

Flervariabelsanalys: Sammanfattning LV 1

Grupp 1C: Joel Kristensson, Elin Gustafsson, Vendela Sandell,
Alexander Ternström, Nils Olsson, Ellen Wahrolin

January 2023

1 Föreläsning 1

1.1 Notation

I envariabelsanalysen noterades en funktion med $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ medan i flervariabelsanalys så noterar vi det med $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ $n, m \geq 1$. En funktion av n variabler kallas skalärvärd ifall $m = 1$ och en vektorvärd ifall $m > 1$. Om $m = n$ kan f tolkas som ett n -dimensionellt vektorfält. En vektorvärd funktion kan reduceras till en uppsättning skalärvärda funktioner genom att studera varje komponent för sig.

1.2 Derivata i en variabel

Genom att anta att $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är definierad i en omgivning till a kan tre definitioner för derivatan i en variabel formuleras:

Definition 1:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (1)$$

Gränsvärdet är då derivatan i punkten $x = a$.

Definition 2: Låt $\rho(h)$ vara skillnaden mellan differensekvationen och derivatan

$$\rho(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \quad (2)$$

Löses $f(a+h)$ ut blir ekvationen: $f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \rho(h) \cdot h$ där man ser att f är deriverbar i $x = a$ om det finns en reell konstant A och en funktion $\rho(h)$ s.a

$$f(a+h) = f(a) + Ah + h\rho(h) \text{ och } \lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = 0 \quad (3)$$

Derivatan $f'(a)$ är då A .

Definition 3: (geometrisk tolkning) Efter omskrivning kan formulering 2 uttryckas som $f(x) = f(a) + A \cdot (x-a) + (x-a) \cdot \rho(x-a)$. Den sista termen i denna tolkning är väldigt liten ignoreras den får vi tangentlinjen.

Anmärkning: $\rho(h) \rightarrow 0$ innebär att det finns en unik tangentlinje, alltså $\lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = 0 \Leftrightarrow$ deriverbar.

1.3 Generalisering till $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $n > 1$

I flera variabler blir gränsvärden ofta svåra då vi kan närma oss en punkt i oändligt många riktningar och derivatan beror vanligtvis på riktningen. I en given riktning kallas derivatan *Riktningderivata*. Ett specialfall är de *partiella derivatorna* då man närmar sig parallellt med koordinataxlarna.

Def (2.1.1 S.46) Partiell derivata

Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ och f definierad i en omgivning av (a, b) . De partiella derivatorna till f i (a, b) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \quad (4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} \quad (5)$$

De partiella derivatorna noteras, $\frac{\partial}{\partial x}$. Beräkningar hanteras som i en envariablesderivata men betrakta de andra variablerna som konstanter. Viktigt att komma ihåg vid dessa beräkningar är att om f är deriverbar i $a \rightarrow f$ kontinuerlig i a .

2 Föreläsning 2: Differentierbarhet och C^1

Partiell derivata är (ofta) inte användbart i flera dimensioner, istället används **differentierbarhet**.

Om $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kan vi tolka den som en graf $z = f(x, y)$

Grafisk definition: f är differentierbar i en punkt (a, b) om $\exists$ ett unikt plan som är tangent till grafen av f i punkten.

Formell definition: Antag $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definierad i en omgivning av (a, b) . f är då differentierbar i (a, b) om $\exists$ konstanter A och B och en funktion $\delta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ s.a.

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + Ah + Bk + \left\| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\| \delta(h, k) \quad (6)$$

där $\delta(h, k) \rightarrow 0$ då $(h, k) \rightarrow (0, 0)$.

För att linjärisera i (a, b) skippar vi sista termen och får: $f(a+h, b+k) = f(a, b) + Ah + Bk$, där $\delta(h, k) \rightarrow 0$ då $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ ska tolkas som 2-dim gränsvärde.

2.1 Sats 2.2.1 (s. 53)

f differentierbar i $(a, b) \implies f$ kontinuerlig i (a, b)

2.2 Sats 2.2.2 (s. 54)

Om f uppfyller ekvation (6) är:
$$\begin{cases} A = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \\ B = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \end{cases}$$

Satsen bevisas genom att sätta $k=0$ och låta $h \rightarrow 0$, samt $h=0$ och låta $k \rightarrow 0$.

2.3 Definition 2.4.4

Om $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är differentierbar i $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ definierar vi **gradienten** (vektorn av alla partiella

derivator) i punkten $\bar{a}$ som:
$$\nabla f(\bar{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a}) \end{pmatrix}.$$

Med gradienten kan vi skriva ekvation (6) för $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ som:

$$f(\bar{a} + \bar{h}) = f(\bar{a}) + \nabla f(\bar{a}) \cdot \bar{h} + \|\bar{h}\| \delta(\bar{h}) \quad (7)$$

2.4 Kopplingen mellan ekvation 6 och tangentplan

Låt $\hat{n}$ vara en normal till planet där $\hat{n} = \begin{pmatrix} E \\ F \\ G \end{pmatrix}$, och låt (x_0, y_0, z_0) vara en godtycklig punkt i planet.

$\bar{v}$ är en godtycklig vektor i planet och $\bar{v} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$.

Då $x_0 = a, y_0 = b, z_0 = f(a, b)$ och $h = x - x_0, k = y - y_0$ ger ekvation 6 att:

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + \left\| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\| \delta(h, k) \quad (8)$$

$z = f(x, y)$ ger grafen av f .

Tangentplanet fås genom att skippa sista termen i ekvation 8 och ekvationen blir då:

$$z = z_0 + A(x - x_0) + B(y - y_0) \quad (9)$$

Planet går genom $(x_0, y_0, z_0) = (a, b, f(x, y))$ och har normalvektor $\begin{pmatrix} A \\ B \\ -1 \end{pmatrix}$, där $A = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$, $B = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$

2.5 Notation

Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ och D vara en öppen sammanhängande mängd i $\mathbb{R}^n$. Vi skriver att $f \in C^1$ om alla partiella derivator $f'_{x_1}, \dots, f'_{x_n}$ existerar i hela mängden D och är kontinuerliga funktioner av n variabler.

2.6 Sats 2.2.3

$f \in C^1(D) \implies f$ differentierbar i hela D

OBS: $\Leftarrow$ gäller inte, alltså ingen ekvivalens.

3 Föreläsning 3: Kedjeregeln

Under en föreläsning 2023-01-19 förklarade Thomas Bäckdahl hur kedjeregeln i flera variabler fungerar. Kedjeregeln används vid derivering av sammansättningar av funktioner. För en funktion $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ och en annan funktion $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$, blir sammansättningen av funktionerna

$$f \circ g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m. \quad (10)$$

Derivatan av funktionen $f \circ g$ kan beskrivas på olika sätt beroende på hur stora dimensionerna är, det vill säga hur stora n , p och m är. Under föreläsningen togs bland annat ekvationen för fallet $n \geq 1$, $p \geq 1$ och $m = 1$ fram, vilket är steget innan det allmänna fallet där även $m \geq 1$. Derivatan av sammansättningen görs under antagandet att funktionerna f och g är differentierbara och att det finns en vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ sådant att $\mathbf{a}$ är en inre punkt i definitionsmängden för g (eller $D(g)$), samt att $g(\mathbf{a})$ är en inre punkt i $D(f)$. Till följd av detta antagande kan följande ekvation för derivatan i fallet $n \geq 1$, $p \geq 1$ och $m = 1$ härledas:

$$\frac{\partial}{\partial t_j} f(\mathbf{g}(\mathbf{t})) = \nabla f(\mathbf{g}(\mathbf{t})) \bullet \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t_j} \quad \forall j : 1, \dots, n \quad (11)$$

Lägg märke till att vid insättning av $n = 1$ och $p = 1$ erhålles envariabelfallet av derivatan, som är följande:

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dg} f(g(x)) \cdot \frac{d}{dx} g(x) \quad (12)$$

Kedjeregeln i flera variabler kan tillämpas vid lösning av partiella differentialekvationer (PDE) genom att göra variabelbytet $(x, y) \rightarrow (u, v)$ och skriva $\frac{\partial}{\partial x}$ och $\frac{\partial}{\partial y}$ uttryckt i $\frac{\partial}{\partial u}$ och $\frac{\partial}{\partial v}$.

4 Föreläsning 4

4.1 Riktningderivator och gradienter

Riktningderivatan är derivatan av en funktion $f(\mathbf{x})$ i en specifik riktning. Partiella derivator som tidigare nämnts är exempel på riktningderivator där riktningen är längsmed en koordinataxel. Den här definitionen kan göras mer formell.

4.1.1 Definition riktningsderivata

För en normerad riktningsvektor $\hat{v} \in \mathbb{R}^n$ är riktningsderivatan i riktningen $\hat{v}$ av funktionen f i punkten $\mathbf{a}$

$$f'_{\hat{v}}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\hat{v}) - f(\mathbf{a})}{h}. \quad (13)$$

Det viktigaste att tänka på här är att $\hat{v}$ är en normerad riktningsvektor. Det betyder att längden av $\hat{v}$ måste vara ett. Definitionen är tydlig med vad en riktningsvektor är, men är inte så användbar i praktiken. I en variabel finns enklare metoder att derivera än att behöva beräkna gränsvärdet. Det finns det även för flera variabler och beskrivs i denna sats.

4.1.2 Sats 2.4.6

Om $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ är differentierbar i $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ och $\hat{v} \in \mathbb{R}^n$, $||\hat{v}|| = 1$ så

$$\exists f'_{\hat{v}}(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \hat{v}. \quad (14)$$

En intressant observation som kan göras är att riktningsderivatan i en given punkt $\mathbf{a}$ är maximal vid derivation i gradientens riktning. Detta kan härledas genom den geometriska tolkningen av skalärprodukt. Observationen sammanställs i nedföljande sats.

4.1.3 Sats 2.4.7

Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vara differentierbar i $\mathbf{a}$, gradienten $\nabla f(\mathbf{a})$ pekar i den riktningen f växer snabbast i i punkten $\mathbf{a}$. Den maximala tillväxthastigheten är $||\nabla f(\mathbf{a})||$.

4.2 Nivåytor

4.2.1 Definition

Låt $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. Ekvationen $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = c$ definierar då vanligtvis en n -dimensionell (hyper)yta i $\mathbb{R}^{n+1}$.

4.2.2 Terminologi

Ekvationen ovan ger ibland, men inte alltid, en (hyper)yta i $n + 1$ dimensioner. Då $n = 1$ kallar vi lösningen för en nivåkurva, då $n = 2$ för en nivåyta och då $n > 2$ för en nivåhyperyta i $\mathbb{R}^{n+1}$.

4.2.3 Gradienten är en normal till nivåytan

Vi har vidare att gradienten till f i en punkt ger en normalvektor till nivåytan i den punkten. Antag att f är differentierbar i en punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$ och att $\hat{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $|\hat{v}| = 1$ betecknar en riktning. Om $\hat{v}$ är en tangent till ytan $f(\mathbf{x}) = c$ i $\mathbf{a}$ gäller att $f'_{\hat{v}}(\mathbf{a}) = 0 \iff \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \hat{v} = 0 \iff \nabla f(\mathbf{a}) \perp \hat{v}$. Alltså är alla tangenteriktningar ortogonala mot ∇f .

4.3 Högre ordningens derivator

4.3.1 Notation

Då vi vill derivera en funktion f av flera variabler mer än en gång kan vi till exempel notera detta på något av följande sätt: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)$, $f''_{x_k x_j} = f''_{j k}$ eller $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$. Om en funktions alla partiella derivator av ordning $\leq k$ är kontinuerliga på en given (öppen) mängd D noterar vi funktionen som en del av klassen $C^k(D)$.

4.3.2 Sats 2.5.4 (Clairauts sats)

Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ och antag att f är C^2 i en omgivning kring en punkt (a, b) . Då är $f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b)$.

Satsen kan generaliseras så att det gäller för funktioner av ett godtyckligt antal variabler som deriveras k gånger då de tillhör klassen C^k .