u}_3 \qquad \text{där} \qquad \hat{\boldsymbol{v}}_3 \in W_2 \;\text{ och }\; \hat{\boldsymbol{v}}_3 \cdot \boldsymbol{u}_3 = 0.$$

De tre vektorerna $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ bildar då en ortogonal bas för kolonnrummet.

Låt oss nu ta reda på hur vektorerna ser ut. Den första vektorn $\boldsymbol{u}_1$ är som sagt den första kolonnvektorn:

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Den andra vektorn får vi via projektionen på W_1:

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \hat{\boldsymbol{v}}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1}{\|\boldsymbol{u}_1\|^2}\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Den tredje vektorn får vi via projektionen på W_2:

$$\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \hat{\boldsymbol{v}}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \frac{\boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1}{\|\boldsymbol{u}_1\|^2}\boldsymbol{u}_1 - \frac{\boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2}{\|\boldsymbol{u}_2\|^2}\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} - \frac{7}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

En ortogonal bas för kolonnrummet är alltså

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Övningstillfälle 7.1

Problem 6.5.12

Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \text{och} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm den ortogonala projektionen av $\boldsymbol{b}$ på kolonnrummet $\operatorname{Col} A$.

(b) Bestäm minstakvadratlösningen på ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Problem 6.5.12

Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \text{och} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm den ortogonala projektionen av $\boldsymbol{b}$ på kolonnrummet $\operatorname{Col} A$.

(b) Bestäm minstakvadratlösningen på ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Lösning:

(a) För att beräkna den ortogonala projektionen av $\boldsymbol{b}$ på $\operatorname{Col} A$ så behöver vi en ortogonal bas för kolonnrummet. Kom ihåg att pivotkolonnerna utgör en bas, som vi kan göra ortogonal med hjälp av Gram-Schmidt metoden.

Radreducering ger att

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

alla tre kolonner $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ är alltså pivotkolonner; matrisen A har full rang. Kolonnerna är dessutom redan ortogonala vilket innebär att vi inte behöver använda Gram-Schmidt:

$$\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 + 0 - 1 + 0 = 0,$$

$$\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 2 - 2 + 0 + 0 = 0,$$

$$\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 2 + 0 + 0 - 2 = 0.$$

Den ortogonala projektionen av $\boldsymbol{b}$ på kolonnrummet $\operatorname{Col} A$ är således

$$\hat{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}_1}{\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_1}\boldsymbol{a}_1 + \frac{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}_2}{\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_2}\boldsymbol{a}_2 + \frac{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}_3}{\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{a}_3}\boldsymbol{a}_3 = \frac{12}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{18}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{-6}{6}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

(b) Vi har nu gjort majoriteten av arbetet som krävs för att hitta minstakvadratlösningen. På sidorna 406-407 i *Lay, 6th Edition* beskrivs nämligen hur $\hat{\boldsymbol{x}}$ är en minstakvadratlösning till $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ om och endast om $\hat{\boldsymbol{x}}$ löser ekvationen

$$A\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{b}}, \tag{19}$$

där $\hat{\boldsymbol{b}}$ är den ortogonala projektionen av $\boldsymbol{b}$ på kolonnrummet $\operatorname{Col} A$, alltså den vektor som vi beräknade ovan. Vi behöver alltså bara lösa (19) genom radreducering av matrisen $[A \mid \hat{\boldsymbol{b}}]$:

$$[A \mid \hat{\boldsymbol{b}}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Denna matris svarar mot ekvationssystemet

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = 2 \\ \hat{x}_2 = 3 \\ \hat{x}_3 = -1 \end{cases} \iff \hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix},$$

och vi kan enkelt bekräfta att denna vektor faktiskt löser ekvation (19):

$$A\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \hat{\boldsymbol{b}}.$$

Minstakvadratlösningen på ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ är således

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix},$$

med felmarginalen

$$\|A\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}\| = \| \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix} \| = \| \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix} \| = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + (-8)^4 + 4^4} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}.$$

Problem 6.6.3

Finn den linje $y = \beta_0 + \beta_1 x$ som bäst approximerar datapunkterna

$$(-1, 0),\ (0, 1),\ (1, 2),\ (2, 4).$$

Problem 6.6.3

Finn den linje $y = \beta_0 + \beta_1 x$ som bäst approximerar datapunkterna

$$(-1,0),\ (0,1),\ (1,2),\ (2,4).$$

Lösning: Börja med att ge datapunkterna namn:

$$\begin{aligned}(x_1,y_1) &= (-1,0),\\ (x_2,y_2) &= (0,1),\\ (x_3,y_3) &= (1,2),\\ (x_4,y_4) &= (2,4).\end{aligned} \tag{20}$$

I en perfekt värld skulle alla fyra punkter ligga på samma linje $y = \beta_0 + \beta_1 x$, men i allmänhet kan punkterna vara utspridda lite varstans i planet utan att ligga på någon gemensam linje. Istället hoppas vi finna en linje som *approximativt* beskriver datan:

$$\begin{aligned}y_1 &\approx \beta_0 + \beta_1 x_1,\\ y_2 &\approx \beta_0 + \beta_1 x_2,\\ y_3 &\approx \beta_0 + \beta_1 x_3,\\ y_4 &\approx \beta_0 + \beta_1 x_4.\end{aligned}$$

Approximationer kan vara svåra att arbeta med eftersom tecknet $\approx$ inte ger någon information om hur bra approximationen är. Istället gör vi ekvationerna exakta genom att lägga till felmarginalen $\epsilon_i = y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i$ som en explicit term:

$$\begin{aligned}y_1 &= \beta_0 + \beta_1 x_1 + \epsilon_1,\\ y_2 &= \beta_0 + \beta_1 x_2 + \epsilon_2,\\ y_3 &= \beta_0 + \beta_1 x_3 + \epsilon_3,\\ y_4 &= \beta_0 + \beta_1 x_4 + \epsilon_4.\end{aligned}$$

Dessa ekvationer kan sammanställas till matrisekvationen

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \end{bmatrix},$$

vilken mer kortfattat kan skrivas

$$\boldsymbol{y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}.$$

Målet är att finna den vektor $\boldsymbol{\beta}$ som minimerar felmarginalen $\boldsymbol{\epsilon}$. Det finns faktiskt många olika tillvägagångssätt att minimera felmarginalen, beroende på hur man mäter felmarginalens storlek, men ett naturligt sätt är att minimera längden $\|\boldsymbol{\epsilon}\|$ på felmarginal-vektorn $\boldsymbol{\epsilon}$. Om vi nu löser ut felmarginalen från ovanstående ekvation, $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{y} - X\boldsymbol{\beta}$, så innebär detta att minimera

$$\|\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{\beta}\|.$$

Detta är ekvationen $\|\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}\|$ uttryckt med andra bokstäver, och vi vet hur man minimerar den: Minstakvadratmetoden. Enligt Theorem 13 på sida 407 i kursboken *Lay, 6th Edition* beräknar vi minstakvadratlösningen genom att lösa ekvationen

$$X^T X\boldsymbol{\beta} = X^T\boldsymbol{y}.$$

Om vi nu ersätter x_i och y_i med de faktiska datapunkterna (20) så får vi

$$X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix},$$

$$X^T \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Ekvationen som vi försöker lösa, $X^T X\boldsymbol{\beta} = X^T\boldsymbol{y}$, förenklas alltså till

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix},$$

och som i alla andra uppgifter i denna kurs löser vi ekvationen genom radreducering:

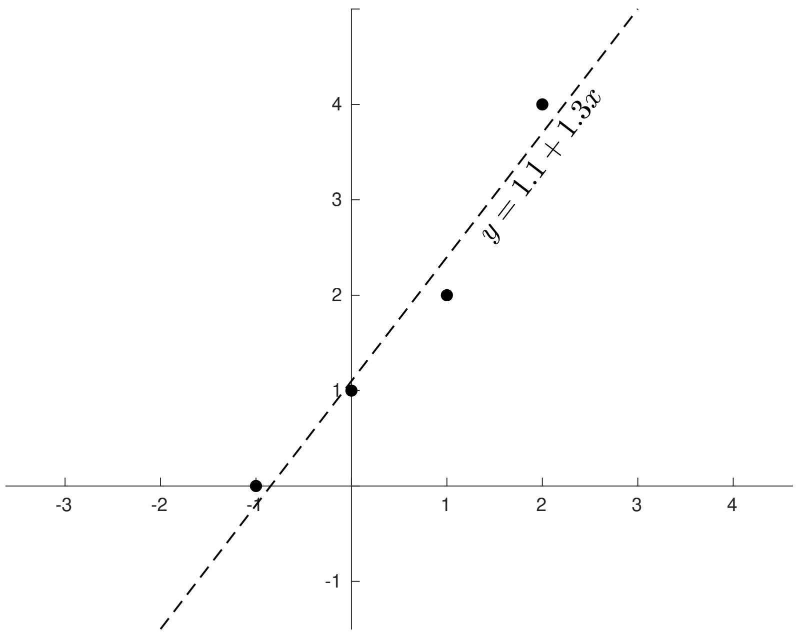
$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -10 & -13 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1.3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1.1 \\ 0 & 1 & 1.3 \end{bmatrix}.$$

Lösningen är med andra ord

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 1.3 \end{bmatrix},$$

med felmarginalen

$$\|\boldsymbol{\epsilon}\| = \|\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{\beta}\| = \| \begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.1 \\ -0.4 \\ 0.3 \end{bmatrix} \| = \sqrt{(0.2)^2 + (-0.1)^2 + (-0.4)^2 + (0.3)^2} \approx 0.5477.$$



Problem 7.1.20

Utför ortogonal diagonalisering av den symmetriska matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 4 \\ -8 & 5 & -4 \\ 4 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Finn med andra ord en ortogonal matris P och en diagonal matris D sådana att $A = PDP^T$. Till er hjälp har ni matrisens egenvärden $\lambda_1 = -3$ respektive $\lambda_2 = 15$.

Problem 7.1.20

Utför ortogonal diagonalisering av den symmetriska matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 4 \\ -8 & 5 & -4 \\ 4 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Finn med andra ord en ortogonal matris P och en diagonal matris D sådana att $A = PDP^T$. Till er hjälp har ni matrisens egenvärden $\lambda_1 = -3$ respektive $\lambda_2 = 15$.

Lösning: En kvadratisk matris P är ortogonal om dess kolonner är ortonormala.[16] En egenskap hos ortogonala matriser är att deras transponat sammanfaller med deras invers:

$$P^T = P^{-1}.$$

Detta är en mycket trevlig egenskap eftersom transponat är triviala att beräkna - det är ju bara att vrida på matrisen, en uppgift som datorer kan utföra på nanosekunder. Direkt beräkning av matrisinverser däremot, till exempel genom radreducering $[P \mid I] \sim [I \mid P^{-1}]$, kan ta lång tid om matrisen är stor. Hursomhelst, låt oss börja med uppgiften.

Som namnet antyder består ortogonal diagonalisering av två steg:

1. Diagonalisera matrisen som vanligt, genom att finna egenvärden och egenvektorer,
2. Tillämpa Gram-Schmidt på egenvektorerna och normalisera de resulterande vektorerna för att göra dem ortonormala mot varandra.

Eftersom vi känner till matrisens egenvärden λ så inleds diagonaliseringsprocessen med att finna motsvarande egenvektorer. Vi finner dem genom att radreducera matrisen $A - \lambda I$, eftersom detta ger oss lösningarna $\boldsymbol{v}$ på ekvationen $(A - \lambda I)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ som är ekvivalent med egenvärdesekvationen

$$A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}.$$

Vi börjar med egenvärdet $\lambda_1 = -3$:

$$A + 3I = \begin{bmatrix} 8 & -8 & 4 \\ -8 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad 2v_1 - 2v_2 + v_3 = 0.$$

Genom att lösa ut v_3 från denna ekvation så kan vi skriva egenvektorn på formen

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ -2v_1 + 2v_2 \end{bmatrix} = v_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{v}_1} + v_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{v}_2}.$$

Vektorerna $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ utgör således en bas för egenrummet till $\lambda_1 = -3$.

Nu tar vi det andra egenvärdet $\lambda_2 = 15$:

$$A - 15I = \begin{bmatrix} -10 & -8 & 4 \\ -8 & -10 & -4 \\ 4 & -4 & -16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_1 - 2v_3 = 0 \\ v_2 + 2v_3 = 0 \end{cases},$$

[16] Det kan tyckas att *ortonormal matris* vore ett mer lämpligt namn. Tyvärr behöver vi acceptera att namnet *ortogonal matris* har blivit standard.

vilket ger egenvektorn

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2v_3 \\ -2v_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = v_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{v}_3}.$$

Vi har nu alla ingredienser som krävs för diagonalisering av matrisen A, men inte för *ortogonal* diagonalisering. Egenvektorerna $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ är nämligen inte ortogonala mot varandra:

$$\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 * 0 + 0 * 1 + (-2) * 2 = -4 \neq 0.$$

Däremot är båda vektorerna ortogonala mot $\boldsymbol{v}_3$:

$$\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 * 2 + 0 * (-2) + (-2) * 1 = 0,$$

$$\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 * 2 + 1 * (-2) + 2 * 1 = 0.$$

Detta demonstrerar en egenskap hos symmetriska matriser som bevisas i Theorem 1 på sida 444 i boken: *Om två egenvektorer till en symmetrisk matris har olika egenvärden så är de ortogonala.*

För att uppnå ortogonal diagonalisering behöver vi endast tillämpa Gram-Schmidt processen på egenvektorerna $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$. Processen kommer ge två nya, ortogonala egenvektorer med egenvärdet $\lambda_1 = -3$ och enligt Theorem 3 ovan så kommer dessa nya vektorer fortfarande att vara ortogonala mot $\boldsymbol{v}_3$. Slutresultatet kommer alltså vara tre ortogonala egenvektorer till matrisen A och efter normalisering kommer dessa egenvektorer, tillsammans med respektive egenvärden, att utgöra den ortogoala diagonaliseringen.

Första steget i Gram-Schmidt processen är att helt enkelt behålla den första vektorn: Vi sätter

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1.$$

Det andra steget är att projicera $\boldsymbol{v}_2$ ner på den linje som genereras av $\boldsymbol{u}_1$ och sedan subtrahera projektionen från $\boldsymbol{v}_2$:

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1}{\|\boldsymbol{u}_1\|^2} \boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{-4}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Man kan säga att detta steg elliminerar den del av $\boldsymbol{v}_2$ som är parallell med $\boldsymbol{u}_1$ och lämnar bara den del av $\boldsymbol{v}_2$ som är ortogonal mot $\boldsymbol{u}_1$. Indeed, vektorerna är faktiskt ortogonala:

$$\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \Big(1 * 4 + 0 * 5 + (-2) * 2 \Big) = 0.$$

Beräkning av matrisprodukten $A\boldsymbol{u}_2$ bekräftar även att $\boldsymbol{u}_2$ är en egenvektor med egenvärde -3, så Gram-Schmidt har inte tagit oss utanför egenrummet. Alltså har vi tre ortogonala egenvektorer och nästa steg är att normalisera dem:

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{u}}_1 &= \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_1\|}\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \\
\hat{\boldsymbol{u}}_2 &= \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_2\|}\boldsymbol{u}_2 = \frac{\sqrt{5}}{3}\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{2}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \\
\hat{\boldsymbol{v}}_3 &= \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_3\|}\boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{3}\boldsymbol{v}_3 \quad = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Vi har nu tre *ortonormala* egenvektorer, så om vi definierar matriserna

$$
\begin{aligned}
P &= \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{u}}_1 & \hat{\boldsymbol{u}}_2 & \hat{\boldsymbol{v}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \\
D &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & & \\ & -3 & \\ & & 15 \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

kommer matrisen P automatiskt att vara ortogonal $\left(P^{-1} = P^T\right)$ och vi är garanterade relationen

$$A = PDP^T.$$

Övriga uppgifter

Problem 1.7.40

Avgör huruvida följande påstående är sant och motivera i så fall varför. Om påståendet är falskt, ge ett motexempel.

Påstående: Om $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_4 \in \mathbb{R}^4$ och $\boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0}$, så är mängden $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ linjärt beroende.

Problem 1.7.40

Avgör huruvida följande påstående är sant och motivera i så fall varför. Om påståendet är falskt, ge ett motexempel.

Påstående: Om $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_4 \in \mathbb{R}^4$ och $\boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0}$, så är mängden $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ linjärt beroende.

Lösning: Enligt definitionen är en mängd vektorer $\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n\}$ *linjärt oberoende* om

$$\alpha_1 \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{w}_n = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Mängden $\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n\}$ är alltså linjärt *beroende* om det finns *fler* än detta sätt att skriva nollvektorn $\mathbf{0}$ som en linjärkombination av vektorerna $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$. I vårt fall är mängden $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ linjärt beroende eftersom

$$0\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 + 1\boldsymbol{v}_3 + 0\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0},$$

eller mer allmänt

$$0\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 + \alpha_3\boldsymbol{v}_3 + 0\boldsymbol{v}_4 = \alpha_3\boldsymbol{v}_3 = \alpha_3\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

för godtyckligt $\alpha_3 \in \mathbb{R}$. Det finns med andra ord oändligt många olika sätt att skriva nollvektorn som en linjärkombination av vektorerna $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ - ett sätt för varje värde på α_3.

Problem 1.8.2

Låt

$$A = \begin{bmatrix} .5 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & 0 \\ 0 & 0 & .5 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Definiera funktionen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ genom $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$. Hitta $T(\boldsymbol{u})$ och $T(\boldsymbol{v})$.

Problem 1.8.2

Låt

$$A = \begin{bmatrix} .5 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & 0 \\ 0 & 0 & .5 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Definiera funktionen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ genom $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$. Hitta $T(\boldsymbol{u})$ och $T(\boldsymbol{v})$.

Lösning: Uppgiften blir ganska enkel om man skriver ut matriserna och vektorerna explicit:

$$T(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} .5 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & 0 \\ 0 & 0 & .5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .5*1+0*0+0*(-4) \\ 0*1+.5*0+0*(-4) \\ 0*1+0*0+.5*(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .5 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = .5\boldsymbol{u}.$$

Vi behövde alltså bara utföra matrismultiplikationen. På samma sätt får vi

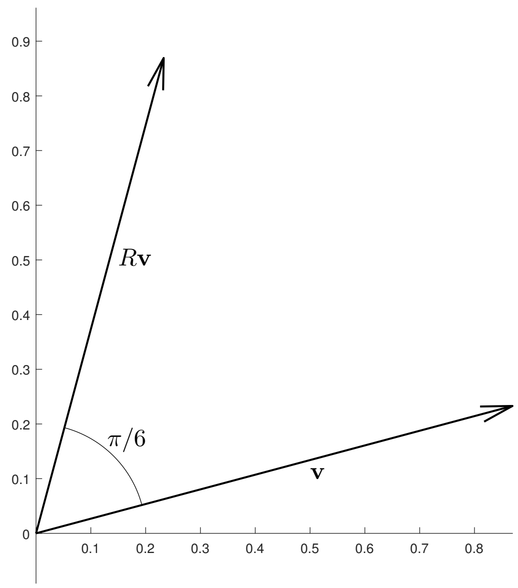
$$T(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} .5 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & 0 \\ 0 & 0 & .5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .5*a+0*b+0*c \\ 0*a+.5*b+0*c \\ 0*a+0*b+.5*c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .5a \\ .5b \\ .5c \end{bmatrix} = .5\boldsymbol{v}.$$

Vi är nu klara och du kan gå vidare till nästa uppgift, om du inte är nyfiken på lite...

Kuriosa: Tidigare har vi ofta tolkat matriser i termer av linjära ekvationssystem men denna uppgift visar en annan användning: matriser kan användas för att representera så kallade *linjära transformationer*, funktioner $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ som transformerar vektorer på ett linjärt vis. Om man exempelvis vill definiera en funktion $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som roterar en godtycklig vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ vinkeln $\pi/6$ radianer moturs, så kan man matrismultiplicera vektorn med rotationsmatrisen

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{bmatrix}.$$

Med andra ord är $T(\boldsymbol{v}) = R\boldsymbol{v}$. Linjära transformationer används överallt inom så gott som alla matematikområden, så faktumet att matriser och linjära transformationer är två sidor av samma mynt gör matriser *väldigt* användbara.



Man kan exempelvis modellera kvantdatorer genom att låta ettor och nollor representeras av vektorer som vi kallar $|1\rangle$ resp. $|0\rangle$. Tillståndet hos en *qubit* representeras av en linjärkombination

$$|\psi\rangle = a\,|0\rangle + b\,|1\rangle\,,$$

där a, b är komplexa tal. Olika värden på a och b ger olika tillstånd $|\psi\rangle$ och vi får information om vår qubit genom att undersöka vilket tillstånd den befinner sig i. Kvantdatorn utför beräkningar genom att multiplicera tillståndet $|\psi\rangle$ med vissa typer av matriser U, vilket alltså transformerar ett input-tillstånd $|\psi\rangle$ till ett output-tillstånd $|\psi'\rangle = U\,|\psi\rangle$. Om vi antar att

$$|0\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad |1\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad a\,|0\rangle + b\,|1\rangle = \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix},$$

så kan en NOT-gate, som transformerar nollor till ettor och vice versa, skrivas som matrisen

$$U_{\text{NOT}} = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}.$$

Indeed,

$$U_{\text{NOT}}\,|0\rangle = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0*1+1*0\\1*1+0*0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = |1\rangle\,,$$

$$U_{\text{NOT}}\,|1\rangle = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0*0+1*1\\1*0+0*1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = |0\rangle\,.$$

Datorer konstrueras mer eller mindre som en lång sekvens av NOT-gates, AND-gates, OR-gates och andra logiska portar som transformerar ettor och nollor, och i kvantdatorer modellerar man alltså dessa portar som olika linjära transformationer - vilket innebär matrismultiplikation.

Märks det att jag tycker det här är riktigt coolt? Linjära transformationer är guld värda.

Problem 1.9.??

Avgör huruvida transformationen

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 5x_2 + 4x_3, x_2 - 6x_3) = A\boldsymbol{x}$$

är injektiv (one-one) samt surjektiv (onto).

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition* men finns inte med i *Lay, 6th edition.*

Problem 1.9.??

Avgör huruvida transformationen

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 5x_2 + 4x_3, x_2 - 6x_3) = A\boldsymbol{x}$$

är injektiv (one-one) samt surjektiv (onto).

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition* men finns inte med i *Lay, 6th edition.*

Lösning: När vi skriver $\boldsymbol{x}$ och $T(\boldsymbol{x})$ som kolonnvektorer så kan vi hitta standardmatrisen:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A\boldsymbol{x} = T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1 - 5x_2 + 4x_3 \\ x_2 - 6x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1x_1 - 5x_2 + 4x_3 \\ 0x_1 + 1x_2 - 6x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

det vill säga

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}.$$

Theorem 12 på sida 78 säger att den linjära transformationen T är

(a) injektiv om och endast om standardmatrisens kolonnvektorer $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ är linjärt oberoende.

(b) surjektiv om och endast om standardmatrisens kolonnvektorer spänner $\mathbb{R}^2$, det vill säga om och endast om varje vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ kan skrivas som en linjärkombination

$$\boldsymbol{b} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3. \tag{21}$$

Låt oss därför undersöka dessa frågor. Transformationen är alltså surjektiv om ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 4x_3 = a \\ \qquad x_2 - 6x_3 = b \end{cases}$$

har en lösning för varje vektor

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

och vi kan undersöka detta genom radreducering:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -5 & 4 & a \\ 0 & 1 & -6 & b \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -26 & a - 5b \\ 0 & 1 & -6 & b \end{array}\right].$$

Ekvationssystemet blir alltså

$$\begin{cases} x_1 - 26x_3 = a - 5b \\ x_2 - 6x_3 = b \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 26x_3 + a - 5b \\ x_2 = 6x_3 + b \end{cases},$$

vilket har en lösning för varje värde på den fria variabeln x_3. Transformationen är surjektiv.

Transformationen är däremot inte injektiv, vilket ovanstående ekvationssystem avslöjar. Om vi låter $\boldsymbol{b}$ vara nollvektorn genom att sätta $a = b = 0$, och om vi sedan sätter $x_3 = 1$, så får vi att

$$26\boldsymbol{a}_1 + 6\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = 26 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ekvationen $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 = \mathbf{0}$ implicerar alltså inte att $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, det finns andra, nollskilda lösningar på ekvationen. Kolonnvektorerna är därför inte linjärt oberoende, och enligt Theorem 12(a) är transformationen T alltså inte injektiv.

Sammanfattning: Transformationen är surjektiv men inte injektiv.

Problem 2.9.??

Vad är rangen hos en 4×5-matris vars nollrum är tredimensionellt?

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition* men finns inte med i *Lay, 6th edition.*

Problem 2.9.??

Vad är rangen hos en 4×5-matris vars nollrum är tredimensionellt?

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition* men finns inte med i *Lay, 6th edition.*

Lösning: Rangen hos en $m \times n$-matris A definieras som dimensionen på kolonnrummet,

$$\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Col}\ A,$$

så vi kan använda oss av the rank theorem[17] på sida 159:

$$\operatorname{rank} A + \dim \operatorname{Nul}\ A = n.$$

Vår matris har 5 kolonner och nollrummet har dimension 3, så

$$\operatorname{rank} A = n - \dim \operatorname{Nul}\ A = 5 - 3 = 2.$$

[17]Som vi beskrev i en tidigare uppgift kallas detta resultat även the rank-nullity theorem.

Problem 5.1.27

(Sant/Falskt) Om $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$ är linjärt oberoende egenvektorer så har de olika egenvärden.

Problem 5.1.27

(Sant/Falskt) Om $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$ är linjärt oberoende egenvektorer så har de olika egenvärden.

Lösning: Påståendet är **falskt**, $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$ kan ha samma egenvärde. Till exempel har matrisen

$$I = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

de linjärt oberoende egenvektorerna

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

som båda svarar mot egenvärdet $\lambda = 5$.

Problem 5.1.31*

Förklara varför en 2×2-matris kan ha högst två olika egenvärden. Förklara varför en $n \times n$-matris kan ha högst n olika egenvärden.

Problem 5.1.31*

Förklara varför en 2×2-matris kan ha högst två olika egenvärden. Förklara varför en $n \times n$-matris kan ha högst n olika egenvärden.

Lösning: Ett lösning på denna uppgift får man genom att titta på Theorem 2 på sida 272, som säger att om $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ är egenvektorer som svarar mot distinkta egenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ så är vektorerna linjärt oberoende. Vi kan alltså inte ha fler än n stycken distinkta egenvärden eftersom vi inte kan ha fler än n stycken linjärt oberoende vektorer i ett n-dimensionellt vektorrum.

Problem 5.2.24

(Sant/Falskt) Matriserna A och PAP^{-1} har samma egenvärden, för varje inverterbar matris P.

Problem 5.2.24

(Sant/Falskt) Matriserna A och $P^{-1}AP$ har samma egenvärden, för varje inverterbar matris P.

Lösning: Påståendet är **sant**. Antag att $\boldsymbol{v}$ är en egenvektor till A med egenvärde λ, dvs.

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v},$$

och betrakta vektorn $P^{-1}\boldsymbol{v}$. Då gäller att

$$\left(P^{-1}AP\right)P^{-1}\boldsymbol{v} = P^{-1}A\underbrace{\left(PP^{-1}\right)}_{I}\boldsymbol{v} = P^{-1}A\boldsymbol{v} = P^{-1}\lambda\boldsymbol{v} = \lambda P^{-1}\boldsymbol{v}.$$

Vi har alltså visat att om $\boldsymbol{v}$ är en egenvektor till A, så är $P^{-1}\boldsymbol{v}$ en egenvektor till $P^{-1}AP$, och båda egenvektorerna svarar mot samma egenvärde λ.

Anmärkning: En konsekvens av detta faktum är att om A är diagonaliserbar, $A = PDP^{-1}$, så har $D = P^{-1}AP$ samma egenvärden som A. Matrisen D är dessutom diagonal,

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

vilket innebär att $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ är egenvärdena till D, och alltså även till A. Enligt uppgiften vet vi också att om $\boldsymbol{v}$ är en egenvektor till A så är $P^{-1}\boldsymbol{v}$ en egenvektor till $D = P^{-1}AP$. Men eftersom D i detta fall är diagonal så kommer dess egenvektorer vara enhetsvektorerna:

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Detta medför att $P^{-1}\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_1$, att $P^{-1}\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_2$, och så vidare. Alltså måste A ha egenvektorerna

$$\boldsymbol{v}_1 = I\boldsymbol{v}_1 = \left(PP^{-1}\right)\boldsymbol{v}_1 = P\left(P^{-1}\boldsymbol{v}_1\right) = P\boldsymbol{e}_1,$$

och $\boldsymbol{v}_2 = P\boldsymbol{e}_2$ enligt samma logik, och så vidare. Om man beräknar dessa produkter ser man att

$$\boldsymbol{v}_1 = P\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ \vdots \\ P_{n1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{p}_1,$$

där $\boldsymbol{p}_1$ är den första kolonnen i matrisen P. På samma sätt är $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{p}_2$ och så vidare. Summan av kardemumman är att *om A är diagonaliserbar, $A = PDP^{-1}$, så kommer matrisen P att bestå av egenvektorena till A och diagonalmatrisen D kommer bestå av egenvärdena till A.* Annorlunda uttryckt: *För att diagonalisera en matris behöver du hitta dess egenvektorer och egenvärden.*

Problem 5.3.24

(Sant/Falskt) Om A är diagonaliserbar så är A också inverterbar.

Problem 5.3.24

(Sant/Falskt) Om A är diagonaliserbar så är A också inverterbar.

Lösning: Påståendet är **falskt**. För att se detta, säg att A är diagonaliserbar,

$$A = PDP^{-1},$$

där D är en diagonalmatris:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Elementen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ är egenvärdena till A. Vad händer om vi försöker invertera matrisen A? Kom ihåg att inversen av en produkt av två matriser ges av $(BC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}$. Detta mönster gäller för produkter av godtyckligt många matriser, så vi får identiteten

$$A^{-1} = \left(PDP^{-1}\right)^{-1} = \left(P^{-1}\right)^{-1} D^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P^{-1}.$$

Matrisen A^{-1} existerar alltså om och endast om matrisen D^{-1} existerar, dvs. om och endast om D är inverterbar. Eftersom D är diagonal så kommer dess invers vara

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

Vi vill undvika att dela med noll, så *matrisen A är inverterbar om och endast om alla egenvärden är nollskilda.*

Anmärkning: Enligt the Invertible Matrix Theorem är en kvadratisk matris A inverterbar om och endast om dess determinant $\det(A) \neq 0$. Ett annat teorem säger att determinanten är produkten av matrisens egenvärden:

$$\det(A) = \lambda_1 * \cdots * \lambda_n.$$

Determinanten är alltså nollskild, och matrisen är därmed inverterbar, om och endast om samtliga egenvärden är nollskilda. Precis samma slutsats som ovan, och denna gång behövde vi inte ens anta att A är diagonaliserbar.

Problem 6.2.27

(Sant/Falskt) Antag att du har en samling vektorer som är ortogonala mot varandra. Om du normaliserar vektorerna så behöver de inte längre vara ortogonala.

Problem 6.2.27

(Sant/Falskt) Antag att du har en samling vektorer som är ortogonala mot varandra. Om du normaliserar vektorerna så behöver de inte längre vara ortogonala.

Lösning: Detta påstående är **falskt**, normalisering påverkar inte ortogonaliteten hos vektorerna. Säg till exempel att $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är ortogonala mot varandra: $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$. När du normaliserar en vektor så delar du bara vektorn med dess längd, så låt oss se vad som händer när vi multiplicerar (eller delar) vektorerna med varsin skalär a, b:

$$(a\boldsymbol{u}) \cdot (b\boldsymbol{v}) = ab(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) = ab * 0 = 0.$$

Vektorerna är fortfarande ortogonala mot varandra.

Practice Problem 1.5.3

Antag att $\boldsymbol{p}$ är en lösning på ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Låt nu $\boldsymbol{v}_h$ vara en godtycklig lösning på den homogena ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ och definiera $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{v}_h$. Visa att denna vektor $\boldsymbol{w}$ också är en lösning på ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Lös uppgiften med hjälp av Fredholms sats, dvs. Theorem 6.1.3:

Fredholms sats: Låt A vara en godtycklig matris. Det ortogonala komplementet till radrummet Row A samt kolonnrummet Col A ges av

$$(\text{Row } A)^{\perp} = \text{Nul } A \qquad \text{resp.} \qquad (\text{Col } A)^{\perp} = \text{Nul } A^T.$$

Practice Problem 1.5.3

Antag att $\boldsymbol{p}$ är en lösning på ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Låt nu $\boldsymbol{v}_h$ vara en godtycklig lösning på den homogena ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ och definiera $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{v}_h$. Visa att denna vektor $\boldsymbol{w}$ också är en lösning på ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Lös uppgiften med hjälp av Fredholms sats, dvs. Theorem 6.1.3:

Freholms sats: Låt A vara en godtycklig matris. Det ortogonala komplementet till radrummet Row A samt kolonnrummet Col A ges av

$$(\text{Row } A)^{\perp} = \text{Nul } A \qquad \text{resp.} \qquad (\text{Col } A)^{\perp} = \text{Nul } A^T.$$

Lösning: Att använda Fredholms sats på denna uppgift är egentligen overkill, men låt oss lösa uppgiften ändå. Teoremet säger att varje vektor $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ kan skrivas på formen

$$\boldsymbol{w} = \hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{v}_h, \tag{22}$$

där $\hat{\boldsymbol{x}} \in$ Row A och $\boldsymbol{v}_h \in (\text{Row } A)^{\perp} = \text{Nul } A$. Nollrummet består ju av alla vektorer $\boldsymbol{x}$ sådana att $A\boldsymbol{x} = 0$, och vi kan därför tolka nollrummet som lösningsmängden på den homogena ekvationen. Om vi nu antar att $\hat{\boldsymbol{x}}$ löser ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, och vi tar i åtanke allting som vi precis har sagt, så ger uppdelningen (22) att

$$A\boldsymbol{w} = A(\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{v}_h) = A\hat{\boldsymbol{x}} + A\boldsymbol{v}_h = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{b}.$$

Vektorn $\boldsymbol{w} = \hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{v}_h$ är alltså också en lösning på ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Från detta perspektiv ser vi att den allmänna lösningen kan skrivas som en partikulärlösning i radrummet, $\hat{\boldsymbol{x}} \in$ Row A, plus en homogen lösning $\boldsymbol{v}_h$ som är ortogonal mot partikulärlösningen $\hat{\boldsymbol{x}}$.

Tentauppgifter

Här finnes uppgifter från olika gamla tentor.

Problem 1.

(a) Beräkna
$$\int x\sin^2(x)\ \mathrm{d}x.$$

(b) Beräkna
$$\int_0^2 \frac{x\ \mathrm{d}x}{(x+1)(2x+1)}.$$

Lösning:

(a) För att beräkna integralen behöver vi skriva om $\sin^2(x)$ samt använda partialintegration:

$$\int x\sin^2(x)\ \mathrm{d}x = \int x\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int x\ \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int x\cos(2x)\ \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{x\sin(2x)}{2} - \frac{1}{2}\int \sin(2x)\ \mathrm{d}x\right) = \frac{x^2}{4} - \frac{x\sin(2x)}{4} - \frac{\cos(2x)}{8} + C.$$

(b) För att beräkna denna integral gör vi en partialbråksuppdelning:

$$\frac{x}{(x+1)(2x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x+1} \quad \Rightarrow \quad x = A(2x+1)+B(x+1) = (2A+B)x+(A+B),$$

vilket implicerar att $2A+B=1$ och $A+B=0$. Sätter vi in den andra ekvationen $B=-A$ i den första ekvationen får vi att $2A-A=1$, vilket ger $A=1$ och $B=-1$. Integralen blir

$$\int_0^2 \frac{x\ \mathrm{d}x}{(x+1)(2x+1)} = \int_0^2 \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1}\ \mathrm{d}x = \left[\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|2x+1|\right]_0^2 = \ln(3) - \frac{1}{2}\ln(5).$$

Problem 2.

(a) Visa att $y = 1/x$ är en lösning till differentialekvationen

$$y'' - 4y' + 13y = \frac{13x^2 + 4x + 2}{x^3}$$

och bestäm sedan alla andra lösningar.

(b) Lös integralekvationen

$$y(x) = x - \int_2^x \frac{y(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Lösning:

(a) Vi börjar med att kontrollera huruvida $y = 1/x$ löser den ickehomogena ekvationen i fråga:

$$y = \frac{1}{x} \qquad \Rightarrow \qquad y'' - 4y' + 13y = \frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^2} + \frac{13}{x} = \frac{13x^2 + 4x + 2}{x^3}.$$

Kom ihåg att varje lösning på differentialekvationen kan skrivas som en partikulärlösning på den inhomogena ekvationen plus den allmänna lösningen på den homogena ekvationen

$$y'' - 4y' + 13y = 0.$$

Hittar vi den allmänna lösningen på denna homogena ekvation så har vi alltså alla lösningar på den inhomogena ekvationen, eftersom vi redan har en partikulärlösning $y = 1/x$.

Vi ansätter $y = e^{rx}$ och får då den karaktäristiska ekvationen

$$r^2 - 4r + 13 = 0,$$

vilken har lösningarna $r = 2 \pm 3i$. Den allmänna lösningen på den homogena ekvationen är en godtycklig linjärkombination av dessa två lösningar:

$$y_h = C_1 e^{(2+3i)x} + C_2 e^{(2-3i)x}.$$

Den inhomogena ekvationen har alltså den allmänna lösningen

$$y = \frac{1}{x} + C_1 e^{(2+3i)x} + C_2 e^{(2-3i)x}.$$

(b) Om vi låtsas som att det finns en primitiv funktion $F(t)$ till integranden $f(t) = \frac{y(t)}{t}$, kan integralekvationen skrivas på formen

$$y(x) = x - F(x) + F(2).$$

Derivata och integral är ju varandras motsatser, så om man deriverar en primitiv funktion $F(t)$ får man tillbaka integranden $f(t)$. Om vi deriverar båda sidor av integralekvationen,

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(x - F(x) + F(2)\Big) = 1 - f(x) = 1 - \frac{y(x)}{x},$$

får vi alltså differentialekvationen $y'(x) = 1 - \frac{y(x)}{x}$. När man stöter på såna uttryck är det ofta hjälpsamt att multiplicera båda sidor med x för att bli av med nämnaren, och ekvationen kan då skrivas om som

$$xy' + y = x.$$

Vi noterar att vänsterledet är derivatan av xy, via produktregeln, vilket hjälper oss finna y:

$$xy' + y = x \quad \iff \quad (xy)' = x \quad \iff \quad xy = \frac{x^2}{2} + C \quad \iff \quad y = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}.$$

Vi kan rentav bestämma värdet på konstanten C, genom att mata in $x = 2$ i ekvationen:

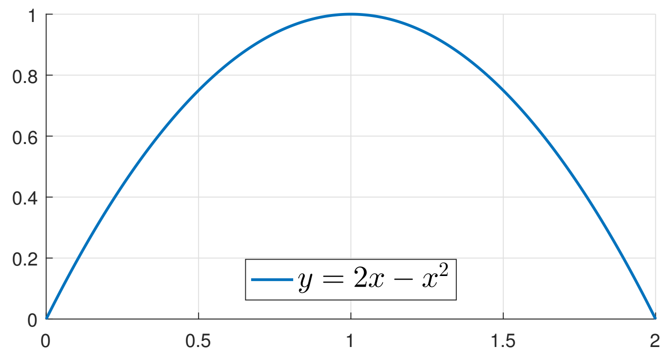
$$\frac{2}{2} + \frac{C}{2} = y(2) = 2 - \underbrace{\int_2^2 \frac{y(t)}{t}\,\mathrm{d}t}_{=0},$$

vilket implicerar att $C = 2$. Lösningen på integralekvationen är alltså

$$y(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}.$$

Problem 3.

(a) Betrakta parabeln $y = 2x - x^2$ över intervallet $[0, 2]$. Beräkna volymen av den rotationskropp som erhålls när parabeln roteras ett varv kring y-axeln.



(b) Avgör huruvida arean mellan grafen till funktionen $f(x) = |x|e^{-x^2}$ och x-axeln är begränsad. Beräkna den i så fall.

Lösning:

(a) Volymen ges genom den allmänna formeln

$$\text{vol} = 2\pi \int_a^b x f(x)\ \mathrm{d}x = 2\pi \int_0^2 2x^2 - x^3\ \mathrm{d}x = 2\pi \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = 2\pi \left(\frac{16}{3} - \frac{16}{4}\right) = \frac{8\pi}{3}.$$

(b) Kom ihåg att man hittar arean mellan en graf och x-axeln genom att integrera funktionen. Med andra ord ber uppgiften oss att avgöra huruvida integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|e^{-x^2}\ \mathrm{d}x$$

existerar, och om integralen existerar så ska vi beräkna dess värde.

Notera att integranden är en jämn funktion, dvs. funktionsvärdet ändras inte om vi byter tecken på x. Vi kan därför göra omskrivningen

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|e^{-x^2}\ \mathrm{d}x = 2\int_0^{\infty} |x|e^{-x^2} = 2\int_0^{\infty} xe^{-x^2}\ \mathrm{d}x,$$

vilket är bra eftersom det lät oss ta bort absolutbelopp-tecknet i integranden. Låt oss också skriva om integralen i termer av ett gränsvärde:

$$2\int_0^{\infty} xe^{-x^2}\ \mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} 2\int_0^{R} xe^{-x^2}\ \mathrm{d}x.$$

Den här integralen går att beräkna explicit:

$$2\int_0^{R} xe^{-x^2}\ \mathrm{d}x = \left[-e^{-x^2}\right]_0^R = 1 - e^{-R^2}.$$

När vi låter $R \to \infty$ kommer den andra termen försvinna, så vi drar slutsatsen att

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|e^{-x^2} \, \mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} 2\int_0^R xe^{-x^2} \, \mathrm{d}x = 1.$$

Arean är alltså begränsad och är lika med 1.

Problem 4.

Låt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -5 & 1 & h \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} k \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

För vilka värden på konstanterna h och k har ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ingen lösning, en unik lösning, respektive oändligt många lösningar?

Lösning: Såna här problem löser man genom att radreducera matrisen

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A \mid \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 & k \\ -5 & 1 & h & -2 \\ 1 & 5 & 3 & -1 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 & k \\ -10 & 2 & 2h & -4 \\ 2 & 10 & 6 & -2 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 & k \\ 0 & -13 & 2h-20 & 5k-4 \\ 0 & 13 & 10 & -k-2 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 & k \\ 0 & -13 & 2h-20 & 5k-4 \\ 0 & 0 & 2h-10 & 4k-6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Det går att radreducera lite till, men uttrycken blir inte mycket enklare.

Varje lösning på ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ måste alltså uppfylla ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = k \\ -13x_2 - (2h-20)x_3 = 5k-4 \\ (2h-10)x_3 = 4k-6 \end{cases}$$

och det finns några olika fall beroende på värdena på h och k:

Fall 1: Om $h \neq 5$ så existerar exakt en lösning oavsett vad k har för värde. Indeed, vi kan lösa ut x_3 genom att dividera sista raden med $2h-10$ och sen kan vi använda det kända värdet på x_3 för att lösa ut värdena på x_2 och x_1.

Fall 2: Om $h = 5$ och $k = 1.5$ så lyder sista raden $0 = 0$. Vi får x_3 som fri variabel och får därför oändligt många lösningar, en för varje värde på x_3.

Fall 3: Om $h = 5$ och $k \neq 1.5$ så säger den sista raden att vänsterledet 0 är lika med någonting nollskilt i högerledet, vilket är omöjligt. Ekvationen har ingen lösning.

Problem 5.

Ange standardmatrisen A till den linjära transformation $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som först utför en rotation $30°$ medurs runt origo och sedan speglar kring x-axeln.

Lösning: Vi beräknar först den matris R som utför rotationen och den matris S som utför speglingen. Transformationen T som utför både rotationen och speglingen kan då representeras genom multiplikation med båda dessa matriser var för sig:

$$\boldsymbol{x} \mapsto R\boldsymbol{x} \mapsto SR\boldsymbol{x}.$$

Standardmatrisen för transformationen T är alltså matrisen $A = SR$.

Kom ihåg att en allmänn rotationsmatris har formen

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

och roterar en godtycklig vektor θ grader *moturs*. Att rotera en vektor $30°$ *medurs* är samma sak som att rotera den $-30°$ moturs, så rotationsmatrisen vi är ute efter är

$$R = R(-30°) = \begin{bmatrix} \cos(-30°) & -\sin(-30°) \\ \sin(-30°) & \cos(-30°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(30°) & \sin(30°) \\ -\sin(30°) & \cos(30°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}.$$

Vad som händer när vi speglar en vektor kring x-axeln är att vektorns y-komponent byter tecken, så matrisen S uppfyller ekvationen

$$\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix},$$

vilket medför att $a = 1, b = 0, c = 0, y = -1$. Matrisen som utför speglingen är alltså

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

och den matris A som först utför rotationen R och sen speglingen S ges av matrisprodukten SR:

$$A = SR = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}.$$

Problem 6.

(a) Avgör huruvida matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ kan diagonaliseras, och ange i så fall motsvarande diagonalmatris och transformationsmatris. Kan man svara på den första frågan utan att beräkna egenvektorer? Vilken speciell egenskap har egenvektorer till den matrisen?

(b) Betrakta det system av ordinära differentialekvationer som ges av ekvationen

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}, \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ange den allmänna lösningen till detta system och bestäm även den lösning som uppfyller begynnelsevillkoret $\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Lösning:

(a) Ett sätt att se huruvida matrisen är diagonaliserbar är att helt enkelt försöka utföra diagonaliseringen och se om man stöter på något problem. Ett snabbare sätt är att notera att matrisen är symmetrisk; symmetriska matriser är alltid diagonaliserbara, och faktum är att egenvektorerna till distinkta egenvärden automatiskt är ortogonala.

För att diagonalisera matrisen använder vi den metod som står i sektion 5.3 av kursboken.

Steg 1: *Finn egenvärdena till matrisen A.*

Den karaktäristiska ekvationen

$$\det(A - \lambda I) = (2-\lambda)^2 - 3^2 = (-1-\lambda)(5-\lambda)$$

har lösningarna $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = 5$.

Steg 2: *Finn motsvarande egenvektorer.*

Egenvektorn $\boldsymbol{v}_1$ till egenvärdet $\lambda_1 = -1$ fås genom att lösa ekvationen $(A+I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Vi kan lösa denna ekvation genom att radreducera matrisen $A - \lambda_1 I = A + I$:

$$A + I = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Den första raden säger att elementen i vektorn $\boldsymbol{x}$ uppfyller ekvationen $x_1 + x_2 = 0$, så varje egenvektor med egenvärde $\lambda_1 = -1$ kan skrivas på formen

$$\boldsymbol{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = x_1 \boldsymbol{v}_1.$$

där x_1 är en fri parameter.

Egenvektorn $\boldsymbol{v}_2$ till egenvärdet $\lambda_2 = 5$ fås genom att lösa ekvationen $(A - 5I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Vi kan lösa denna ekvation genom att radreducera matrisen $A - \lambda_2 I = A - 5I$:

$$A - 5I = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Den första raden säger att elementen i vektorn $\boldsymbol{x}$ uppfyller ekvationen $x_1 - x_2 = 0$, så varje egenvektor med egenvärde $\lambda_2 = 5$ kan skrivas på formen

$$\boldsymbol{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1 \boldsymbol{v}_2,$$

där x_1 är en fri parameter.

Steg 3: *Skapa matrisen P vars kolonner är egenvektorer.*

Sagt och gjort:

$$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Steg 4: *Skapa den diagonala matrisen D vars element är egenvärden.*

Sagt och gjort:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Kom ihåg att egenvärdena i D ska placeras i samma ordning som egenvektorerna i P.

Dessa matriser är nu garanterade att uppfylla $A = PDP^{-1}$.

(b) Kom ihåg att om en $n \times n$-matris har n stycken linjärt oberoende egenvektorer så kan en godtycklig vektor skrivas som en linjärkombination av dessa:

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n.$$

Egenvektorerna bildar med andra ord en *egenbas* för $\mathbb{R}^n$. I den förra deluppgiften hittade vi två stycken (linjärt oberoende) egenvektorer till matrisen A, så det existerar en egenbas och vi kan skriva lösningen på systemet som en linjärkombination

$$\boldsymbol{x}(t) = a(t)\boldsymbol{v}_1 + b(t)\boldsymbol{v}_2.$$

Om vi deriverar denna ekvation får vi ut information om koeffcienterna $a(t), b(t)$:

$$a'(t)\boldsymbol{v}_1 + b'(t)\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t) = a(t)A\boldsymbol{v}_1 + b(t)A\boldsymbol{v}_2 = \lambda_1 a(t)\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 b(t)\boldsymbol{v}_2.$$

Uttrycken längst till vänster och längst till höger är två linjärkombinationer av egenvektorerna $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ som representerar samma vektor $\boldsymbol{x}'(t)$, så de måste ha samma koordinater:

$$a'(t) = \lambda_1 a(t) \quad \text{och} \quad b'(t) = \lambda_2 b(t) \quad \Rightarrow \quad a(t) = a(0)e^{\lambda_1 t} \quad \text{och} \quad b(t) = b(0)e^{\lambda_2 t}.$$

Den allmänna lösningen är alltså

$$\boldsymbol{x}(t) = a(0)e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}_1 + b(0)e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}_2 = a(0)e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + b(0)e^{5t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Låt oss slutligen införa begynnelsevärdet $\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Då får vi ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}(0) = a(0)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + b(0)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(0) + b(0) \\ -a(0) + b(0) \end{bmatrix},$$

vilket ger att $a(0) = 1$ och $b(0) = 2$. Begynnelsevärdesproblemet har alltså lösningen

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2e^{5t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} + 2e^{5t} \\ -e^{-t} + 2e^{5t} \end{bmatrix}.$$

Problem 7.

Bestäm en ortogonal bas till det tredimensionella vektorrum som spänns av vektorerna

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Lösning: För att hitta en ortogonal bas $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ använder vi Gram-Schmidt metoden. De två första vektorerna är som tur är redan ortogonala eftersom $\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = 0$, så vi kan sätta $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1$ samt $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_2$ och bara tillämpa Gram-Schmidt metoden på den tredje vektorn. Idén är att skriva denna vektor som en summa

$$\boldsymbol{v}_3 = \hat{\boldsymbol{v}}_3 + \boldsymbol{u}_3$$

där $\hat{\boldsymbol{v}}_3$ ligger i det delrum W som spänns av $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ och där $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \hat{\boldsymbol{v}}_3$ är ortogonal mot W. Enligt *The Orthogonal Decomposition Theorem* i sektion 6.3 ges $\hat{\boldsymbol{v}}_3$ av formeln

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{v}}_3 &= \frac{\boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1}{\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1}\boldsymbol{u}_1 + \frac{\boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2}{\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_2}\boldsymbol{u}_2 = \\ &= \frac{2 + (-1) + 1 + 0}{1+1+1+1}\boldsymbol{u}_1 + \frac{(-2) + (-1) + 1 + 0}{1+1+1+1}\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Den sista basvektorn är alltså

$$\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \hat{\boldsymbol{v}}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

och det är lätt att kontrollera att denna vektor är ortogonal mot de två andra basvektorerna $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$. Vi har således en ortogonal bas för det rum som spänns av $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$.

Problem 8.

(a) Lös begynnelsevärdesproblemet och bestäm intervallet i x där lösningen är definierad:

$$y' = xy^2, \qquad y(1) = 2.$$

(b) Ange den allmänna lösningen på ekvationen

$$y'' + 4y = \cos(2x).$$

Lösning:

(a) Denna ekvation har separabla variabler. Om vi skriver vänsterledet som $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ och låtsas som om detta vore en kvot, så kan vi multiplicera med dx och dividera med y^2 på båda sidor:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = x\ \mathrm{d}x.$$

Integrerar vi nu båda sidorna får vi

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int x\ \mathrm{d}x \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C,$$

och begynnelsevärdet låter oss rentav lista ut värdet på konstanten:

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{y(1)} = \frac{1^2}{2} + C \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1.$$

Om vi nu inverterar båda sidorna av ekvationen $-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} - 1$ så kan vi extrahera y:

$$y = -\frac{1}{\frac{x^2}{2} - 1} = -\frac{2 * 1}{2 * \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)} = -\frac{2}{x^2 - 2} = \frac{2}{2 - x^2}.$$

Lösningen är alltså

$$y = \frac{2}{2 - x^2}.$$

Denna lösning exploderar när $x \to \pm\sqrt{2}$, eftersom vi då kommer närmare och närmare att dela med noll. Lösningen $y(x)$ existerar därför bara på det öppna intervallet $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

(b) Det finns flera sätt att lösa denna uppgift. Vi testar att hitta en partikulärlösning genom att först göra en observation och sedan finslipa via trial and error:

Notera att högerledet $\cos(2x)$ är en lösning på den homogena ekvationen $y'' + 4y = 0$. Om vi istället vill att högerledet ska bli just $\cos(2x)$ istället för 0 så kan vi testa att multiplicera med x och utnyttja produktregeln för derivator, se om det hjälper oss någonting:

$$\begin{aligned} y = x\cos(2x) \quad &\Rightarrow \quad y' = \cos(2x) - 2x\sin(2x) \\ &\Rightarrow \quad y'' = -2\sin(2x) - 2\sin(2x) - 4x\cos(2x) = \\ &\qquad\quad\ = -4\sin(2x) - 4x\cos(2x) \\ &\qquad\quad\ = -4\sin(2x) - 4y. \end{aligned}$$

Det följer att $y'' + 4y = -4\sin(2x)$. Detta är inte riktigt vad vi söker, högerledet är -4 gånger för stort och borde innehålla cos istället för sin, men det ger oss en idé: Vad händer om vi vänder på steken och istället sätter $y = Cx\sin(2x)$ för någon konstant C som vi kan lista ut i efterhand? Funktionerna sin och cos är ju varandras derivator, så att definiera y i termer av sin istället för cos kanske ger oss ett högerled som innehåller cos istället för sin. Indeed,

$$\begin{aligned} y = Cx\sin(2x) \quad &\Rightarrow \quad y' = C\sin(2x) + 2Cx\cos(2x) \\ &\Rightarrow \quad y'' = 2C\cos(2x) + 2C\cos(2x) - 4C\sin(2x) = \\ &\qquad\quad = 4C\cos(2x) - 4Cx\sin(2x) \\ &\qquad\quad = 4C\cos(2x) - 4y. \end{aligned}$$

Alltså är $y'' + 4y = 4C\cos(2x)$, och sätter vi nu $C = \frac{1}{4}$ så får vi en partikulärlösning:

$$y_p = \frac{x}{4}\sin(2x).$$

Kom ihåg att lösningen på den inhomogena ekvationen kan skrivas som summan $y = y_p + y_h$ av vår partikulärlösning y_p och en homogen lösning y_h, så det är dags att lösa den homogena ekvationen $y'' + 4y = 0$. Ansättningen $y = e^{rx}$ ger

$$0 = y'' + 4y = r^2e^{rx} + 4e^{rx} = (r^2 + 4)e^{rx},$$

och eftersom e^{rx} aldrig kan vara noll, måste faktorn $r^2 + 4 = 0$. Denna andragradsekvation har rötterna $r = \pm 2i$, varför den homogena ekvationen har lösningarna e^{2xi} och e^{-2xi}. Den allmänna homogena lösningen är således en linjärkombination

$$y_h = Ae^{2xi} + Be^{-2xi},$$

och den allmänna *in*homogena lösningen är

$$\boxed{y = y_p + y_h = \frac{x}{4}\sin(2x) + Ae^{2xi} + Be^{-2xi}} \tag{23}$$

Anmärkning: Det officiella lösningsförslaget (2019-08-26) löser uppgiften på lite annat sätt och kommer fram till svaret

$$y = \frac{x}{4}\sin(2x) + C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x). \tag{24}$$

Indeed, vi noterade redan i början av vår lösning att $\cos(2x)$ löser den homogena ekvationen. Kopplingen mellan dessa två svar ges av identiteterna

$$\cos(2x) = \frac{e^{2xi} + e^{-2xi}}{2}, \qquad \sin(2x) = \frac{e^{2xi} - e^{-2xi}}{2i},$$

som kan bevisas med hjälp av Eulers formel. Man kan alltså skriva om lösningen (24) på formen (23) (och vice versa) genom en lämplig förändring av konstanterna:

$$A = \frac{C_1 - iC_2}{2}, \qquad B = \frac{C_1 + iC_2}{2}.$$

Problem 9.

Betrakta följande matris A och vektor $\boldsymbol{b}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 10 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm om systemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ är lösbart.

(b) Bestäm bas och dimension hos kolonnrummet Col A.

(c) Betrakta transponatet A^T och ange en bas och dimension hos dess nollrum Nul A^T.

(d) Avgör om vektorn $\boldsymbol{b}$ är ortogonal mot Nul A^T.

Lösning:

(a) Vi undersöker systemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ genom att radreducera matrisen $[A \mid \boldsymbol{b}]$.

$$[A \mid \boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & 10 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 3 & 9 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Näst sista raden svarar mot ekvationen $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 2$, vilken inte har någon lösning. Systemet är olösligt.

(b) Kom ihåg att pivotkolonnerna utgör en bas för kolonnrummet. Enligt föregående deluppgift kan matrisen A radreduceras till

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De två första kolonnerna i matrisen A,

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

utgör alltså en bas till kolonnrummet, och dimensionen hos kolonnrummet är därför 2.

(c) Det officiella lösningsförslaget (2018-04-04) använder en direkt approach som går ut på att finna den allmänna lösningen på ekvationen $A^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Med andra ord radreducerar man A^T. Istället för att kopiera denna approach rakt av så testar vi någonting annat:

Fredholms sats säger att Nul A^T är det ortogonala komplement till Col A från förra deluppgiften:

$$(\text{Col } A)^\perp = \text{Nul } A^T.$$

Fredholms sats låter oss skapa en bas för nollrummet på följande vis:

Steg 1. Utöka kolonnrummets bas $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ till en bas för hela rummet $\mathbb{R}^4$, genom att hitta två lämpliga vektorer $\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$. Till exempel utgör följande vektorer en sådan bas:

$$\underbrace{\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}}_{\text{Bas för kolonnrummet}}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Steg 2. Tillämpa Gram-Schmidt för att göra om $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_4$ till en ortogonal bas för $\mathbb{R}^4$:

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1}{\|\boldsymbol{u}_1\|^2}\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{10}{4}\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-3\\-1\\1\\3\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \frac{\boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1}{\|\boldsymbol{u}_1\|^2}\boldsymbol{u}_1 - \frac{\boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2}{\|\boldsymbol{u}_2\|^2}\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_3 - \frac{1}{4}\boldsymbol{u}_1 + \frac{3}{10}\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}3\\-4\\-1\\2\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}_4 = \boldsymbol{v}_4 - \frac{\boldsymbol{v}_4 \cdot \boldsymbol{u}_1}{\|\boldsymbol{u}_1\|^2}\boldsymbol{u}_1 - \frac{\boldsymbol{v}_4 \cdot \boldsymbol{u}_2}{\|\boldsymbol{u}_2\|^2}\boldsymbol{u}_2 - \frac{\boldsymbol{v}_4 \cdot \boldsymbol{u}_3}{\|\boldsymbol{u}_3\|^2}\boldsymbol{u}_3 = \cdots = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}0\\1\\-2\\1\end{bmatrix}.$$

Steg 3. Vektorerna $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_4$ utgör nu en *ortogonal* bas för $\mathbb{R}^4$, och dessutom utgör $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ en ortogonal bas för kolonnrummet Col A. Om vi låter W vara delrummet som spänns upp av vektorerna $\boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$, så säger ortogonaliteten hos alla inblandade vektorer att rummen Col A och W är varandras ortogonala komplement:

$$W = (\text{Col } A)^{\perp},$$

Faktumet att $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_4$ utgör en bas för $\mathbb{R}^4$ innebär nämligen att varje vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ kan skrivas som en linjärkombination

$$\boldsymbol{x} = \underbrace{c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2}_{\boldsymbol{y} \in \text{Col } A} + \underbrace{c_3\boldsymbol{u}_3 + c_4\boldsymbol{u}_4}_{\boldsymbol{z} \in W} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z},$$

och de båda vektorerna $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ är ortogonala mot varandra. Men hur är detta förenligt med Fredholms sats, som säger att $(\text{Col } A)^{\perp} = \text{Nul } A^T$? Det enda möjliga svaret är att W och Nul A^T är samma rum:

$$W = \text{Nul } A^T.$$

Indeed, man kan kontrollera att

$$A^T \boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

och

$$A^T \boldsymbol{u}_4 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vår tillämpning av Gram-Schmidt resulterade automatiskt i en (ortogonal) bas $\boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$ för nollrummet Nul A^T. Således är nollrummet 2-dimensionellt.

Kommentar: Ni förväntas inte skriva en såhär lång och avancerad lösning på tentan, ni kan använda vanlig radreducering precis som den officiella lösningen. Jag ville helt enkelt visa en annan, cool lösningsmetod som samtidigt lät oss öva på Fredholms sats och Gram-Schmidt metoden.

(d) För att vektorn $\boldsymbol{b}$ ska vara ortogonal mot nollrummet Nul A^T, så måste den vara ortogonal mot *alla* vektorer i nollrummet. Ett annat sätt att säga samma sak är: Så länge det finns *minst ett* element i nollrummet som vektorn $\boldsymbol{b}$ *inte* är ortogonal mot, så är $\boldsymbol{b}$ inte ortogonal mot nollrummet.

Vi känner redan till två vektorer i nollrummet: Basvektorerna $\boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$, så det är rimligt att testa dessa först. En direkt beräkning visar att $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}_3 = 10$, så vektorn $\boldsymbol{b}$ är inte ortogonal mot $\boldsymbol{u}_3$ och därför är $\boldsymbol{b}$ inte heller ortogonal mot hela nollrummet.

Problem 10.

(a) Beräkna
$$\int x \arctan(x) \, \mathrm{d}x.$$
Notera att $\arctan(x)$ betecknas med $\tan^{-1}(x)$ i Adams & Essex.

(b) Beräkna
$$\int_0^1 \frac{x^3}{(x^2+1)^2} \, \mathrm{d}x.$$

Lösning:

(a) Integranden har ingen känd primitiv funktion, men arctan är en sån standardfunktion vars derivata $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ brukar stå i diverse tabeller. Det lockar därför att partialintegrera:

$$\begin{aligned}
\int x \arctan(x) \, \mathrm{d}x &= \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} \int 1 - \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2}\Big(x - \arctan(x)\Big) + C \\
&= \frac{x^2+1}{2} \arctan(x) - \frac{x}{2} + C.
\end{aligned}$$

(b) Denna uppgift skriker *partialbråksuppdelning*:

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}.$$

Låt oss skriva om högerledet på gemensam nämnare:

$$\begin{aligned}
\frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} &= \frac{(Ax+B)(x^2+1) + (Cx+D)}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{Ax^3 + Bx^2 + (A+C)x + (B+D)}{(x^2+1)^2}.
\end{aligned}$$

Vi har alltså likheten

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax^3 + Bx^2 + (A+C)x + (B+D)}{(x^2+1)^2}$$

och eftersom båda sidorna har samma nämnare, måste de också ha samma täljare:

$$x^3 = Ax^3 + Bx^2 + (A+C)x + (B+D).$$

Konstanterna A, B, C, D måste alltså vara sådana att högerledet blir x^3:

$$A = 1, \quad B = 0, \quad A + C = 0, \quad B + D = 0.$$

Från dessa likheter listar vi ut att $C = -1$ och $D = 0$. Partialbråksuppdelning blir alltså

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2},$$

och integralen kan nu utvärderas:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^3}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{4}\right) - \left(0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Problem 11.

(a) Beräkna $\int_3^\infty xe^{-x^2}\ \mathrm{d}x$.

(b) Låt $A = \int_1^e \sin(\ln x)\ \mathrm{d}x$. Använd partiell integration för att visa att

$$A = e(\sin 1 - \cos 1) + 1 - A,$$

och bestäm sedan, med hjälp av detta, värdet på A.

Lösning:

(a) Vi börjar med att skriva om integralen som ett gränsvärde:

$$\int_3^\infty xe^{-x^2}\ \mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_3^R xe^{-x^2}\ \mathrm{d}x.$$

Vi finner den primitiva funktionen via observationen att faktorn e^{-x^2} har derivatan $-2xe^{-x^2}$, vilket ju är en multipel av vår integrand. Om man vänder på steken innebär detta alltså att en multipel av e^{-x^2} är den primitiva funktionen till vår integrand:

$$\int_3^R xe^{-x^2}\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_3^R -2xe^{-x^2}\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_3^R = -\frac{1}{2}\left(e^{-R^2} - e^{-9}\right),$$

och vi noterar att $e^{-R^2} \to 0$ när $R \to \infty$. Alltså är

$$\int_3^\infty xe^{-x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{e^{-9}}{2}.$$

(b) Uppgiften ber oss använda partiell integration, vilket förutsätter att integranden är en produkt av två funktioner. Idén är att tolka integranden som produkten $1 * \sin(\ln x)$ - ett vanligt trick när man integrerar funktioner innehållandes $\ln(x)$. Partiell integration ger nu

$$\begin{aligned} A = \int_1^e 1 * \sin(\ln x)\ \mathrm{d}x &= \Big[x\sin(\ln x)\Big]_1^e - \int_1^e x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(\ln x)\ \mathrm{d}x \\ &= \Big(e\sin(\ln e) - 1\sin(\ln 1)\Big) - \int_1^e x\cos(\ln(x))\frac{1}{x}\ \mathrm{d}x \\ &= e\sin(1) - \int_1^e \cos(\ln(x))\ \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Vi kan använda samma trick för att beräkna ovanstående integral:

$$\begin{aligned} \int_1^e 1 * \cos(\ln(x))\ \mathrm{d}x &= \Big[x\cos(\ln(x))\Big]_1^e - \int_1^e x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(\ln(x))\ \mathrm{d}x \\ &= \Big(e\cos(\ln(e)) - 1\cos(\ln(1))\Big) + \int_1^e x\sin(\ln(x))\frac{1}{x}\ \mathrm{d}x \\ &= e\cos(1) - 1 + \int_1^e \sin(\ln(x))\ \mathrm{d}x \\ &= e\cos(1) - 1 + A. \end{aligned}$$

Om vi nu lägger ihop alla delar får vi resultatet

$$A = e\sin(1) - \int_1^e \cos(\ln(x))\ \mathrm{d}x = e\big(\sin(1) - \cos(1)\big) + 1 - A,$$

vilket skulle visas. Samlar vi båda A-termerna på samma sida får vi $A = \frac{e(\sin(1)-\cos(1))+1}{2}$.

Problem 12.

(a) Lös differentialekvationen $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = e^x \sin t$.

(b) Visa att $y = e^{2t}$ är en lösning till differentialekvationen

$$y''' - 2y' - 4y = 0,$$

och bestäm sedan alla andra lösningar.

Lösning:

(a) Högerledet är en produkt av två funktioner som beror på olika variabler, dvs. ekvationen är separabel. Med lite abuse of notation kan vi därför skriva

$$e^{-x}\ \mathrm{d}x = \sin t\ \mathrm{d}t,$$

och integrera båda sidor:

$$-e^{-x} = \int e^{-x}\ \mathrm{d}x = \int \sin t\ \mathrm{d}t = -\cos t + C.$$

Multiplicerar vi med -1 och tar logaritmen på båda sidor så får vi ned $-x$ från exponenten, vilket ger lösningen[18]

$$x = -\ln(\cos t + C).$$

Vi kan kontrollera lösningen genom att beräkna dess derivata:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(-\ln(\cos t + C)\Big) = -\frac{1}{\cos t + C}(-\sin t) &= \frac{1}{\cos t + C}\sin t \\ &= e^{\ln\left(\frac{1}{\cos t + C}\right)}\sin t \\ &= e^{-\ln(\cos t + C)}\sin t \\ &= e^x \sin t.\end{aligned}$$

(b) Vi kontrollerar snabbt att $y = e^{2t}$ löser differentialekvationen:

$$y''' - 2y' - 4y = 8e^{2t} - 4e^{2t} - 4e^{2t} = 0.$$

För att hitta den allmänna lösningen ansätter vi $y = e^{rt}$ och får att

$$y''' - 2y' - 4y = r^3 e^{rt} - 2re^{rt} - 4e^{rt} = \big(r^3 - 2r - 4\big)e^{rt}.$$

För att detta uttryck ska bli $= 0$ så måste minst en av faktorerna försvinna: $r^3 - 2r - 4 = 0$ eller $e^{rt} = 0$. Exponentialer är dock aldrig noll, så det enda alternativet är att $r^3 - 2r - 4 = 0$. Vi måste alltså lösa denna tredjegradsekvation, vilket skulle kunna vara ett jobbigt problem, men som tur är känner vi redan till roten $r = 2$. Vi kan därför faktorisera polynomet:

$$r^3 - 2r - 4 = (ar^2 + br + c)(r - 2) = ar^3 + (b - 2a)r^2 + (c - 2b)r - 2c,$$

där $ar^2 + br + c$ är *något* andragradspolynom vars koefficienter vi måste hitta. Faktum är att en direkt jämförelse mellan vänster- och högerled ger oss koefficienterna väldigt snabbt:

$$\begin{aligned}&\text{Koefficient framför } x^3 : 1 = a, \\ &\text{Koefficient framför } x^2 : 0 = b - 2a, \\ &\text{Koefficient framför } x : -2 = c - 2b, \\ &\text{Konstant} : -4 = -2c,\end{aligned}$$

[18]Vi har behållt tecknet på konstanten C trots multiplikation med -1, eftersom konstanten är godtycklig.

dvs. $a = 1$, $b = 2a = 2$, $c = 2$. Vi kan nu hitta samtliga rötter till tredjegradspolynomet:

$$\begin{aligned} r^3 - 2r - 4 = 0 \quad &\iff \quad (r^2 + 2r + 2)(r - 2) = 0 \\ &\iff \quad r^2 + 2r + 2 = 0 \text{ och/eller } r - 2 = 0 \\ &\iff \quad r = -1 \pm i \qquad \text{och/eller } r = 2 \end{aligned}$$

Tredjegradspolynomet har alltså rötterna $r_1 = 2$, $r_2 = -1 + i$, samt $r_3 = -1 - i$, vilket ger oss tre specifika lösningar på differentialekvationen,

$$y_1 = e^{2t}, \quad y_2 = e^{(-1+i)t}, \quad y_3 = e^{(-1-i)t}.$$

Den allmänna lösningen är en godtycklig linjärkombination av dessa:

$$\boxed{y = Ae^{2t} + Be^{(-1+i)t} + Ce^{(-1-i)t}}$$

OBS: Genom att kombinera Eulers formel $e^{\alpha+\beta i} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta)$ med formlerna

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \qquad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i},$$

så kan man även skriva den allmänna lösningen på följande form:

$$\boxed{y = Ae^{2t} + C_1 e^{-t}\cos t + C_2 e^{-t}\sin t}$$

Problem 13.

Om ett objekt i ett rum värms upp från 5°C till 10°C på 4 minuter, och om rummet hela tiden håller temperaturen 20°C, hur länge dröjer det tills objektet har temperaturen 15°C? Antag att objektet värms upp med en hastighet som är proportionell mot skillnaden mellan objektets temperatur och det omgivande rummets temperatur.

Lösning: Antag att funktionen $T(t)$ anger objektets temperatur i grader Celsius efter t minuter. Enligt uppgiften är starttemperaturen $T(0) = 5$, och efter 4 minuter är temperaturen $T(4) = 10$.

Uppgiften påstår att temperaturens förändringshastighet, $T'(t)$ är proportionell mot skillnaden mellan objektets temperatur ($T(t)$) och det omgivande rummets temperatur (20). Alltså är

$$T'(t) = k\big(T(t) - 20\big),$$

för någon proportionalitetskonstant k. Inför nu hjälpfunktionen $U(t) = T(t) - 20$ och observera att $U'(t) = T'(t)$, eftersom den konstanta termen -20 försvinner under derivering. Ovanstående ekvation lyder därför

$$U'(t) = kU(t),$$

vilken är ekvationen för exponentiell tillväxt och har lösningen $U(t) = Ce^{kt}$. Det följer att

$$T(t) = U(t) + 20 = Ce^{kt} + 20$$

Allt som återstår är att hitta värdena på konstanterna k, C. Begynnelsevillkoret ger att

$$5 = T(0) = Ce^{0k} + 20 = C + 20,$$

vilket innebär att $C = -15$. Dessutom vet vi temperaturen efter 4 minuter:

$$\begin{aligned} 10 = T(4) = -15e^{4k} + 20 \quad &\iff \quad 15e^{4k} = 10 \\ &\iff \quad 4k = \ln\left(\frac{10}{15}\right) \\ &\iff \quad k = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{2}{3}\right) \approx -0.1. \end{aligned}$$

Vi kan nu beräkna hur lång tid det tar för objektet att värmas till 15°C:

$$\begin{aligned} 15 = T(t) = -15e^{kt} + 20 \quad &\iff \quad 15e^{kt} = 5 \\ &\iff \quad kt = \ln\left(\frac{5}{15}\right) \\ &\iff \quad t = \frac{\ln\left(\frac{5}{15}\right)}{k} = \frac{\ln\left(\frac{5}{15}\right)}{\frac{1}{4}\ln\left(\frac{2}{3}\right)} = 4\frac{\ln(1/3)}{\ln(2/3)} \approx 10.84. \end{aligned}$$

Det tar alltså ca. 10 minuter och 50 sekunder för objektet att värmas till 15°C.

Problem 14.

Betrakta matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 7 & -7 & -2 \end{bmatrix}$ och vektorn $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm om vektorn $\boldsymbol{b}$ hör till Col A.

(b) Ange en bas till kolonnrummet Col A och dimensionen av nollrummet Nul A.

(c) Använd svaret till (a) för att säga om $\boldsymbol{b}$ är ortogonal mot Nul A^T.

Lösning:

(a) Vektorn $\boldsymbol{b}$ ligger i kolonnrummet Col A om och endast om det finns (minst) en lösning på ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Denna fråga besvaras med gammal hederlig radreducering:

$$[A \mid \boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 & 5 \\ 1 & -3 & 4 & 1 \\ 7 & -7 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -15 & 2 \\ 0 & 14 & -30 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -15 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{bmatrix}.$$

Sista raden svarar mot ekvationen $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -11$, som naturligtvis inte har någon lösning. Systemet är alltså inte lösbart och vektorn $\boldsymbol{b}$ ligger *inte* i kolonnrummet Col A.

(b) I förra deluppgiften såg vi att

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & -15 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

vilket innebär att första och andra kolonnen i matrisen A är pivotkolonner:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Enligt ett viktigt teorem i boken, och som vi har noterat under flera övningar, utgör dessa en bas för kolonnrummet. Dessutom vet vi att dimensionen på nollrummet är lika med antalet fria variabler, och vi får en fri variabel för varje kolonn som *inte* är en pivotkolonn.[19] Med andra ord är $\dim \mathrm{Nul}\ A = 1$.

(c) Enligt Fredholms sats är Col A det ortogonala komplementet till Nul A^T:

$$\mathrm{Nul}\ A^T = (\mathrm{Col}\ A)^\perp,$$

och vice versa. En vektor är alltså ortogonal mot nollrummet till A^T om och **endast om** den ligger i kolonnrummet till A. Men vi har redan visat att vektorn $\boldsymbol{b}$ inte ligger i Col A, så den kan inte heller vara ortogonal mot Nul A^T.

[19]Ni kanske kommer ihåg ett teorem som säger att $\dim \mathrm{Col}\ A + \dim \mathrm{Nul}\ A =$ antalet kolonner i matrisen A. Alltså är varje kolonn antingen en pivot-kolonn eller så ger den upphov till en fri variabel.

Problem 15.

Låt $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^T$ och $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix}^T$, och låt T vara den linjära avbildning från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^3$ som är sådan att $T(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{e}_1$ och $T(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{e}_2$, där $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ är standardbasen i $\mathbb{R}^3$.

(a) Skriv $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}3 & 2\end{bmatrix}^T$ som en linjärkombination av $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$ och bestäm sedan $T(\boldsymbol{v})$.

(b) Bestäm standardmatrisen för T.

Lösning:

(a) Vi söker koordinater c_1, c_2 sådana att $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}$. Denna ekvation kan också skrivas

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \boldsymbol{v} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{bmatrix}1 & 3\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix},$$

och är därför på formen $M\boldsymbol{c} = \boldsymbol{v}$. Radreducering ger koordinaterna:

$$[M \mid \boldsymbol{v}] = \begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\1 & 1 & 2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\0 & -2 & -1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\0 & 1 & 0.5\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 1.5\\0 & 1 & 0.5\end{bmatrix},$$

alltså $c_1 = \frac{3}{2}$ och $c_2 = \frac{1}{2}$. Indeed,

$$\frac{3}{2}\boldsymbol{v}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_2 = \frac{3}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} = \boldsymbol{v}.$$

Vi kan nu använda linjariteten för att utvärdera $T(\boldsymbol{v})$:

$$T(\boldsymbol{v}) = T\left(\frac{3}{2}\boldsymbol{v}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_2\right) = \frac{3}{2}T(\boldsymbol{v}_1) + \frac{1}{2}T(\boldsymbol{v}_2) = \frac{3}{2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2 = \frac{3}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix}.$$

(b) Om A är standardmatrisen för den linjära transformationen T, så säger uppgiften att $A\boldsymbol{v}_1 = T(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{e}_1$ och $A\boldsymbol{v}_2 = T(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{e}_2$. Det följer att

$$A\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\end{bmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 3\\1 & 1\end{bmatrix}}_{M} = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}}_{E},$$

och vi kan beräkna standardmatrisen som $A = EM^{-1}$ eftersom matrisen M är inverterbar; dess determinant är nollskild. Inversen M^{-1} kan beräknas antingen genom att radreducera $[M \mid I] \sim [I \mid M^{-1}]$ eller genom att använda den explicita formeln:

$$M = \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} \text{ och } \det M \neq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad M^{-1} = \frac{1}{\det M}\begin{bmatrix}d & -b\\-c & a\end{bmatrix}.$$

Den linjära transformationen T har således standardmatrisen

$$A = EM^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -3\\-1 & 1\end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -3\\-1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}.$$

OBS: Ett annat sätt att lösa uppgiften hade varit att skriva standardbasen $\tilde{\boldsymbol{e}}_1 = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}^T$, $\tilde{\boldsymbol{e}}_2 = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^T$ som linjärkombinationer av $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$. Då hade vi kunnat utvärdera $T(\tilde{\boldsymbol{e}}_1), T(\tilde{\boldsymbol{e}}_2)$ och vi hade fått standardmatrisen $A = \begin{bmatrix}T(\tilde{\boldsymbol{e}}_1) & T(\tilde{\boldsymbol{e}}_2)\end{bmatrix}$.

Problem 16.

(a) Formulera ett tillräckligt och nödvändigt kriterium för att en matris B ska vara diagonaliserbar. Betrakta sedan matrisen

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -4 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Visa att -2 och 3 är egenvärden till matrisen B. Avgör om matrisen B är diagonaliserbar och ange i så fall motsvarande diagonalmatris D och en matris P sådan att $P^{-1}BP = D$.

(b) Betrakta följande system av ordinära differentialekvationer:

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}, \quad \text{där} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ange den allmänna lösningen, samt den lösning som uppfyller begynnelsevillkoret $\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Lösning:

(a) Ett tillräckligt och nödvändigt kriterium för att en kvadratisk $n \times n$-matris B ska vara diagonaliserbar, är att den har n stycken linjärt oberoende egenvektorer.

Kommentar: Eftersom kolonnerna i matrisen P är egenvektorer till B (per konstruktion) så kan kriteriet omformuleras som följer: Matrisen B är diagonaliserbar om och endast om matrisen P existerar och är inverterbar. Ur detta perspektiv är kriteriet väldigt naturligt, ty om det inte finns n stycken egenvektorer så kan vi inte konstruera matrisen P, och om dessa egenvektorer inte är linjärt oberoende så är P inte inverterbar och P^{-1} existerar inte.

Låt oss påbörja diagonaliseringsprocessen. Normalt är det första steget att ta fram egenvärden till matrisen B, men vi har redan fått förslagen $\lambda = -2$ respektive $\lambda = 3$, så låt oss försöka hitta motsvarande egenvärden.[20]

För att hitta egenvektorer med egenvärde -2 söker vi lösningar på ekvationen $B\boldsymbol{x} = -2\boldsymbol{x}$ eller ekvivalent $(B + 2I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Som vanligt kan vi radreducera för att få svaret:

$$B + 2I = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

vilket svarar mot ekvationen $3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0$. Från denna ekvation kan vi lösa ut valfri variabel i termer av de andra två, exempelvis $x_1 = \frac{2}{3}x_2 - \frac{4}{3}x_3$, vilket ger lösningen

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}x_2 - \frac{4}{3}x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{v}_1} + x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{v}_2}.$$

[20] Om uppgiften ljuger och dessa inte alls är egenvärden till matrisen B så kommer vi snart märka detta, då ekvationen $(B + 2I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ och/eller $(B - 3I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ i så fall saknar icketriviala lösningar $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$. Om det istället visar sig att båda två faktiskt *är* egenvärden, men att de bara har en egenvektor vardera, så finns två möjliga förklaringar: Antingen existerar ett tredje egenvärde som vi inte känner till, eller så har matrisen helt enkelt inte 3 stycken linjärt oberoende egenvektorer och är inte diagonaliserbar. Vi behöver dock inte leta efter något tredje egenvärde om vi inte stöter på något problem på vägen.

Vi har nu hittat lösningar på ekvationen $(B+2I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \iff B\boldsymbol{x} = -2\boldsymbol{x}$, vilket bekräftar en gång för alla att $\lambda = -2$ faktiskt är ett egenvärde till matrisen B. Motsvarande egenrum är dessutom tvådimensionellt, med en bas som ges av de linjärt oberoende vektorerna $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$.

För att hitta egenvektorer med egenvärde $\lambda = 3$ löser vi ekvationen $(B-3I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

$$B - 3I = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 3 & -7 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -7 & 4 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -10 & 10 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Denna radreducering ger oss ekvationssystemet $x_1 - x_3 = 0$ respektive $x_2 - x_3 = 0$, dvs. $x_1 = x_2 = x_3$. Vi har alltså en fri variabel x_3 och lösningen blir

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{v}_3}.$$

Alltså är $\lambda = 3$ ett egenvärde till matrisen B och $\boldsymbol{v}_3$ utgör en bas för motsvarande egenrum.

Vi har funnit tre stycken linjärt oberoende egenvektorer till matrisen B: $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$. Enligt kriteriet i början av uppgiften är matrisen B diagonaliserbar, med matriserna

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Teorin kring diagonalisering garanterar nu att $D = P^{-1}BP$ eller ekvivalent $B = PDP^{-1}$.

OBS: Det gör ingenting om man skalar egenvektorerna. Vi hade exempelvis kunnat skala upp vektorerna $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ med en faktor 3 och fått det lite snyggare uttrycket

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Varje sådan skalning av kolonnerna i P kompenseras automatiskt med en omvänd skalning av raderna i P^{-1}, så att identiteten $B = PDP^{-1}$ bevaras. Dessutom tillåts vi byta plats på kolonnerna i matrisen P, under förutsättningen att vi gör precis samma ompositionering av egenvärdena i diagonalmatrisen D. Till exempel hade vi kunnat sätta

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

och identiteten $B = PDP^{-1}$ hade återigen bevarats.

(b) Kom ihåg att den allmänna lösningen ges av uttrycket

$$\boldsymbol{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}_2,$$

där λ_1, λ_2 är egenvärden till matrisen A och $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ är motsvarande egenvektorer. Vi börjar därför med att finna dessa. Egenvärdena är rötterna till det karaktäristiska polynomet

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6,$$

och PQ-formeln säger att $\lambda_1 = 2$ respektive $\lambda_2 = 3$.

För att hitta en egenvektor med egenvärde $\lambda_1 = 2$ löser vi ekvationen $(A - 2I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

vilket ger ekvationen $x_1 - x_2 = 0$, hence

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{v}_1}.$$

För att hitta en egenvektor med egenvärde $\lambda_2 = 3$ löser vi ekvationen $(A - 3I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$:

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

vilket ger ekvationen $2x_1 - x_2 = 0$, hence

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{v}_2}.$$

Vi kan nu sätta in våra egenvektorer och egenvärden för att få den allmänna lösningen:

$$\boxed{\boldsymbol{x}(t) = C_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} \\ C_1 e^{2t} + 2C_2 e^{3t} \end{bmatrix}}$$

Avslutningsvis jämför vi begynnelsevillkoret $\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}^T$ med den vektor vi erhåller om vi sätter $t = 0$ i den allmänna lösningen:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} C_1 e^0 + C_2 e^0 \\ C_1 e^0 + 2C_2 e^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 + C_2 \\ C_1 + 2C_2 \end{bmatrix}.$$

Vi får alltså ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2 = C_1 + C_2 \\ 5 = C_1 + 2C_2 \end{cases},$$

vilket kan lösas genom att exempelvis skriva om första raden som $C_1 = 2 - C_2$ och ersätta termen C_1 i andra raden med $2 - C_2$:

$$5 = (2 - C_2) + 2C_2.$$

Lite omskrivning ger att $C_2 = 3$ och således $C_1 = 2 - C_2 = -1$. Den specifika lösning som svarar mot begynnelsevillkoret $\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}^T$ är alltså

$$\boxed{\boldsymbol{x}(t) = -e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{2t} + 3e^{3t} \\ -e^{2t} + 6e^{3t} \end{bmatrix}}$$

Problem 17.

Bestäm en ON-bas för kolonnrummet till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösning: Genom att radreducera matrisen,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -6 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ser vi att pivotkolonnerna är

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Dessa utgör alltid en bas för kolonnrummet, men inte en ON-bas eftersom kolonnerna varken är ortogonala (O) eller normaliserade (N). Vi kan dock använda kolonnerna för att konstruera en ON-bas via Gram-Schmidt metoden: Börja med att sätta

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{v}_1,$$

och notera att $\boldsymbol{v}_3$ redan är ortogonal mot denna - vi kan sätta $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{v}_3$. Sedan använder vi $\boldsymbol{v}_2$ för att konstruera en vektor $\boldsymbol{a}_2$ som är ortogonal mot både $\boldsymbol{a}_1$ och $\boldsymbol{a}_3$. Löst talat kan man säga att vi slänger bort de delar av $\boldsymbol{v}_2$ som *inte* är ortogonala mot antingen $\boldsymbol{a}_1$ eller $\boldsymbol{a}_3$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{a}_1}{\|\boldsymbol{a}_1\|^2}\boldsymbol{a}_1 - \frac{\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{a}_3}{\|\boldsymbol{a}_3\|^2}\boldsymbol{a}_3 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{11}{26}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{78}\left(\begin{bmatrix} 78 \\ 156 \\ 78 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 132 \\ 99 \\ 33 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -52 \\ 52 \\ 52 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{78}\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vektorerna $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ är ortogonala och utgör därför en ortogonal en bas för kolonnrummet. Det sista steget är att normalisera dem: $\boldsymbol{u}_i = \frac{\boldsymbol{a}_i}{\|\boldsymbol{a}_i\|}$, vilket ger oss ON-basen

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{78}}\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Intressant nog hade vi kunnat kringgå Gram-Schmidt genom att titta noggrant på ekvation (25). Denna ekvation säger att pivotkolonnerna är tre stycken vektorer i $\mathbb{R}^3$, som dessutom är linjärt oberoende eftersom de utgör en bas för kolonnrummet. Varje samling av n stycken linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^n$ utgör en bas för $\mathbb{R}^n$, så vektorerna i ekvation (25) utgör en bas för $\mathbb{R}^3$. Med andra ord är Col $A = \mathbb{R}^3$ och man kan lösa uppgiften genom att välja valfri ON-bas för $\mathbb{R}^3$, till exempel standardbasen

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$