

Sammanfattning läsvecka 2, MVE035

Grupp 2D

Simon Benstorp, David Ek, Liam Falkenström, Filippa Johansson Sporre,
Gustav Johansson och Vidar Petersson

30 januari 2023

1 Föreläsning 5: 23/1

1.1 Variabelbyte i andra ordningens PDE

Betrakta den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

där $c \in \mathbf{R}$, $f \in C^2(\mathbf{R}^2)$. Utför nu variabelbytet

$$\begin{cases} u = x + ct \\ v = x - ct. \end{cases} \quad (2)$$

Enligt kedjeregeln blir första derivatorna således:

- $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$
- $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = c \frac{\partial f}{\partial u} - c \frac{\partial f}{\partial v}$

Nu kan man skriva om den initiala PDE:n: $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} - c^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = \\ &= \left(c \frac{\partial}{\partial u} - c \frac{\partial}{\partial v} \right) \left(c \frac{\partial}{\partial u} - c \frac{\partial}{\partial v} \right) f - c^2 \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) f = \\ &= c^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) - c^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) = \\ &= -4c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Integrering först med avseende på u och sedan med avseende på v ger

$$\frac{\partial f}{\partial v} = g(v) \in C^1 \Rightarrow f(u, v) = G(v) + H(u), \quad (4)$$

där $g(v)$ är integrationskonstanten vid integrering med avseende på u , $G(v)$ är primitiv funktion till $g(v)$ och $H(u)$ är integrationskonstanten vid integrering med avseende på v . Byt därefter tillbaka till (x, t) :

$$f(x, t) = G(x - ct) + H(x + ct) \quad (5)$$

1.2 Taylorutveckling

1.2.1 Taylorutveckling i en variabel

Låt D vara en omgivning kring $x = a$, $f \in C^{k+1}(D)$ och h så litet att $[a - |h|, a + |h|] \subseteq D$. Då gäller att taylorutvecklingen av $f(a + h)$ ges av

$$f(a + h) = \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} h^{k+1}, \quad (6)$$

för något ξ . Första termen är taylorpolynomet av grad k , och andra termen är resttermen.

1.2.2 Utvidgning till fler variabler

Börja med $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$. Vi vill utveckla $f(x, y)$ kring baspunkt (a, b) . Antag $f \in C^{k+1}$. Fixera h_1, h_2 och bilda envariabelfunktionen

$F(t) = f(a + th_1, b + th_2)$, och taylorutveckla F . Antag $t > 0$:

$$F(t) = \sum_{j=0}^k \frac{F^{(j)}(a)}{j!} h^j + \frac{F^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} h^{k+1}, \quad (7)$$

för något $\xi \in (0, t)$. Uttryck derivatorna av F i partiella derivator av f . Med hjälp av kedjeregeln får vi:

$$F^{(j)}(t) = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \right)^j f \quad (8)$$

där $x = a + th_1$ och $y = b + th_2$. Skriv sedan $\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) = \bar{h} \cdot \nabla$, $(a, b) = \bar{a}$ och $(h_1, h_2) = \bar{h}$. Vi får därav att taylorutvecklingen i flera variabler ges av

$$f(\bar{a} + \bar{h}) = F(1) = \sum_{j=0}^k \frac{(\bar{h} \cdot \nabla)^j}{j!} f(\bar{a}) + \frac{(\bar{h} \cdot \nabla)^{k+1}}{(k+1)!} f(\xi), \quad (9)$$

för något $\xi \in (\bar{a}, \bar{a} + \bar{h})$.

2 Föreläsning 6, 24 januari

Att identifiera lokala extrempunkter för funktioner i flera variabler sker principiellt på samma sätt som i en variabel. Man undersöker var derivatan är noll och kontrollerar därefter punktens karaktär med andraderivatan.

2.1 Stationära punkter

Till funktioner i flera variabler kan det finnas extrempunkter av exempelvis typen i figur 1. För att identifiera dessa behöver först möjliga kandidater hittas. Dessa kandidater kallas stationära punkter och är likt i envariabelfallet en punkt där funktionens lutning är 0. I flera variabler är det istället funktionens partiella derivator som är lika med 0 i en punkt $\vec{a}$.

Definition 2.1.1. Om $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$ kallas $\vec{a}$ stationär punkt.

I flera variabler utvidgas definitionen av extrempunkter som det största värdet i en omgivning istället för ett intervall.

Definition 2.1.2. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ har lokalt maximum i $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ om det finns en omgivning Ω av $\vec{a}$ så att $f(\vec{x}) \leq f(\vec{a})$, $\forall \vec{x} \in \Omega$.

Från definition 2.1.1 och 2.1.2 följer satsen:

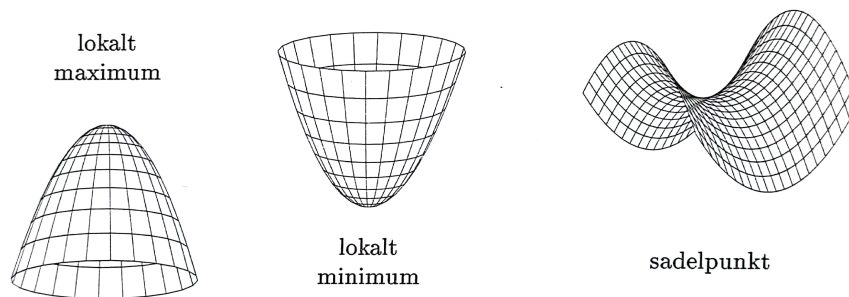
Sats 2.1.1. Om

- $f(\vec{x})$ har lokalt extremvärde i en inre punkt $\vec{a}$ i mängden D och
- f partiellt deriverbar,

då är

- $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$.

Dock ser vi i satsen och vet från envariabelfallet $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ att en stationär punkt nödvändigtvis inte är en extrempunkt. Punkten kan i flera variabler även kan vara en sadelpunkt och därför behöver även funktionens andraderivata undersökas.



Figur 1: Exempel på extrempunkter.

2.2 Klassificera en stationär punkt och kvadratisk form $Q(\vec{x})$

För att härleda klassificeringen av en stationär punkt $\vec{a}$ behöver vi taylorutveckla funktionen enligt avsnitt 1.2.2 till ordning två. För $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2$ vid $\vec{a} = (a, b)$ erhålls då

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \underbrace{(hf'_x + kf'_y)|_{(a,b)}}_{=0} + \frac{1}{2} (h^2 \underbrace{f''_{xx}}_A + 2hk \underbrace{f''_{xy}}_B + k^2 \underbrace{f''_{yy}}_C) |_{(a,b)} + \mathcal{O}(\|\vec{h}^3\|)$$

där vi kan skriva termen med de partiella derivatorna av andra ordningen på *kvadratisk form*

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{1}{2} \underbrace{(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2)}_{Q(\vec{x}) :=} |_{(a,b)} + \mathcal{O}(\|\vec{h}^3\|).$$

Vi inser från definition 2.1.2 att $f(a+h, b+k) - f(a, b) \neq 0$ måste gälla ifall $\vec{a}$ skall vara en strängt lokal extrempunkt. I och med att $Q(\vec{x})$ oftast dominerar $\mathcal{O}(\|\vec{h}^3\|)$ -termen kan vi klassificera $\vec{a}$ genom att enbart studera tecknet på $Q(\vec{x})$. Då erhålls följande definition och sats:

Definition 2.2.1. En kvadratisk form $Q(\vec{x})$ är:

- Positivt definit om $Q(\vec{x}) > 0, \quad \forall \vec{x} \neq \vec{0}$.
- Negativt definit om $Q(\vec{x}) < 0, \quad \forall \vec{x} \neq \vec{0}$.
- Indefinit om $Q(\vec{x})$ antar både positiva och negativa värden eftersom det i så fall inte är säkert att $Q(\vec{x})$ dominerar resttermen.
- Semidefinit om $Q(\vec{x})$ kan anta 0.

Sats 2.2.1. För $Q(\vec{x})$

- Positivt definit $\Rightarrow \vec{a}$ strängt lokalt min.
- Negativt definit $\Rightarrow \vec{a}$ strängt lokalt max.
- Indefinit $\Rightarrow \vec{a}$ är en sadelpunkt.
- Semidefinit $\Rightarrow$ Ytterligare inspektion krävs.

Den ytterligare inspektionen skulle kunna innebära att antingen taylorutveckla en ordning till eller att numeriskt undersöka vad som händer med funktionsvärdet när man tar ett godtyckligt litet steg från punkten.

2.3 Matrisformulering

För funktioner av fler än två variabler kan det bli omständigt att beräkna tecknet på $Q(\vec{x})$. Därför kan det vara användbart att formulera $Q(\vec{x})$ som en matris. Låt $\vec{h}$ vara en kolonnmatris och M en kvadratisk matris med andra ordningens partiella derivator. Då gäller $Q(\vec{h}) = \vec{h}^T M \vec{h}$. Genom att beräkna tecknet på egenvärdena eller använda *Sylvesters test* kan därigenom Q s definit bestämmas. Härledning av detta kommer TM:arna eventuellt gå igenom senare.

Sats 2.3.1. $Q(\vec{h}) = \vec{h}^T M \vec{h}$ är

- Positivt definit $\Leftrightarrow$ alla egenvärden i M positiva.
- Negativt definit $\Leftrightarrow$ alla egenvärden i M negativa.
- Indefinit $\Leftrightarrow M$ har både positiva och negativa egenvärden.
- Semidefinit tillåter egenvärde 0.

2.4 Hessianen

Matrisen M har även ett eget namn och definieras enligt följande:

Definition 2.4.1. För $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kallas matrisen

$$M = \text{Hess}(f) = \begin{pmatrix} f''_{x_1 x_1} & f''_{x_1 x_2} & \cdots & f''_{x_1 x_n} \\ f''_{x_2 x_1} & f''_{x_2 x_2} & \cdots & f''_{x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_n x_1} & f''_{x_n x_2} & \cdots & f''_{x_n x_n} \end{pmatrix}$$

för Hessianen av f .

2.5 Sammanfattning och lösningsmetod.

Nedan följer en sammanfattad lösningsmetod.

1. Identifiera stationära punkter.
 - (a) Beräkna de partiella derivatorna.
 - (b) Undersök deras eventuella nollställen.
 - (c) Erhåll en kandidat $\vec{a}$.
2. Klassificera den stationära punkten
 - (a) Beräkna de partiella derivatorna av andra ordningen och sätt in $\vec{a}$. Erhåll matrisen M , också kallad $\text{Hess}(f)$.
 - (b) Beräkna tecken för M s egenvärden eller använd *sylvesters test* på $\det(M)$ och A .
 - (c) Erhåll ifall $Q(\vec{h})$ är positivt-, negativt-, in-, eller semidefinit genom att jämföra med sats 2.3.1.
 - i. Positivt $\Rightarrow$ sträng min.
 - ii. Negativt $\Rightarrow$ sträng max.
 - iii. Indefinit $\Rightarrow$ sadelpunkt.
 - iv. Semidefinit $\Rightarrow$ Ytterligare undersökning krävs.
3. Erhåller en punkt och dess karaktär.

3 Föreläsning 7, 26 januari

3.1 Vektorvärda funktioner

Under första läsveckan i kursen flervariabel analys har vi främst tittat på funktioner av typen $f : R^n \rightarrow R$, så kallade skalärvärda funktioner. Dessa funktioner tar en vektor och ger tillbaks ett reellt värde. Denna veckan har vi utvidgat funktionsbegreppet ytterligare och kollat på när även funktionsvärdet är en vektor. Ett enkelt exempel är: $\vec{f}(t) = (x(t), y(t))$, som lämpligen skulle kunna tolkas som en partikels position i x- och y-led med avseende på tiden t . Generellt kan man skriva en funktion $f : R^n \rightarrow R^m$, där $m > 1$ som $\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$.

3.2 Funktionalmatris

I fallet för skalärvärda funktioner har vi sett att derivatan delas upp i partiella derivator och kan samlas i en vektor som kallas för gradient: $\nabla f(x_1, \dots, x_n) = (f'_{x_1}, \dots, f'_{x_n})$. Men när vi ska derivera en vektorvärd funktion blir uttrycket större då varje partiell derivata i sin tur har sina egna partiella derivator. Tag exempelvis funktionen $\vec{f}(s, t) = (f_1(s, t), f_2(s, t))$. De partiella derivatorna blir därmed:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial s} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial s}, \frac{\partial f_2}{\partial s} \right), \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}, \frac{\partial f_2}{\partial t} \right). \quad (10)$$

För att samla ihop alla derivator kan vi här använda matriser, därav funktionalitetsmatris. I fallet med exemplet ovan blir funktionalitetsmatrisen:

$$\vec{f}'(s, t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s} & \frac{\partial f_1}{\partial t} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s} & \frac{\partial f_2}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Generellt får vi att en vektorvärd funktion $\vec{f}: R^n \rightarrow R^m$ har funktionalitetsmatrisen:

$$\vec{f}'(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Fördelen med att samla alla derivator i en matris på detta viset är att varje rad i representerar ∇f_i och varje kolonn j representerar $\vec{f}'_{x_j}(\vec{x})$.

3.2.1 Användningsområde

Funktionalmatrisen kan användas för att approximera funktionen nära en given punkt.

3.3 Funktionalsdeterminant

Funktionaldeterminanten för en funktion definieras som determinanten för funktionalmatrisen:

$$\det \vec{f}'(\vec{x}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Observera att funktionalmatrisen måste vara kvadratisk, alltså en funktion $f: R^n \rightarrow R^n$, för att determinanten skall existera.

3.3.1 Användningsområde

Funktionaldeterminanten kan användas för att beskriva area- och volymförändringar hos en funktion.

3.4 Kedjeregeln

Under första veckan kollade vi på tre olika steg av kedjeregeln för flervariabla funktioner, under denna vecka generaliserades kedjeregeln för att gälla för alla fler variabla funktioner. För att formulera det allmänna fallet av kedjeregeln för funktioner av flera variabler definieras följande: Låt $\vec{g}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$, $\vec{f}: \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^m$ vara differentierbara funktioner. Antag sedan att $\vec{a} \in \mathbf{R}^n$ är en inre punkt i $\mathbf{D}(\vec{g})$ och $\vec{g}(\vec{a})$ är en inre punkt i $\mathbf{D}(\vec{f})$. Låt

$$\bar{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^n, \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^p, \bar{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{t}}) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_p(t) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^p$$

Komponent i av sammansättningen $\bar{\mathbf{f}} \circ \bar{\mathbf{g}}$ ges då av $(\bar{\mathbf{f}} \circ \bar{\mathbf{g}})_i(\bar{\mathbf{t}}) = \mathbf{f}_i(\bar{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{t}}))$ där $\mathbf{f}_i : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}$ så steg 3 i kedjeregeln ger differentierbarhet och således

$$\frac{\partial}{\partial t_j} (\bar{\mathbf{f}} \circ \bar{\mathbf{g}})_i(\bar{\mathbf{t}}) = \nabla \mathbf{f}_i(\bar{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{t}})) \bullet \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{t}})}{\partial t_j} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_i}{\partial x_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial t_j} \end{bmatrix}$$

Detta motsvarar rad i och kolonn j av funktionalmatrisen $(\bar{\mathbf{f}} \circ \bar{\mathbf{g}})'(\bar{\mathbf{t}})$. Läger man ihop detta $\forall i, j$ får man den allmänna formeln för kedjeregeln för funktioner av flera variabler:

$$\textbf{Kedjeregeln} \\ (\bar{\mathbf{f}} \circ \bar{\mathbf{g}})'(\bar{\mathbf{t}}) = \bar{\mathbf{f}}'(\bar{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{t}})) \times \bar{\mathbf{g}}'(\bar{\mathbf{t}})$$

3.5 Inversa funktionssatsen

I specialfallet där $m = n$, alltså där $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, det vill säga ett n -dimensionellt vektorfält. Om $\mathbf{f}$ är differentierbar i $\bar{\mathbf{a}} \in \mathbf{R}^n$ är $\bar{\mathbf{f}}'(\bar{\mathbf{a}})$ en $n \times n$ -matris så medför det att $\det(\bar{\mathbf{f}}'(\bar{\mathbf{a}})) \neq 0$. Vi formulerar utifrån detta den inversa funktionssatsen.

Sats 3.3.2 Låt $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n, \bar{\mathbf{f}} \in C^1(\mathbf{D}), \bar{\mathbf{a}} \in \mathbf{D}$ sådan att $\det(\bar{\mathbf{f}}'(\bar{\mathbf{a}})) \neq 0$
Då finns det öppna omgivning $\mathbf{U}$ kring $\bar{\mathbf{a}}$ och $\mathbf{V}$ kring $\bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{a}})$ sådana att
 $\bar{\mathbf{f}} : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{V}$ är bijektiv
 $\bar{\mathbf{f}}^{-1} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{U}$ är en C^1 -funktion

Det är dock värt att observera att bara för att $\det(\bar{\mathbf{f}}'(\bar{\mathbf{a}})) \neq 0 \forall \bar{\mathbf{x}} \in D(\bar{\mathbf{f}})$ så behöver inte nödvändigtvis $\mathbf{f}$ vara injektiv på hela $\mathbf{D}(\bar{\mathbf{f}})$.

Denna determinant $(\det(\bar{\mathbf{f}}'(\bar{\mathbf{a}})))$ kallas för funktionaldeterminanten eller Jacobideterminanten.

Denna kan även betecknas med: $\frac{d(\bar{\mathbf{f}})}{d(\bar{\mathbf{x}})}$ eller $\frac{d(f_1, \dots, f_n)}{d(x_1, \dots, x_n)}$

4 Föreläsning 8, 26 januari

Föreläsning åtta behandlar koordinatbyten och introducerar ett viktigt resultat inom analysen: Implicita funktionssatsen.

4.1 Koordinatbyten

När man arbetar med samband och funktioner i $\mathbb{R}^n$ kan det i många situationer vara fördelaktigt att genomföra ett koordinat/variabel-byte. Exempelvis kan ett koordinatbyten användas för att

transformera partiella differentialekvationer till en form där det är enklare att finna lösningar. Nyttan av koordinatbyten sträcker sig även till andra vetenskaper, inom mekaniken kan det till exempel vara fördelaktigt att använda polära koordinater när man beskriver en cirkelrörelse.

Låt oss nu betrakta ett godtyckligt koordinatbyte i $\mathbb{R}^n$

$$(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow (y_1, \dots, y_n) \quad (14)$$

Om man uttrycker de nya variablerna i de gamla

$$\begin{cases} y_1 &= y_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots & \vdots \\ y_n &= y_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

kan detta betraktas som en funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ där $\bar{y} = \bar{f}(\bar{x})$. För att koordinatbytet ska ha praktisk användning krävs att det kan inverteras (d.v.s. f är inverterbar), om detta inte uppfylls förloras information under koordinatbytet. Enligt inversa funktionssatsen (se föreläsning 7) är f inverterbar i en omgivning av $\bar{a} \in \mathbb{R}^2$ om $\det(\bar{f}'(\bar{x})) \neq 0$, d.v.s. för att koordinatbytet ska ses som giltigt krävs att $\det(\bar{f}'(\bar{x})) \neq 0$.

4.1.1 Inversa koordinatbyten

Under förutsättning att $\bar{f}'(\bar{x})$ är inverterbar kan vi (för en omgivning av $\bar{a} \in \mathbb{R}$) definiera inversen $\bar{x} = \bar{f}^{-1}(\bar{y})$. Sammansättningen $\bar{y} = (\bar{f} \circ \bar{f}^{-1})(\bar{y})$ har identitetsmatrisen I som funktionalmatris och därmed även funktionaldeterminanten $\det(I) = 1$. Till följd av detta kan det observeras att

$$\det(I) = 1 = \det(\bar{f} \circ \bar{f}^{-1})' = \det \bar{f}'(\bar{x}) \det \bar{f}'^{-1}(\bar{y}) = \frac{d(\bar{y})}{d(\bar{x})} \frac{d(\bar{x})}{d(\bar{y})} \quad (15)$$

ur vilket sambandet

$$\frac{d(\bar{x})}{d(\bar{y})} = \frac{1}{\frac{d(\bar{y})}{d(\bar{x})}} \quad (16)$$

kan avläsas. På likande sätt kan även sambandet

$$\frac{\partial(\bar{x})}{\partial(\bar{y})} = \left(\frac{\partial(\bar{y})}{\partial(\bar{x})} \right)^{-1} \quad (17)$$

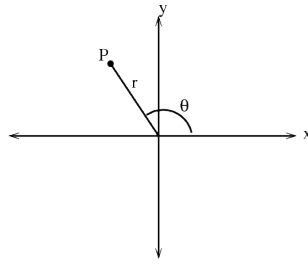
härledas.

4.1.2 Polära koordinater i $\mathbb{R}^2$

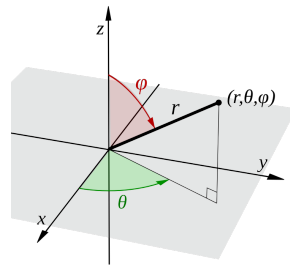
Låt oss betrakta koordinatbytet från kartesiska till polära koordinater, se figur 2 för att se hur r och θ är definierade.

Om vi uttrycker x och y i termer av r och θ får vi

$$\begin{cases} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{cases}$$



Figur 2: r och θ i det kartesiska koordinatsystemet.



Figur 3: r , θ och ϕ i det kartesiska koordinatsystemet.

där vi genom att beräkna funktionaldeterminanten kan undersöka variabelbytets giltighet.

$$\frac{d(x, y)}{d(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

Determinanten är alltså nollskild för alla punkter förutom i origo, d.v.s. variabelbytet är giltigt i en omgivning av $\bar{a}$ då $r \neq 0$. Observera även att variabelbytet även kan ske åt motsatt håll, från polära till kartesiska koordinater.

4.1.3 Sfäriska koordinater i $\mathbb{R}^3$

Låt oss definiera de sfäriska koordinaterna enligt figur 3, då kan vi uttrycka relationen mellan kartesiska och sfäriska koordinater enligt

$$\begin{cases} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{cases}$$

Genom att beräkna funktionaldeterminanten finner man att determinanten är noll då θ är 0 eller π radianer, d.v.s. koordinatbytet är ej giltigt då på z-axeln.

4.2 Implicita funktionssatsen

Vi ställer frågan: givet en *implicit definierad* funktion $F(\vec{x})$, alltså ett samband som relaterar variabler till varandra utan att explicit lösa ut en variabel (t.ex $x - ye^y = 0$, definierar y som funktion av x implicit) – när *kan vi* hitta ett explicit uttryck för $y = f(x)$?

Sats 3.4.3 (Implicita funktionssatsen, IFS)

Låt $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vara $\mathcal{C}^1$. Låt A vara en punkt på nivåkurvan $F(\vec{x}) = C$ där $C \in \mathbb{R}$.

Om $\left. \frac{\partial F}{\partial x_k} \right|_A \neq 0$ finns någon öppen omgivning V till A på vilken gäller att restriktionen av nivåkurvan till värden i V implicit definierar en $\mathcal{C}^1$ -funktion $f : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ för vilken gäller att:

$$\begin{cases} x_k = f(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ \frac{\partial}{\partial x_j} f_k = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}}{\frac{\partial F}{\partial x_k}} \end{cases}$$

En tolkning av satsen ovan är att om vi har en implicit definierad $\mathcal{C}^1$ -funktion så kan vi välja att kolla på en punkt där derivatan m.a.p. vår beroende variabel x_k är nollskiljd. Då garanterar IFS att vi kan beräkna derivator på någon lämplig (naturligtvis öppen) ε -omgivning till punkten i fråga – dessutom fås en formel för dessa derivator. I praktiken vänder man sig till emellertid sällan till formeln, utan deriverar implicit som vanligt.