

MVE035 - Grupp 2B

Adam Herbertsson
Isa Sundén
Karl Flysjö
Savinjith Walisadeera
Tova Wiklund Hellström
William Backstedt

January 2023

1 Variabelbyten i PDE:er & Taylors Formel

1.1 Variabelbyte i andra ordningens partiella differentialekvationer

Många fysikaliska förlopp beskrivs med differentialekvationer innehållande andra ordningens partiella derivator. Vi har tidigare tittat på PDE:er av första ordningen samt hur man kan använda variabelbyte för att transformera och förenkla en given PDE. Antag alltså att vi har en partiell differentialekvation av andra ordningen, beroende på x och y .

- P.S.S som första ordningens PDE: Uttryck de partiella derivatorna $\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$ i derivator med avseende på u och v med hjälp av kedjeregeln som följande:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1)$$

- För att uttrycka andra ordningens partiella derivator $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ och $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, så används kedjeregeln upprepat på varje term i uttrycken $\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$.
- Tänk på att derivata av produkt kan förekomma vid vissa variabelbyten.

1.2 Taylors formel i en variabel

1.2.1 Notation

Låt f, g vara två funktioner definierade på $D \subseteq \mathbb{R}^n$, då betyder $f = O(g)$ att det finns något $c \in \mathbb{R}$ så att $|f(x)| < c |g(x)| \quad \forall x \in D$

1.2.2 Taylors formel (Envariabelfallet)

Vi har tidigare sett Taylors formel och definierar den här som följande:

Låt $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara $k+1$ gånger differentierbar i en omgivning D av punkten $x = a$ och låt $h > 0$ vara tillräckligt liten sådan att $[a-h, a+h] \subseteq D$. Då gäller att

$$f(a+h) = \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} h^{k+1}, \quad (2)$$

för något $\xi \in (a, a+h)$. Första termen i formeln, dvs summan, är Taylorpolynomet medan det andra beskriver resttermen. Taylors formel kan därmed skrivas som

$$f(a+h) = \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + \mathcal{O}(h^{k+1}) = p_k + \mathcal{O}(h^{k+1}), \quad (3)$$

där p_k alltså är Taylorpolynomet av grad k och $\mathcal{O}(h^{k+1})$ är Ordo-termen som representerar resttermen. Vi kan beteckna resttermen med Ordo eftersom $f^{(k+1)}(x)$ är kontinuerlig och därmed begränsad på den kompakta mängden $[a-h, a+h]$.

1.2.3 Taylorapproximation

Med hjälp av Taylors formel kan vi göra approximationer av funktionen f i närheten av $x = a$ med ett polynom av grad k .

Första ordningens Taylorapproximation är vanlig linjärisering

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \mathcal{O}(h^2). \quad (4)$$

Andra ordningens Taylor polynom kan approximeras av

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \mathcal{O}(h^3) \quad (5)$$

och används i samband med stationära punkter, dvs där $f'(a) = 0$ för att avgöra vilken slags kritisk/stationär punkt det rör sig om. För en stationär punkt $f'(a) = 0$ gäller:

- $f''(a) > 0 \Rightarrow x = a$ lokalt minimum
- $f''(a) < 0 \Rightarrow x = a$ lokalt maximum
- $f''(a) = 0 \Rightarrow$ krävs längre utveckling.

1.3 Taylors formel i flera variabler

För att utvidga Taylorserier till flera variabler börjar vi med en funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ där vi antar att f är partiellt deriverbar $k+1$ gånger. Vi vill utveckla $f(x, y)$ kring någon baspunkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ och överför detta till envariabelfallet för att sedan Taylorutveckla kring t nära noll och ickenegativt

$$F(t) = f(a + th_1, b + th_2) \quad (6)$$

$$F(t) = \sum_{j=0}^k \frac{F^{(j)}(0)}{j!} t^j + \frac{F^{(k+1)}(\xi)}{k+1} t^{k+1} \quad (7)$$

där $\xi \in (0, t)$. Vi behöver nu uttrycka derivatorna av F i termer av derivator av f . Kedjeregeln ger att

$$F'(t) = f'_x(a + th_1, b + th_2) \frac{d}{dt}(a + th_1) + f'_y(a + th_1, b + th_2) \frac{d}{dt}(b + th_2) = \quad (8)$$

$$= \left(\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) f \right) \Big|_{x=a+th_1, y=b+th_2} \quad (9)$$

Förhållandet mellan F' och $(h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y})f$ är detsamma som mellan F och f , ur detta följer att högre derivator kan skrivas som

$$F^{(j)}(t) = \left(\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \right)^j f \right) \Big|_{x=a+th_1, y=b+th_2} \quad (10)$$

Detta högerled kan utvecklas med binominalsatsen för att enklare uttrycka högre ordningens termer och följer formen

$$F^{(j)}(t) = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} h_1^i h_2^{j-i} \frac{\partial^j f}{\partial x^i \partial y^{j-i}} \Big|_{x=a+th_1, y=b+th_2} \quad (11)$$

Värt att notera är att genom att definiera vektorn $\bar{h} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ så kan den innersta parentesen i högerled för ekvation 5 skrivas som

$$h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} = \bar{h} \cdot \nabla \quad (12)$$

Genom att definiera $\bar{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ kan approximationen skrivas mer kortfattat som

$$f(\bar{a} + \bar{h}) = \sum_{j=0}^k \frac{(\bar{h} \cdot \nabla)^j}{j!} f(\bar{a}) + \frac{(\bar{h} \cdot \nabla)^{k+1}}{(k+1)!} f\bar{\xi} \quad (13)$$

Analogt med att första ordningens Taylorutveckling ger en tangentiell linje för envariabelfallet så ger första ordningen det tangerande planet i två variabler. En Taylorutveckling av andra ordningen kan även ge uttryck till svängda ytor som elliptiska och hyperboliska parabolider. Precis som för Taylorutvecklingar i en variabel så ökar osäkerheten av approximationen beroende på derivatornas lutning i punkten som utvecklades kring samt avståndet från denna punkt.

För att reducera detta till ett mer tydligt exempel följer nu andra ordningens Taylorutveckling för en funktion i två variabler.

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + (hf'_x(a, b) + kf'_y(a, b)) \Big|_{(a,b)} + \frac{1}{2} (h^2 f''_{xx}(a, b) + 2hk f''_{xy}(a, b) + k^2 f''_{yy}(a, b)) \Big|_{(a,b)} + \mathcal{O}(\|\bar{h}^3\|) \quad (14)$$

2 Undersökning av lokala extrempunkter

Funktionen $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ har lokalt maximum i $\bar{a}_1$ om det finns en omgivning Ω av $\bar{a}_1$ så att $f(\bar{x}) \leq f(\bar{a}_1)$, $\forall \bar{x} \in \Omega$. Likadant har funktionen f lokalt minimum i $\bar{a}_2$ om det finns en omgivning Ω av $\bar{a}_2$ så att $f(\bar{x}) \geq f(\bar{a}_2)$, $\forall \bar{x} \in \Omega$. Maxvärden och minvärden kallas tillsammans för extremvärden.

2.1 Sats 2.6.11

Om $f(\bar{x})$ har lokalt extremvärde i en inre punkt $\bar{a}$ i definitionsmängden och f är partiellt deriverbar i $\bar{a}$ så är $\nabla f(\bar{a}) = \bar{0}$ och $\bar{a}$ kallas då stationär punkt.

2.2 Karaktären för en stationära punkter

Om vi har en funktion $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ som har den stationära punkten $\bar{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ så finns det en kvadratisk form för f som vi kan skriva $Q(h, k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$, där $A = f''_{xx}(a, b)$, $B = f''_{xy}(a, b)$ och $C = f''_{yy}(a, b)$. Den kvadratiske formen är intressant då tecknet på $Q(h, k)$ ofta kan visa om punkten $\bar{a}$ är en maximi-, minimipunkt eller ingen av dessa två. Vi definierar följande:

En kvadratisk form $Q(h, k) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ är

- positivt definit om $Q(h, k) > 0$, $\forall (h, k) \neq 0 \Rightarrow \bar{a}$ strängt lokalt minimum
- positivt semidefinit om $Q(h, k) \geq 0$
- negativt definit om $Q(h, k) < 0$, $\forall (h, k) \neq 0 \Rightarrow \bar{a}$ strängt lokalt maximum

- negativt semidefinit om $Q(h, k) \leq 0$
- indefinit om $Q(h, k)$ antar både positiva och negativa värden $\Rightarrow \bar{a}$ sadelpunkt

Om $Q(h, k)$ antingen är positivt eller negativt semidefinit går det inte att avgöra karaktären på $\bar{a}$ med endast den kvadratiske formen.

2.3 Matrisformulering

Om vi låter $\bar{h} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ och $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ så är $Q(\bar{h}) = \bar{h}^T M \bar{h}$. Då M är en 2x2-matris så är $Q(\bar{h})$

- definit om $\det(M) > 0$ (positivt om $A > 0$ och negativt om $A < 0$)
- indefinit om $\det(M) < 0$
- semidefinit om $\det(M) = 0$

Om M istället är en symmetrisk nxn-matris och $\bar{h} \in \mathbf{R}^n$ så är $Q(\bar{h})$

- positivt definit om alla egenvärden är positiva
- negativt definit om alla egenvärden är negativa
- indefinit om det finns positiva och negativa egenvärden
- semidefinit om något egenvärde är noll

3 Funktionalmatriser

Antag att den vektorvärda funktionen $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$. Denna funktion kan skrivas som en kolonnvektor:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_p(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (15)$$

Utvecklar man $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n))$ och deriverar varje funktions partiella derivator får man matrisen:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Denna matris kallas funktionalmatrisen till funktionen $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Matrisen har för dimensionerna p x n. Raden j i funktionalmatrisen ger gradienten $\nabla f_j = (\frac{\partial f_j}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_j}{\partial x_n})$.

3.1 Kedjeregeln

Vid sammansatta funktionen nyttjas kedjeregeln för att få fram derivatan av den vektorvärda funktionen. Antag att vi har två funktioner $\mathbf{g} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$, $\mathbf{f} : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^m$ och att båda är differentierbara i punkten $\mathbf{a}$. Antag $\mathbf{a} \in D(\mathbf{g})$ där $\mathbf{g}(\mathbf{a}) \in D(\mathbf{f})$.

Låt:

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \mathbf{g}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} g_1(\mathbf{t}) \\ \vdots \\ g_n(\mathbf{t}) \end{pmatrix}, \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (17)$$

Den sammansatta funktionen $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{t}))$ kan skrivas om till:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{t}) \\ \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (18)$$

Vid steg 3 i kedjeregeln för en komponent j inom $\mathbf{y}$ erhålls från raden i i funktionalmatrisen $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{t})$ och kolonnen j från funktionalmatrisen för $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial t_j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial t_j} \end{pmatrix} \quad (19)$$

Radar man ihop alla kolonner får man funktionalmatrisen till $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{t}))$. Genom detta kan man se att kedjeregeln för vektorvärda funktioner är:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{t})) \cdot \mathbf{g}'(\mathbf{t}) \quad (20)$$

Kedjeregeln visar också att matrismultiplikation av funktionalmatriserna för $\mathbf{f}$ och $\mathbf{g}$ ger funktionalmatrisen till $\mathbf{y}$.

3.2 Specialfallet ($m = n$)

Vid $(n \times n)$ matriser måste funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara differentierbar i punkten $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Skillnaden är att om funktionen $\mathbf{f}$ är differentierbar i $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ kommer matrisen vara $(n \times n)$.

4 Funktionaldeterminanter

Betraktar vektorfältet $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ definierad i $\mathbb{R}^n$ med värden i $\mathbb{R}^n$. Tidigare gav funktionalmatrisen upplysningar om funktionens lokala uppföranden i en viss punkt. Determinanten av denna kallas funktionaldeterminanten, och ger istället anvisningar för den linjära avbildningen från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$. Funktionaldeterminanten av funktionen $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ser ut enligt följande

$$\det \mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \det \left(\frac{\partial \mathbf{f}_j}{\partial \mathbf{x}_k} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}, \quad (21)$$

och betecknas som något av följande

$$\frac{d(\mathbf{f})}{d(\mathbf{x})}, \frac{d(\mathbf{y})}{d(\mathbf{x})}, \frac{d(f_1, \dots, f_n)}{d(x_1, \dots, x_n)}, \frac{d(y_1, \dots, y_n)}{d(x_1, \dots, x_n)}. \quad (22)$$

Även beteckningen $J(\mathbf{x})$ (Jacobis determinant) kan användas om det framgår vilken funktion som avses.

4.1 Sats 3.3.1 (s. 141)

För en sammansättning av två funktioner, $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ och $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{t})$, båda $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$, är funktionaldeterminanten produkten av de ingående funktionernas funktionaldeterminanter. Detta formuleras enligt följande

$$\frac{d(\mathbf{y})}{d(\mathbf{t})} = \frac{d(\mathbf{y})}{d(\mathbf{x})} \cdot \frac{d(\mathbf{x})}{d(\mathbf{t})}. \quad (23)$$

Ett alternativt skrivsätt är $\det(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})' = \det(\mathbf{f}' \mathbf{g}') = \det \mathbf{f}' \cdot \det \mathbf{g}'$. Satsen används lämpligen vid variabelbyten i $\mathbb{R}^n$, då dessa är bijektiva funktioner. För en rektangel kring en fix punkt $\mathbf{a}$ tillhörande definitionsmängden av en funktion under avbildningen $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ som bildar en ny rektangel kring punkten $\mathbf{f}(\mathbf{a})$, är absolutbeloppet av funktionaldeterminanten lika med förstöringsfaktorn.

Antag funktionen $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ vara bijektiv med inversen $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$. Då är $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y})) \forall \mathbf{y}$, där funktionalmatrisen är enhetsmatrisen samt funktionaldeterminanten lika med 1. Satsen ger då

$$1 = \det \mathbf{f}'(\mathbf{x}) \cdot \det \mathbf{g}'(\mathbf{y}) = \frac{d(\mathbf{y})}{d(\mathbf{x})} \cdot \frac{d(\mathbf{x})}{d(\mathbf{y})}. \quad (24)$$

Av detta återfås att inversens funktionaldeterminant är det reciproka värdet av funktionens funktionaldeterminant enligt

$$\frac{d(\mathbf{x})}{d(\mathbf{y})} = \frac{1}{\frac{d(\mathbf{y})}{d(\mathbf{x})}}. \quad (25)$$

5 Kap 3.4 Implicita givna funktioner

Nivåkurvor kan se ut på många olika sätt. Studerar man $xy = 1$ ser man att den går att uttrycka som funktionsgrafen $y = 1/x$. Däremot finns det nivåkurvor som inte utgör någon funktionsgraf, som till exempel en cirkel $x^2 + y^2 = 1$ då det kan finnas flera y -värden för ett givet x . Däremot kan man skapa en explicit funktion i en omgivning av (a, b) , till exempel $y = \sqrt{1 - x^2}$ för den positiva (övre) halvan av cirkeln.

Det kommer även naturligt att fråga om det går att derivera funktionen i en sådan omgivning. Om vi antar en nivåkurva av en funktion F som tar värden x och y , där y beror av x , får vi genom implicit derivering

$$\begin{aligned} F(x, f(x)) &= C \\ F'_x(x, f(x)) \cdot 1 + F'_y(x, f(x)) \cdot f'(x) &= 0 \implies \\ f'(x) &= -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}. \end{aligned}$$

Detta leder till implicita funktionssatsen.

5.1 Sats 3.4.4 (Implicita funktionssatsen, s.148)

Antag $F(x, y) \in C^1, \exists (a, b) : F(a, b) = C$. $\exists$ öppen omgivning U av (a, b) så att $\exists y = f(x) \in C^1$ som definieras implicit av nivåkurvan till U . Då gäller att

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))},$$

förutsatt att $F'_y(a, b) \neq 0$. $\square$

Det finns även möjlighet att kasta om x och y om $F'_y = 0$ och $F'_x \neq 0$, vilket istället ger en funktion $x = g(y)$.