MATHEMATICS Univ. of Gothenburg and Chalmers University of Technology
Examination in algebra : MMG500 and MVE 150, 2017-03-17.
No books, written notes or any other aids are allowed.
Telephone 031-772 5325.

1a) Give an example of a non-cyclic abelian group of order 12. 2p

b) Give an example of a non-abelian group of order 12. 2p

2. Let $\varphi: S_n \to H$ be a homomorphism from the symmetric group S_n to a group H or order 3

a) What can be said about the order of $\varphi(\tau) \in H$ for a transposition $\tau \in S_n$? 2p

b) Use this information to deduce that S_n has no normal subgroup of index 3. 2p

3. Let K be a field with 4 elements and $\alpha \in K$ an element with $\alpha \neq 0$ and $\alpha \neq 1$.
a) Show that $\alpha^{2017} = \alpha$ in K. 2p
b) Show that $\alpha^{2018} + \alpha^{2017} + 1 = 0$ in K. 2p
c) Is the polynomial $x^{2018} + x^{2017} + 1$ irreducible over K ? 1p

4. Let m,n be two positive integers where m divides n There is then a natural map $\varphi : U(\mathbf{Z}_n) \to U(\mathbf{Z}_m)$ between the unit groups of $\mathbf{Z}_n$ and $\mathbf{Z}_m$, which sends $[a]_n$ to $[a]_m$ for any integer a with $(a, n) = 1$. Show that this map is surjective. 4p
(Hint : Study first the case where m is a prime power.)

5. Let $* : G \times G \to G$ be an associative binary operation on a set G. 4p

a) Show that $(G, *)$ has at most one neutral element.

b) Show that each element of G has at most one inverse with respect to $*$.

6. Show that the kernel of a ring homomorphism $\theta: R \to S$ is an ideal of R. 4p

(You should verify <u>all</u> conditions for a subset of R being an ideal.)

The theorems in Durbin's book may be used to solve exercises 1–4, but all claims that are made must be motivated.

MATHEMATIK Göteborgs universitet och Chalmers tekniska högskola
Examen I algebra : MMG500 och MVE 150, 2017-03-17.
Inga hjälpmedel är tillåtna
Telefon 031-772 5325.

1a) Ge exampel på en abelsk grupp av ordning 12,. som ej är cyklisk. . 2p

b) Ge exampel på en icke abelsk grupp of order 12. 2p

2. Låt φ: $S_n \to H$ vara en homomorfi från den symmetriska gruppen S_n till en grupp H av ordning 3.

a) Vad kan man saga om ordningen av bilden $\varphi(\tau)$ av en transposition $\tau \in S_n$? 2p

b) Härled från denna information att S_n saknar normala delgrupper av index 3. 2p

3. Låt K vara en kropp med 4 element och $\alpha \in K$ att element där $\alpha \neq 0$ och $\alpha \neq 1$.
a) Visa at $\alpha^{2017} = \alpha$ i K. 2p
b) Vsia att $\alpha^{2018} + \alpha^{2017} + 1 = 0$ i K. 2p
c) Är polynomet $x^{2018} + x^{2017} + 1$ irreducibelt över K ? 1p

4. Låt m,vara två psoitiva heltal där m delar n och $\varphi : U(\mathbf{Z}_n) \to U(\mathbf{Z}_m)$ den naturlig mellan enhetsgrupperna $\mathbf{Z}_n$ and $\mathbf{Z}_m$, som skickar $[a]_n$ to $[a]_m$ för varje heltal a med $(a, n) = 1$. Visa att denna avbildning är surjektiv. 4p

(Ledning : Studera först fallet när m är en primpotens.)

5. Låt $* : G \times G \to G$ vara associativ binär operation på en mängd G. 4p

a) Visa att $(G, *)$ har högst ett neutralt element.

b) Show that each element of G has at most one inverse with respect to $*$.

6. Show that the kernel of a ring homomorphism θ: $R \to S$ is an ideal of R. 4p

(You should verify <u>all</u> conditions for a subset of R being an ideal.)

The theorems in Durbin's book may be used to solve exercises 1–4, but all claims that are made must be motivated.