LMA201: Föreläsning 2021-03-01

<u>Kom ihåg</u>: Antag X är en MK i diskret tid med tillståndsrum $\Omega = \{E_1, \dots, E_k\}$ och övergångsmatris P.

<u>Tillståndsvektorn</u> $p^{(n)} = (P(X(n)=E_1), \dots, P(X(n)=E_k))$. — sannolikhetsfördelningen för $X(n)$

$p^{(0)}$ = startvektorn.

Sannolikhetsvektorn $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k)$ är <u>stationär fördelning</u> för X om $p^{(0)} = \pi \Rightarrow p^{(n)} = \pi$ för alla n.

Sats: Om $\pi P = \pi$ så är π stationär förd.

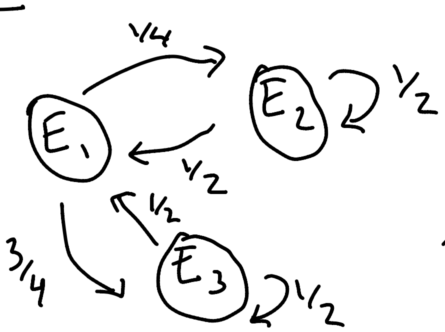
MK är **irreducibel** om det går att ta sig mellan E_i och E_j för alla i & j.

MK är **aperiodisk** om det för ngt N gäller att

$$p_{ii}^{(m)} = P(X(n+m)=E_i \mid X(n)=E_i) > 0 \text{ för}$$

alla $m \geq N$ och alla i.

<u>Ex1</u>: Betrakta MK med $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$



Bestäm stationär fördelning!

<u>L</u>: $\pi = (\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3)$ där $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ (1)

$$\pi P = \pi \iff (\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\pi_2 + \tfrac{1}{2}\pi_3, \ \tfrac{1}{4}\pi_1 + \tfrac{1}{2}\pi_2, \ \tfrac{3}{4}\pi_1 + \tfrac{1}{2}\pi_3\right)$$

$$= (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \iff \begin{array}{ll} \pi_1 = \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 & (2) \\ \pi_2 = \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 & (3) \\ \pi_3 = \frac{3}{4}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_3 & (4) \end{array}$$

Metod: Använd (1) och två av (2) − (4).

Här: Använder (3) för att rycka π_2 i termer av π_1

(4) — " — π_3 — " —

(3) $\Rightarrow \ \frac{1}{2}\pi_2 = \frac{1}{4}\pi_1 \iff \pi_2 = \frac{1}{2}\pi_1$ (5)

(4) $\Rightarrow \ \frac{1}{2}\pi_3 = \frac{3}{4}\pi_1 \iff \pi_3 = \frac{3}{2}\pi_1$ (6)

Insättning av (5) och (6) i (1) ger att

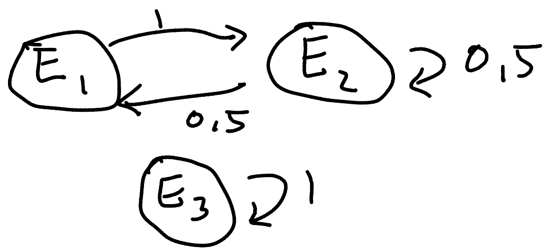
$$\pi_1 + \tfrac{1}{2}\pi_1 + \tfrac{3}{2}\pi_1 = 1 \iff 3\pi_1 = 1 \iff \pi_1 = \tfrac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \pi_2 = \tfrac{1}{2}\pi_1 = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6}, \quad \pi_3 = \tfrac{3}{2}\pi_1 = \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{2}$$

Så $\pi = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$. #

EX2: Om kedjan är reducibel kan det finnas oändligt många stationära fördelningar.

Betrakta



Reducibel

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ Finn stationär förd!

$\underline{L}$: $\pi = (\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3)$ där $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ ①

$$\pi P = \pi \iff (\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (0,5\pi_2 \qquad \pi_1 + 0,5\pi_2 \qquad \pi_3) = (\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3)$$

$$\iff \quad \pi_1 = 0,5\pi_2 \qquad ②$$
$$\pi_2 = \pi_1 + 0,5\pi_2 \qquad ③$$
$$\pi_3 = \pi_3 \qquad ④$$

Välj $\pi_3 = s \in [0,1]$.

$$① \Rightarrow \quad \pi_2 = 1 - \pi_1 - \pi_3 = 1 - \pi_1 - s \overset{②}{=} 1 - 0,5\pi_2 - s$$

$$\frac{3}{2}\pi_2 = 1 - s \iff \pi_2 = \frac{2}{3}(1-s)$$

$$② \Rightarrow \pi_1 = \frac{1}{2}\pi_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1-s) = \frac{1}{3}(1-s).$$

Så $\pi = \left(\frac{1}{3}(1-s) \quad \frac{2}{3}(1-s) \quad s\right)$ är en stationär fördelning för alla $s \in [0,1]$. Så oändligt många stat. förd.

OBS: π är linjär kombination av stationära fördelningen för E_1-E_2 kedjan $(\frac{1}{3} \ \frac{2}{3})$ och stationära fördelningen för E_3-kedjan (1). #

Kap 1.5: Asymptotisk fördelning.

Sats: Antag X är MK med överg. matr. P och tillståndsrum $E_1, \dots, E_k$. Antag X är irreducibel och aperiodisk. I så fall finns det en unik stationär fördelning $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k)$ och oavsett startvektor $p^{(0)}$ så gäller $p^{(n)} \longrightarrow \pi$ då $n \to \infty$. (Dvs $p_i^{(n)} \to \pi_i$ för alla $i = 1, \dots, k$).

OBS: $p^{(n)}$ kan vara svår att beräkna för hand, men satsen ger $p^{(n)} \approx \pi$ om n stort.

$\boxed{\text{Rast t. } 14^{15}}$

Åter till EX 1: $\pi = \left(\frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{2}\right)$.

Efter MK irreducibel och aperiodisk så är $p^{(n)} \approx \left(\frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{2}\right)$ om n stort.

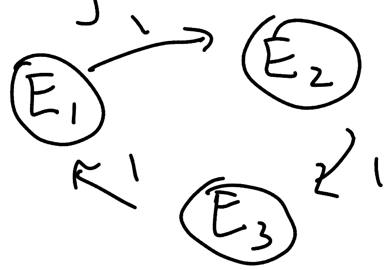
I synnerhet är $P(X(n) = E_1) \approx \frac{1}{3}$ om n stort.

Och i det långa loppet befinner sig kedjan i E_1

i ca $\frac{1}{3}$ av tiden. Gäller oavsett vilken startvektor $p^{(0)}$ som används.

Om MK är periodisk så har man för det mesta inte konvergens mot stationär fördelning.

<u>EX</u>:

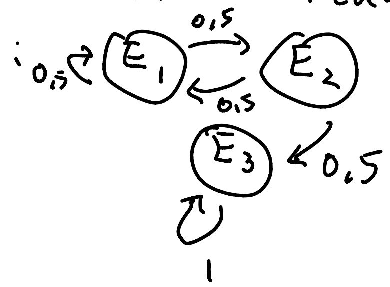


Man kan verifiera att $\pi = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ är stationära fördelningen för kedjan.

Så om $p^{(0)} = (\frac{1}{3}\ \ \frac{1}{3}\ \ \frac{1}{3})$ så är $p^{(n)} = (\frac{1}{3}\ \ \frac{1}{3}\ \ \frac{1}{3})$ för alla n. Men om $p^{(0)} = (1\ \ 0\ \ 0)$ så blir $p^{(1)} = (0\ \ 1\ \ 0)$ och $p^{(2)} = (0\ \ 0\ \ 1)$ osv... Så $p^{(n)}$ <u>konvergerar ej</u> då $n \to \infty$.

Om MK är reducibel så kan olika saker hända.

<u>EX</u>:



Reducibel, ty E_3 absorberande. Vi inser att $p^{(n)} \to (0, 0, 1)$ då $n \to \infty$ oberoende av startvektor. #

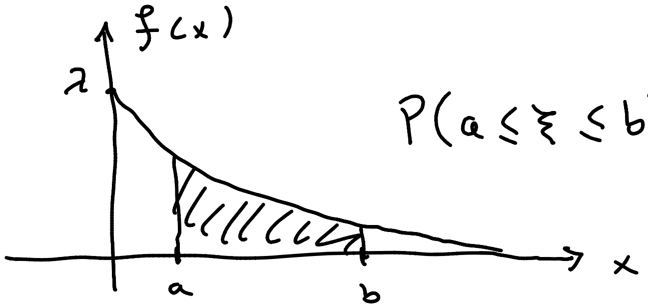
<u>Åter till EX 2</u>: Om $p^{(0)} = (1\ \ 0\ \ 0)$ så $p^{(n)} \to (\frac{1}{3}\ \ \frac{2}{3}\ \ 0)$ men om $p^{(0)} = (0\ \ 0\ \ 1)$ så är $p^{(n)} = (0\ \ 0\ \ 1)$ för alla n.

Så vad som händer med $p^{(n)}$ då $n \to \infty$ beror på startvektorn!

slut på Kap 1

Rep. av. Exponentialfördelningen

Den kontinuerliga variabeln ξ är Exponentialfördelad med parameter λ om $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$



$$P(a \leq \xi \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$E(\xi) = \frac{1}{\lambda}.$$

Ofta tolkas λ som en slags intensitet.

<u>Exempel</u>: Antag tiden ξ till nästa sönderfall i ett radioaktivt preparat är $Exp(\lambda)$ där $\lambda = \frac{1}{5}\ s^{-1}$.
Beräkna $P(\xi \leq 4)$.

<u>L</u>: $P(\xi \leq 4) = \int_0^4 \frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}} dx = \left[-e^{-\frac{x}{5}}\right] = -e^{-\frac{4}{5}} - (-1)$

$= \boxed{1 - e^{-4/5}}$.

(*)

I allmänhet gäller att $F(x) := P(\xi \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

fördelningsfunktionen

Ex: Antag vi har två oberoende preparat (som i förra ex)

Låt $\xi_1 =$ tiden t. nästa sönderfall i prep 1

$\xi_2 =$ — " — 2

Då är ξ_1 & ξ_2 oberoende och båda är $Exp(\lambda = \frac{1}{5})$

Låt $\eta = \min(\xi_1, \xi_2)$. Vad är fördelningen för η?

$$P(\eta \le x) = P(\min(\xi_1, \xi_2) \le x) = 1 - P(\min(\xi_1, \xi_2) > x)$$

$$= 1 - P(\{\xi_1 > x\} \cap \{\xi_2 > x\}) \underset{\text{oberoende}}{=}$$

$$= 1 - P(\xi_1 > x) \cdot P(\xi_2 > x) \underset{(*)}{=} 1 - (e^{-\frac{x}{5}}) \cdot (e^{-\frac{x}{5}}) = \boxed{1 - e^{-\frac{2x}{5}}}$$

Fördelningsfunktionen för $Exp(\frac{2}{5})$!

#

Sats: Om $\xi_1, \dots, \xi_n$ är oberoende slumpvariabler där $\xi_i \sim Exp(\lambda_i)$ så är $\min(\xi_1, \dots, \xi_n) \sim Exp(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)$.

Exponentialfördelningen är minneslös: Om $\xi \sim Exp(\lambda)$ så är $P(\xi > t+s \mid \xi > t) = P(\xi > s)$.

Rast t. 15^{15}

Kapitel 2: Markovkedjor i kontinuerlig tid.

Antag en maskin kan befinna sig i tillstånd

0 : hel

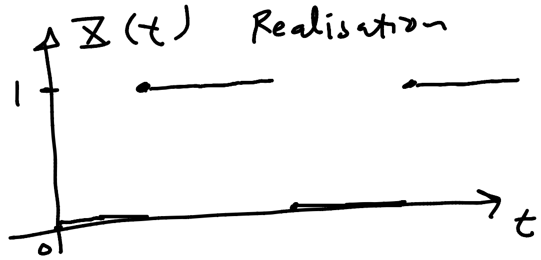
1 : trasig

Om maskin är hel antas tiden tills den går sönder vara $Exp(\lambda)$. Om den är trasig antas tiden tills den är reparerad vara $Exp(\mu)$.

λ = felintensitet $\quad\quad$ μ = reparationsintensiteten.

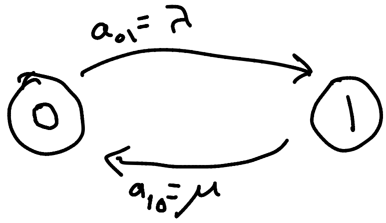
Låt $X(t)$ = maskinens tillstånd vid tiden $t \geq 0$.

Då är $(X(t))_{t\geq 0}$ är ett exempel på en stokastisk process i kontinuerlig tid. $X(t)$ kan ändra tillstånd vid vilken tid som helst.



Istället för en övergångsmatris beskrivs en MK i kont. tid av en <u>intensitetsmatris</u>.

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$



För A gäller att a_{ij} är intensiteten för övergång från tillstånd i till tillstånd j om $i \neq j$.
Diagonalelementen definieras som
$-$(summan av de övriga elementen i samma rad)
I synnerhet: radsummorna $= 0$. #

Det visar sig att $X(t)$ är en MK i kont. tid.

<u>Def:</u> Antag att $X = (X(t))_{t \geq 0}$ är en stok. proc. i kont. tid med tillståndsrum $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, k\}$. Vi säger att X är en MK i kont. tid om

$$P(X(t_n) = x_n \mid X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \dots, X(t_0) = x_0)$$
$$= P(X(t_n) = x_n \mid X(t_{n-1}) = x_{n-1})$$ för varje val av $n \geq 1$ och $x_0, \dots, x_n \in \Omega$ och tider
$$t_n > t_{n-1} > \dots > t_0 \geq 0.$$ #

Mer komplicerat system: 2 maskiner.
Tillståndsrum $\Omega = \{0, 1, 2\}$
antal trasiga maskiner

Antag nu att endast en maskin jobbar samtidigt
Antag en reparatör. Felintensiteten $= \lambda$ och reparationsintensitet μ.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "a_{01}=\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 2 \arrow[l, bend left, "\mu"] \end{tikzcd}$$

Tiden tills en maskin lagad är $Exp(\mu)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

Annan situation: Maskinerna som är hela är igång samtidigt men fortfarande bara en reparatör.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "2\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 2 \arrow[l, bend left, "\mu"] \end{tikzcd}$$

ty min av 2 $Exp(\lambda)$ variabler är $Exp(2\lambda)$

$$A = \begin{pmatrix} -2\lambda & 2\lambda & 0 \\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

Tredje situation: Båda maskinerna kan jobba samtidigt. Antag dessutom 2 reparatörer. Antag en trasig maskin bara kan lagas av en reparatör åt gången.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "2\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 2 \arrow[l, bend left, "2\mu"] \end{tikzcd}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2\lambda & 2\lambda & 0 \\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda \\ 0 & 2\mu & -2\mu \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Rast t. } 16^{\underline{15}}}$

Def: Tillståndsvektorn för en MK i kontinuerlig tid med tillståndsrum $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, k\}$ def. som $p(t) = (P(X(t)=0), P(X(t)=1), \ldots, P(X(t)=k))$

$$= (p_0(t), p_1(t), \ldots, p_k(t)).$$

Mål: Ta fram stationära fördelningen, dvs $\lim_{t \to \infty} p(t)$.
Vi kan inte göra som i diskreta fallet, eftersom vi har en intensitetsmatris istället för en övergångsmatris.

Sats: Antag X MK i kont. tid med int.-matris A. Kolmogorovs framåtekvation säger att

$$\boxed{\underbrace{\dot{p}(t)}_{\text{tidsderivata}} = p(t) \cdot A}$$

Om $p(t)$ konvergerar mot en stat. fördelning $\pi = (\pi_0, \ldots, \pi_k)$ då $t \to \infty$ så måste ju $\dot{p}(t) \to 0$ då $t \to \infty$.

Så stationär fördelning uppfyller $\boxed{\underbrace{0}_{(0, \ldots, 0)\ k \text{ stycken}} = \pi A}$

och $\boxed{\pi_0 + \pi_1 + \ldots + \pi_k = 1}$

Exempel 2.7: (OBS: tryckfel i ex 2.7 sid 44)

I en maskin finns 2 komponenter som kan jobba samtidigt då de är hela och livslängderna är

$\text{Exp}\left(\frac{1}{50}\right)$ - fördelade. Finns en reparatör med reparationsintensitet $\mu = \frac{1}{10}$.
felintensiteten $\lambda = \frac{1}{50}$. Beräkna stat. fördelning!

<u>L</u>:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "2\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 2 \arrow[l, bend left, "\mu"] \end{tikzcd}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2\lambda & 2\lambda & 0 \\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

$$\pi A = 0 \iff (\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2) \begin{pmatrix} -2\lambda & 2\lambda & 0 \\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

$$= (-2\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 \qquad 2\lambda\pi_0 - (\mu+\lambda)\pi_1 + \mu\pi_2 \qquad \lambda\pi_1 - \mu\pi_2)$$

$$= (0 \quad 0 \quad 0) \iff \begin{aligned} -2\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 &= 0 \quad (1) \\ 2\lambda\pi_0 - (\mu+\lambda)\pi_1 + \mu\pi_2 &= 0 \quad (2) \\ \lambda\pi_1 - \mu\pi_2 &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

(1) ger att $\pi_1 = \frac{2\lambda}{\mu}\pi_0$ (4)

(4) och (3) ger att $\frac{2\lambda \cdot \lambda}{\mu}\pi_0 - \mu\pi_2 = 0 \iff \pi_2 = \frac{2\lambda \cdot \lambda}{\mu \cdot \mu}\pi_0$

Vi har att $\lambda = 0{,}02$ och $\mu = 0.1$ så insättning ger

$$\pi_1 = \frac{2 \cdot 0{,}02}{0{,}1}\pi_0 = 0{,}4\,\pi_0 \qquad \pi_2 = \frac{2 \cdot 0{,}02^2}{0{,}1^2}\pi_0 = 0{,}08\,\pi_0$$

Vet också att $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$, så

$$\pi_0 + 0{,}4\,\pi_0 + 0{,}08\,\pi_0 = 1{,}48\,\pi_0 = 1 \Rightarrow \pi_0 = \frac{1}{1{,}48} \approx 0{,}676$$

$\Rightarrow \pi_1 = 0{,}270$ och $\pi_2 = 0{,}054$

Så $\pi = (0{,}676 \quad 0{,}27 \quad 0{,}054)$

"Snabbmetoden": Antag en MK i kont. tid med övergångsintensiteter enligt:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, bend left, "a_{01}"] & 1 \arrow[l, bend left, "a_{10}"] \arrow[r, bend left, "a_{12}"] & 2 \arrow[l, bend left, "a_{21}"] & \cdots & j-1 \arrow[r, bend left, "a_{j-1,j}"] & j \arrow[l, bend left, "a_{j,j-1}"] & \cdots \arrow[r, bend left, "a_{k-1,k}"] & k \arrow[l, bend left, "a_{k,k-1}"]
\end{tikzcd}
$$

Formel: $\pi_j = \dfrac{a_{01}\cdot a_{12}\cdots a_{j-1,j}}{a_{10}\cdot a_{21}\cdots a_{j,j-1}}\,\pi_0 \qquad \star$

$\uparrow$ beräkna dessa för $j=1,\dots,k$ och

använd sen $\pi_0+\pi_1+\dots+\pi_k=1 \leftarrow$ lös ut π_0

och få $\pi_1,\dots,\pi_k$ från $\star$. #