

Tavelpresentation 1A

Gustav Fixell, Herman Martinsson, Ida Olsson & Alaa Saeed Saeed

24 januari 2023

1 Föreläsning 1

Funktioner som hanteras i flervariabelsanalys är funktioner som input tar en vektor i $\mathbb{R}^n$ och ger en vektor i $\mathbb{R}^m$, där $m, n \geq 1$.

- För $m = 1$ kallas funktionen skalärvärd.
- För $m > 1$ kallas funktionen vektorvärd.

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

För att förstå derivatan fungerar i högre dimensioner går man först igenom 3 formuleringar för derivatan i fallet med en variabel.

1.1 Formulering 1:

Den välkända derivatans definition; att f är deriverbar i $x = a$ om $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existerar, och då är gränsvärdet lika med $f'(a)$.

1.2 Formulering 2:

Vi inför $\rho(h)$ som skillnaden mellan differenskvot och derivatan:

$$\rho(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$$

Om vi löser ut $f(a+h)$ ur uttrycket får vi:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\rho(h)$$

f är deriverbar i $x = a$ om det finns en konstant $A \in \mathbb{R}$ och en funktion $\rho(h)$ så att $f(a+h) = f(a) + Ah + h\rho(h)$, där $\rho(h) \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ och $A = f'(a)$.

1.3 Formulering 3 (Geometrisk tolkning av formulering 2):

Låt $x = a + h \Leftrightarrow h = x - a$

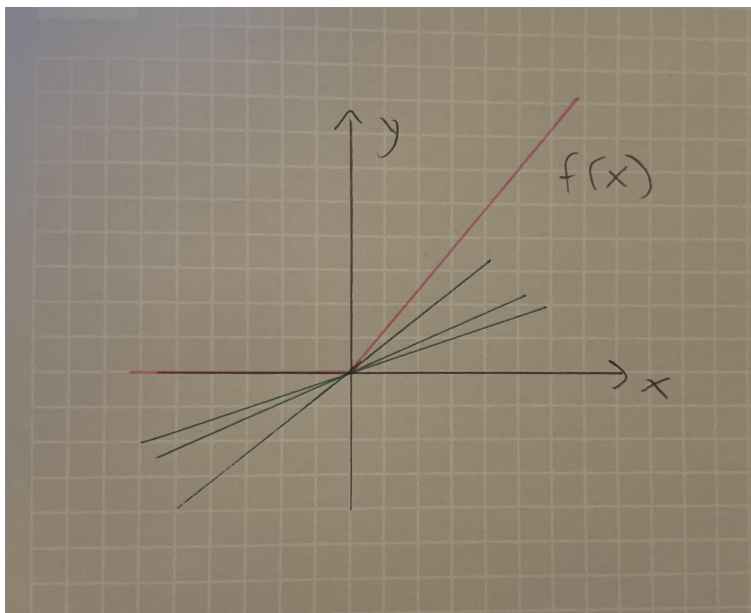
Från formulering 2 följer att:

$$f(x) = f(a) + A(x - a) + (x - a)\rho(x - a)$$

Ignorerar vi sista termen får vi tangentlinjen i $x = a$. Krav för deriverbarhet i en punkt innebär att det finns en unik tangent till punkten. Detta är endast möjligt om $\rho(h) \rightarrow 0$, när $h \rightarrow 0$.

Ett exempel på en funktion som inte är deriverbar i alla punkter är:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$



Eftersom funktionen har en “kant” vid $x = 0$ kan man dra flera olika tangentlinjer i punkten $x = 0$, det finns alltså ingen unik tangent, och därför är funktionen ej deriverbar i $x = 0$.

2 Differentierbarhet

Differentierbarhet kan definieras både grafiskt och formellt.

2.1 Grafisk definition:

f är differentierbar i en punkt (a, b) om det finns ett unikt tangentplan som ligger nära funktionsytan.

2.2 Formell definition:

Antag att $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är definierad i en omgivning av (a, b) . f är differentierbar i (a, b) om det finns konstanter A, B och en funktion $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + Ah + Bk + \sqrt{h^2 + k^2} \rho(h, k) \quad (1)$$

där $\rho(h, k) \rightarrow 0$ då $(h, k) \rightarrow 0$

Observera att om man tar bort sista termen i uttrycket ovan, får man linjäriseringen av f i (a, b)

2.2.1 Sats 2.2,1

f differentierbar i $(a, b) \Rightarrow f$ kontinuerlig i (a, b) .

Bevis av sats 2.2,1:

Låt $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ i (1). Ger $f(a+h, b+k) \rightarrow f(a, b)$.

Det vill säga f är kontinuerlig då $(h, k) \rightarrow (0, 0)$.

Anmärkning

Det finns kontinuerliga funktioner som ej är differentierbara. Till exempel är funktionen i exemplet ovan kontinuerlig men ej differentierbar i $x = 0$.

2.2.2 Sats 2.2,2

Om f är differentierbar är $A = f'_x(a, b)$ och $B = f'_y(a, b)$

Bevis av sats 2.2,2:

Sätt $K = 0$ i uttrycket, sedan låt $h \rightarrow 0$

$$A = \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{(h)} - \frac{|h|}{h} \rho(h, 0) \quad (2)$$

Detta uttryck går mot $f'_x(a, b)$. På samma sätt får man $f'_y(a, b)$ om man sätter in $h = 0$ och låter $k \rightarrow 0$.

Gradient:

Gradient är en vektor som består av alla partiella derivator. Gradienten representerar lutningen av funktionens graf.

$$\nabla F = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a, b) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a, b) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a, b) \end{pmatrix} \quad (3)$$

Med hjälp av gradienten kan (2) skrivas för $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(\vec{a} + \vec{h}) = f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \bullet \vec{h} + ||\vec{h}||\rho(\vec{h}) \quad (4)$$

3 Hur avgör man huruvida en funktion är differentierbar?

Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ och $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$. För enkelhetens skull kommer här n i $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ges värdet 2 och $\mathbf{a} = (a, b)$. Om vi återvänder till den formella definitionen för differentierbarhet för en funktion av två variabler, ser vi att ett krav som måste uppfyllas är att det finns en funktion $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vars går mot noll då (h, k) närmar sig $(0, 0)$. Ur ekvation (1) kan $\rho(h, k)$ lösas ut enligt

$$\rho(h, k) = \frac{f(a + h, b + k) - f(a, b) - hf'_x(a, b) - kf'_y(a, b)}{\sqrt{h^2 + k^2}}. \quad (5)$$

Om man sedan beräknar värdet av de partiella derivatorna i $\mathbf{a}$ kan man undersöka värdet av $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \rho(h, k)$; är det lika med 0 är f differentierbar, i annat fall är den det inte. Att faktiskt visa detta kan emellertid bli väldigt krångligt, men som tur är kan man på annat vis en funktions differentierbarhet.

Observera: om $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ och D är en öppen, sammanhängande mängd sägs f tillhöra $C^1(D)$ om alla f s partiella derivator existerar och är kontinuerliga funktioner av n variabler i hela D .

Sats 2.2.3: $f \in C^1(D) \implies f$ differentierbar

Bevis av sats (för fallet $n = 2$):

Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ öppen och sammanhängande. Antag att $f \in C^1(D)$ och låt punkten $\mathbf{a} = (a, b) \in D$ vara godtycklig. Målet är att visa att f är differentierbar i (a, b) . Observera att både $f'_x(a, b)$ och $f'_y(a, b)$ existerar enligt antagandet att f tillhör $C^1(D)$, och därmed återstår enbart att visa att $\rho(h, k)$ i (5) närmar sig 0 då (h, k) går mot $(0, 0)$.

Först görs omskrivningen $f(a+h, b+k) - f(a, b) = (f(a+h, b+k) - f(a+h, b)) + (f(a+h, b) - f(a, b))$ genom att lägga till och dra ifrån $f(a+h, b)$. Sedan kan de två parenteserna studeras var för sig. I den andra parentesen ser vi att $y = b$ från (a, b) till $(a+h, b)$. Låt nu $g(h) = f(a+h, b)$. $g'(h) = f'_x(a+h, b)$ och eftersom f'_x är kontinuerlig är så även g' . Villkoren för Lagranges medelvärdessats är nu uppfyllda, och vi kan nyttja denna för att få fram att det finns ett $\xi_2 \in (0, 1)$ så att $f(a+h, b) - f(a, b) = g(h) - g(0) = h \cdot g'(\xi_2 h) = h \cdot f'_x(a + \xi_2 h, b)$. På samma sätt visas att det finns ett $\xi_1 \in (0, 1)$ så att den första parentesen är ekvivalent med $k \cdot f'_y(a+h, b + \xi_1 k)$.

Sätter man sedan in dessa i (5) får man följande uttryck:

$$\rho(h, k) = \frac{h(f'_x(a + \xi_2 h, b) - f'_x(a, b)) + k(f'_y(a+h, b + \xi_1 k) - f'_y(a, b))}{\sqrt{h^2 + k^2}}. \quad (6)$$

Gränsvärdet av denna funktion kan uppskattas med hjälp av det faktum att $\frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq 1$ och $\frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq 1$ för alla tal h och k . Vi får genom denna uppskattning och triangelolikheten att

$$|\rho(h, k)| \leq |f'_x(a + \xi_2 h, b) - f'_x(a, b)| + |f'_y(a+h, b + \xi_1 k) - f'_y(a, b)|,$$

och kan sedan låta (h, k) gå mot $(0, 0)$. Synbarligen närmar sig både $(a + \xi_2 h, b)$ och $(a+h, b + \xi_1 k)$ (a, b) när detta sker och genom f'_x och f'_y 's kontinuitet vet vi att $f'_x(a + \xi_2 h, b)$ och $f'_y(a+h, b + \xi_1 k)$ därmed närmar sig $f'_x(a, b)$ respektive $f'_y(a, b)$. Det vill säga $\rho(h, k)$ närmar sig 0.

■

4 Generalisering av kedjeregeln

I envariabel fallet menas med kedjeregeln att:

$$(f \circ g)'(t) = \frac{d}{dt} f(g(t)) = f'(g(t))g'(t) \quad (7)$$

Generaliseringen av kedjeregeln görs i 4 steg:

Steg 1: $n \geq 1, p = 1, m = 1$

Steg 2: $n = 1, p \geq 1, m = 1$

Steg 3: $n \geq 1, p \geq 1, m = 1$

Steg 4: $n \geq 1, p \geq 1, m \geq 1$

Före vi kan använda kedjeregeln behöver vi göra följande antagande:

Antagande (1)

Funktionerna $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ och $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ är differentierbara och $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ så att $\mathbf{a}$ är en inre punkt i $D(g)$ och $g(\mathbf{a})$ är en inre punkt i $D(f)$.

Låt oss nu börja med steg 1:

Enligt vårt antagande (1) är $f \circ g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ differentierbar i $t = a$ och

$$\frac{\partial}{\partial t} f(g(t_1, \dots, t_n))|_{t=a} = f'(g(t_1, \dots, t_n)) \frac{\partial g}{\partial t}(a) \quad (8)$$

vilket kan skrivas som

$$\frac{\partial}{\partial t_j} f(g(t)) = f'(g(t)) \frac{\partial g}{\partial t_j}. \quad (9)$$

Detta följer av envariabel fallet ty $\frac{\partial}{\partial t_j}$ betyder $\frac{d}{dt}$ där de andra variablerna är konstanta.

Steg 2:

$\mathbf{g} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^p, f : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}$ Under antagande (1) blir regeln:

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{g}(t)) = \nabla f(\mathbf{g}(t)) \frac{d\mathbf{g}}{dt} \quad (10)$$

Steg 3:

$\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p, f : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}$ och antagande 1 ger:

$$\frac{\partial}{\partial t_j} f(\mathbf{g}(\mathbf{t})) = \nabla f(\mathbf{g}(\mathbf{t})) \bullet \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t_j} \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (11)$$

Steg 3 följer av steg 2 (som dock inte visades här) på samma sätt som steg 1 följer av envariabel fallet. D.v.s vanlig derivata m.a.p t_j om man tolkar de andra variablerna som konstanter.