

Flervariabelanalys LV1

Elias Asp, Ludvig Granath, Marcus Grandin, Einar Schoon
Elsa Zachrisson

28 januari 2023

1 Föreläsning 1

1.1 Notation

Fältet flervariabelanalys kretsar kring funktioner definierade som

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (1)$$

för positiva heltal m och n , där $n = 1$ är specialfallet envariabelanalys vi studerat i tidigare kurser. Vi säger att f är en funktion av n variabler. Om $m = 1$ är det en **skalärvärd funktion** och om $m > 1$ är det en **vektorvärd funktion**. Vektorvärda funktioner kan reduceras till en mängd skalärvärda funktioner, alla av lika många variabler, så oftast studeras skalärvärda funktioner. Om $m = n$ kan funktionen tolkas som ett **n -dimensionellt vektorfält**.

1.2 Derivatan

I envariabelanalysen har det funnits tre formuleringar för derivatan, som nu generaliserades till olika begrepp. Den första formuleringen var att funktionen f är deriverbar i $a \in \mathbb{R}$ om

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (2)$$

existerar, och derivatan är isåfall gränsvärdet. Denna formulering generaliserades till flervariabelanalysens **riktningsderivata**, och specialfallet **partiell derivata** längs riktningar parallella med koordinataxlarna. Den partiella derivatan till f i $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ är i x -led respektive y -led:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}. \end{aligned} \quad (3)$$

Dessa partiella derivator beräknas genom att betrakta den variabel vars axel inte deriveras kring som en konstant, och sedan derivera som vi lärt oss i kurserna i envariabelanalys.

Under föreläsningen gicks det också igenom de två andra formuleringarna för derivatan i envariabelanalys, men de generaliserades inte förräns nästa föreläsning. Den alternativa

definitionen är att f är deriverbar i $a \in \mathbb{R}$ om det finns en konstant $A \in \mathbb{R}$ och en funktion $\rho(h)$ så att

$$f(a+h) = f(a) + Ah + h\rho(h) \quad (4)$$

och $\rho(h) \rightarrow 0$ då $h \rightarrow 0$. Här är A värdet för derivatan i a .

2 Föreläsning 2

2.1 Differentierbarhet

Under föreläsningen presenterades två sätt att definiera differentierbarhet. Grafiskt kan differentierbarhet definieras genom att funktionen f är differentierbar i (a, b) om det finns ett unikt plan som tangerar f i punkten. Formellt definieras differentierbarhet som att f är differentierbar om det finns två konstanter A och B , samt en funktion $\rho(h, k)$ så att $\rho(h, k) \rightarrow 0$ då $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ som uppfyller sambandet

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + Ah + Bk + \left| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right| \rho(h, k). \quad (5)$$

Är funktionen differentierbar, det vill säga om dessa krav uppfylls, så är konstanterna funktionens partiella derivator, $A = \frac{\partial}{\partial x} f(a, b)$ och $B = \frac{\partial}{\partial y} f(a, b)$. Utifrån ekvationen ovan kan tangentplanet uttryckas genom

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) - (z - z_0) = 0 \quad (6)$$

där A och B är de partiella derivatorna, precis som ovan, $x_0 = a$, $y_0 = b$ och $z_0 = f(a, b)$.

Då har planet normalvektorn $\begin{pmatrix} A \\ B \\ -1 \end{pmatrix}$ och går genom punkten $(a, b, f(a, b))$. Likt för deriverbarhet i en variabel, implicerar differentierbarhet att en funktion är kontinuerlig.

2.2 Visa differentierbarhet

Under föreläsningen visades två metoder som kan användas för att visa differentierbarhet. Först och främst kan funktionens partiella derivator räknas ut, vilket ger konstanterna A och B . Sedan kan uttrycket för $f(a+h, b+k)$ ovan skrivas om till

$$\rho(h, k) = \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - Ah - Bk}{\sqrt{h^2 + k^2}}. \quad (7)$$

Om $\rho(h, k) \rightarrow 0$ då $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ när de partiella derivatorna sätts in som värden på A och B är funktionen differentierbar, det kan dock vara enklare att använda en annan metod som visades. Först infördes följande notation; f tillhör klassen $\mathcal{C}^1(D)$ om alla funktionens partiella derivator är kontinuerliga i D . Sedan introducerades en sats som sade att om f tillhör klassen $\mathcal{C}^1(D)$ är f differentierbar i D .

3 Föreläsning 3

3.1 Kedjeregeln för sammansatta funktioner av en variabel

Vi kommer ihåg kedjeregeln för sammansatta funktioner av en variabel:

$$(f \circ g)' = \frac{d}{dt}f(g(t)) = f'(g(t))g'(t) \quad (8)$$

3.2 Sammansättningar i flera variabler

Låt $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ och $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$, då får vi $f \circ g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Vi har då att:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_p) &= [f_1(x_1, \dots, x_p), \dots, f_m(x_1, \dots, x_p)], \\ g(t_1, \dots, t_n) &= [g_1(t_1, \dots, t_n), \dots, g_p(t_1, \dots, t_n)]. \end{aligned} \quad (9)$$

Låter vi $\vec{t} = (t_1, \dots, t_n)$ får vi att:

$$f \circ g(\vec{t}) = [[f_1(g_1(\vec{t}), \dots, g_p(\vec{t})), \dots, [f_m(g_1(\vec{t}), \dots, g_p(\vec{t}))]]]. \quad (10)$$

3.3 Generalisering av kedjeregeln

Generaliseringen av kedjeregeln för sammansatta funktioner av flera variabler gör vi om fyra steg, går igenom 3 av dessa steg denna föreläsning.

1. $n \geq 1, p = 1$ och $m = 1$
2. $n = 1, p \geq 1$ och $m = 1$
3. $n \geq 1, p \geq 1$ och $m = 1$
4. $n \geq 1, p \geq 1$ och $m \geq 1$

Antagande 1: $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ och $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ är differentierbara och $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ sådana att:

1. $\vec{a}$ är en inre punkt i $D(g)$
2. $g(\vec{a})$ är en inre punkt i $D(f)$

Steg 1: Under **Antagande 1** gäller att: $f \circ g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ är differentierbar i $\vec{t} = \vec{a}$ och att:

$$\frac{\partial}{\partial t_j} f(g(\vec{t})) \Big|_{\vec{t}=\vec{a}} = f'(g(\vec{t})) \frac{\partial}{\partial t_j} g \Big|_{\vec{t}=\vec{a}} \quad (11)$$

Vilket följer direkt av kedjeregeln för en variabel, ty $\frac{\partial}{\partial t_j} = \frac{d}{dt}$ om man tolkar de andra variablerna av t som konstanta.

Steg 2: Vi har $\vec{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$, $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, då $f \circ \vec{g}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Notera att $\vec{g}$ är en vektorvärd funktion. Under **Antagande 1** gäller att:

$$\frac{d}{dt} f(\vec{g}(t)) = \nabla f(\vec{g}(t)) \cdot \frac{d\vec{g}}{dt} \quad (12)$$

Alternativt låter vi $u(\vec{x}) = u(x_1, \dots, x_p)$ och $\vec{x} = \vec{x}(t)$ då har vi att:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_p} \frac{dx_p}{dt} \quad (13)$$

Steg 3: Nu har vi att $\vec{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ och $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, då $f \circ g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ och under **Antagande 1** har vi att:

$$\frac{\partial}{\partial t_j} f(\vec{g}(\vec{t})) = \nabla f(\vec{g}(\vec{t})) \cdot \frac{\partial \vec{g}}{\partial t_j}, \quad \forall k = 1, \dots, n \quad (14)$$

vilket följer av **Steg 2** p.s.s. som **Steg 1** följer av kedjeregeln i en variabel, d.v.s vanlig derivata med avseende på t_j om vi tolkar de andra variablerna av t som konstanter.

3.4 Variabelbyten för partiella differentialekvationer

Om man ser f som en funktion av koordinater i planet och gör variabelbytet $(x, y) \mapsto (u, v)$ så kan man beskriva f som:

$$\tilde{f}(u, v) = \tilde{f}(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y). \quad (15)$$

Då kan man uttrycka $\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$ i $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}$ och $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}$ som:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \tilde{f}(u(x, y), v(x, y)) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (16)$$

4 Föreläsning 4

4.1 Gradient

Gradienten är en vektor i flera variabler innehållande respektive partiell derivata. Gradienten kan visa hur en funktion i flera variabler beter sig lokalt och defineras enligt

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \quad (17)$$

där $\nabla f(x)$ är en funktion i $\mathbb{R}^n$. Sats 2.4.5 ger att en $\mathcal{C}^1$ -funktion $f(x)$ definierad på mängden $D \subseteq \mathbb{R}^n$ är konstant då $f(x) = 0, \forall x \in D$, där D är en öppen och bägvis sammanhängande mängd.

4.2 Riktningsderivata

För att undersöka hur i vilken riktning en funktion ökar som mest samt hur stor denna tillväxttakt är använder vi oss av riktningsderivatan. Riktningsderivatan definieras som derivatan av funktionen $f(x)$ i punkten a med normalvektorn $\bar{v}$ enligt

$$f'_a(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t\bar{v}) - f(a)}{t}. \quad (18)$$

Sats 2.4.6 ger att om att en differentierbar funktion $f(x)$ och en normerad riktningsvektor $\bar{v}$ så är $f'_a(x) = \nabla f(a)\bar{v}$. Sats 2.4.7 säger vidare att $\nabla f(a)$ är riktad åt det håll som funktionen ökar som snabbast utifrån punkten a , samt att funktionen ökar med $\|\nabla f(a)\|$ i denna riktning. Alltså är riktningsderivata och gradient bra verktyg inom olika optimeringsproblem för att till exempel för att hitta lokala max- och minpunkter på kompakta områden.

4.3 Gradientens geometriska tolkning

Om $f(x, y)$ antas vara en $\mathcal{C}^1$ -funktion där en punkt (a, b) som ligger på en nivåkurva $f(x, y) = C$ så får vi, med hjälp av kedjeregeln, att $\nabla f(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) = 0$, där (x, y) parametreras med avseende på t enligt $(x, y) = (x(t), y(t))$. Slutsatsen från denna geometriska tolkning är att ∇f är ortogonal till tangenten av nivåytan C .

4.4 Partiella derivator av högre ordning

Om de partiella derivatorna av en funktion $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ också är partiellt deriverbara kan man bilda

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \quad (19)$$

för $j, k = 1, \dots, n$. Dessa partiella derivator av *andra ordningens* kan man beteckna med olika skrivsätt som t.ex.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}, \quad f''_{x_j x_k}, \quad f_{x_j x_k}. \quad (20)$$

Om $j = k$ kan man skriva om det som

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}. \quad (21)$$

Likaså defineras och formuleras högre ordningens derivator där ordningen bestäms av antalet derivationer. Exempelvis är uttrycket

$$\frac{\partial^6 f}{\partial x_1^2 \partial x_2^2 \partial x_3^2} \quad (22)$$

en derivata av sjätte ordningen.

Observera att vanligtvis brukar $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ etc.

4.5 Sats 2.5.9

För varje funktion $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ av klass $\mathcal{C}^2$ gäller att

$$f''_{x_j x_k} = f''_{x_k x_j}. \quad (23)$$

Det innebär i vardagsspråk att partiella derivator av högre ordning är kommutativa med andra ord ordningen kan kastas om på dem men uttrycket är ändå detsamma. Det kan även skrivas som t.ex.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}. \quad (24)$$