LMA201: Föreläsning 23/2 - 2021

Markovkedjor i diskret tid, fortsättning

Kom ihåg: En stokastisk process $\underline{X} = (\underline{X}(0), \underline{X}(1), \underline{X}(2), \dots)$ är en Markovkedja (MK) med tillståndsrum Ω om

$$P(\underline{X}(t_n) = x_n \mid \underline{X}(t_{n-1}) = x_{n-1}, \dots, \underline{X}(t_0) = x_0)$$

$$= P(\underline{X}(t_n) = x_n \mid \underline{X}(t_{n-1}) = x_{n-1})$$

för alla val av $n \geq 1$, $t_n > \dots > t_0$, $x_0, \dots, x_n \in \Omega$.

När man betingar på en Markovkedjas värden vid ett antal tidpunkter är det alltså samma som att bara betinga på värdet vid den senaste tidpunkten.

Exempel: 3 barn som kastar boll

Nathalie	kastar t.	Oliver med sann.	0.2
		Simon — " —	0.8
Oliver	— " —	Nathalie — " —	0.7
		Simon — " —	0.3
Simon	— " —	Nathalie — " —	0.5
		Oliver — " —	0.5

Låt $\underline{X}(n)$ = det barn som har bollen vid tid n där n heltal ≥ 1.

Då är $\underline{X}$ en Markovkedja i diskret tid.

<u>Tillstånd</u>: E_1 = Nathalie

E_2 = Oliver $\qquad \Omega = \{E_1, E_2, E_3\}$

E_3 = Simon

<u>Kom ihåg</u>: Övergångssannolikheter

$$p_{ij} = P(\underline{X}(n) = E_j \mid \underline{X}(n-1) = E_i) \leftarrow \text{oberoende av } n \text{ i kursen}$$

$$(= P(\underline{X}(n+1) = E_j \mid \underline{X}(n) = E_i))$$

I detta ex blir $\quad p_{11} = 0 \quad p_{12} = 0.2 \quad p_{13} = 0,8$

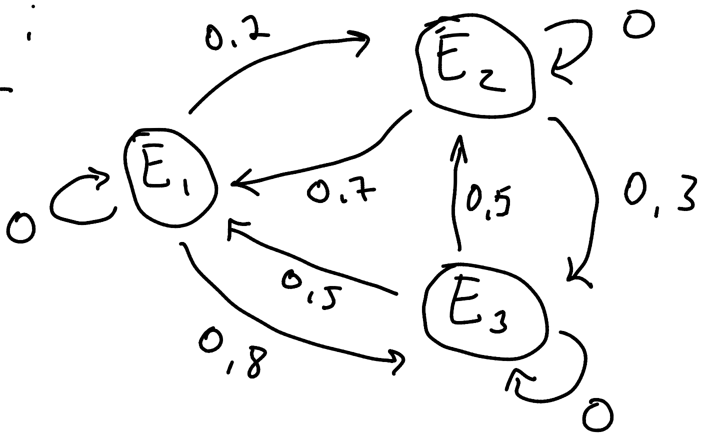
$p_{21} = 0,7 \quad p_{22} = 0 \quad p_{23} = 0,3$

$p_{31} = 0,5 \quad p_{32} = 0,5 \quad p_{33} = 0$

<u>Övergångsmatrisen</u> blir $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0,7 & 0 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Övergångsgrafen:



Absorberande tillstånd:

För vissa Markovkedjor så kan det hända att man fastnar i ett tillstånd för alltid. Ett sådant tillstånd kallas <u>absorberande tillstånd</u>.

<u>Modifiera boll-exemplet:</u> Om Simon får bollen så springer han iväg. Övergångsmatrisen blir nu istället

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0,7 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En MK har absorberande tillstånd om det finns åtminstone en 1:a i diagonalen för P.

Högre övergångssannolikheter

Ex 1.9: Låt $\underline{X}(n)$ = vädret dag n, $n \geq 1$.

Antag 2 tillstånd: E_1 = soligt
E_2 = regnigt.

Övergångsmatrisen $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$

där $p_{12} = P(\underbrace{\text{regn imorgon}}_{\underline{X}(n+1) = E_2} \mid \underbrace{\text{sol idag}}_{\underline{X}(n) = E_1})$ osv.

P ger alltså sannolikheten för vad händer med vädret en dag in i framtiden, givet hur det är idag. Vi kan m.h.a. P beräkna sannolikheter för dagar längre in i framtiden.

I exemplet har vi $P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$

Def: Låt $r \geq 1$, r heltal. r-stegs övergångssannolikheten från tillstånd E_i till tillstånd E_j skrivs $p_{ij}^{(r)}$ och ges av

$$p_{ij}^{(r)} := P(\underline{X}(n+r) = E_j \mid \underline{X}(n) = E_i). \quad \#$$

$\boxed{\text{Rast t. } 11^{\underline{15}}}$

Åter väderexemplet:

$$p_{12}^{(2)} = P(\text{regn i övermorgon} \mid \text{sol idag})$$
$$= P(\underline{X}(3) = E_2 \mid \underline{X}(1) = E_1) \leftarrow \text{Hur beräkna?}$$

$$\begin{tikzcd}
 & E_2 \arrow[dr, "p_{22}"] & \\
E_1 \arrow[ur, "p_{12}"] \arrow[r, "p_{11}"'] & E_1 \arrow[r, "p_{12}"'] & E_2
\end{tikzcd}$$

Tid 1 2 3

Vi ser att det finns 2 sätt att komma till E_2 efter 2 dagar givet vi börjar i E_1.

Vi ser att $p_{12}^{(2)} = p_{12} \cdot p_{22} + p_{11} \cdot p_{12}$

$$= 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}8 \cdot 0{,}2 = \boxed{0{,}3}$$

$$p_{12}^{(3)} = P(\text{regn om 3 dagar} \mid \text{sol idag})$$
$$= P(\underline{X}(4) = E_2 \mid \underline{X}(1) = E_1)$$

Tid 1	2	3	4	Sannolikhet
$E_1 \xrightarrow{p_{11}}$	$E_1 \xrightarrow{p_{11}}$	$E_1 \xrightarrow{p_{12}}$	E_2	$p_{11}p_{11}p_{12}$
$E_1 \longrightarrow$	$E_2 \longrightarrow$	$E_1 \longrightarrow$	E_2	$p_{12}p_{21}p_{12}$
$E_1 \longrightarrow$	$E_1 \longrightarrow$	$E_2 \longrightarrow$	E_2	$p_{11}p_{12}p_{22}$

$$E_1 \to E_2 \to E_2 \to E_2 \quad \Big| \; p_{12}\, p_{22}\, p_{22}$$

Så $p_{12}^{(3)} = p_{11}\, p_{11}\, p_{12} + p_{12}\, p_{21}\, p_{12} + p_{11}\, p_{12}\, p_{22} + p_{12}\, p_{22}\, p_{22}$

$= 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7$

$= \boxed{0{,}35.}$

<u>Sats</u>: Antag P är en övergångsmatris med övergångssannolikheter p_{ij}. Låt $P^{(r)}$ stå för matrisen med r-stegsövergångs-sannolikheterna $p_{ij}^{(r)}$.

rad kolumn

Då gäller: $P^{(r)} = \underbrace{P \cdot P \cdot P \cdots P}_{r \text{ stycken.}}$

<u>Kom ihåg</u>: Om A är en $n \times m$ matris och B är en $m \times k$ matris, så är AB en $n \times k$ matris där rad i, kolumn j = (rad i från A) $\cdot$ (kol j från B)

<u>Ex</u>: Om $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ så blir

$$P^{(2)} = P \cdot P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p_{11}p_{11} + p_{12}\cdot p_{21} & p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22} \\ p_{21}p_{11} + p_{22}p_{21} & p_{21}p_{12} + p_{22}p_{22} \end{pmatrix}$$

<u>Exempel</u>: Antag X en MK med

$P = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$. Beräkna $P(X(3) = E_1 \mid X(0) = E_2)$

<u>L</u>: Vi söker $p_{21}^{(3)}$. Vi har $P^{(3)} \overset{\text{sats}}{=} \underbrace{P \cdot P}_{= P^{(2)}} \cdot P$

$= P^{(2)} \cdot P$.

$$P^{(2)} = P \cdot P = \begin{pmatrix} 0{,}1\cdot 0{,}1 + 0{,}9\cdot 0{,}3 & 0{,}1\cdot 0{,}9 + 0{,}9\cdot 0{,}7 \\ 0{,}3\cdot 0{,}1 + 0{,}7\cdot 0{,}3 & 0{,}3\cdot 0{,}9 + 0{,}7\cdot 0{,}7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}28 & 0{,}72 \\ 0{,}24 & 0{,}76 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{(3)} = P^{(2)} \cdot P =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}28\cdot 0{,}1 + 0{,}72\cdot 0{,}3 & 0{,}28\cdot 0{,}9 + 0{,}72\cdot 0{,}7 \\ 0{,}24\cdot 0{,}1 + 0{,}76\cdot 0{,}3 & 0{,}24\cdot 0{,}9 + 0{,}76\cdot 0{,}7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}244 & 0{,}756 \\ 0{,}252 & 0{,}748 \end{pmatrix}.$$

$\to p_{21}^{(3)}$

Exempel: Antag $\underline{X}$ MK med $\Omega = \{E_1, E_2, E_3\}$ och $P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \end{pmatrix}$. Beräkna $P(\underline{X}(5) = E_2 \mid \underline{X}(3) = E_1)$

L: Söker $p_{12}^{(2)}$. Värdet $p_{12}^{(2)}$ står i rad 1, kol 2 i $P^{(2)} = P \cdot P$.

Så $p_{12}^{(2)} = (\text{rad } 1 \text{ i } P) \cdot (\text{kol } 2 \text{ i } P)$

$$= 0{,}2 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 = \boxed{0{,}28}.$$