

Tavelpresentation LV3

Sofia Templin, Stina Robertsson, Filip Björnåsen, Hugo Johansson

Januari 2023

1 Dubbelintegraler

Funktioner av flera variabler har inte, till skillnad från funktioner av en variabel, endast *en* derivata. Därmed finns ingen uppenbar generalisering av primitiv funktion till en funktion av flera variabler. I denna sammanfattning diskuteras endast dubbelintegraler, det vill säga integraler av kontinuerliga funktioner $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ på en kompakt mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Dessa betecknas

$$\iint_D f \, dx dy.$$

För att lösa integraler i det flerdimensionella fallet, krävs andra tekniker än i det endimensionella fallet. Följande tekniker för att lösa dubbelintegraler kommer att beskrivas

- (a) Inspektion
- (b) Fubinis sats
- (c) Variabelbyte
- (d) Nivåkurvor

1.1 Inspektion

Vid inspektion utnyttjas följande iakttagelser, som kan göras utan att beräkna själva integralen.

- (i) Integration är en linjär operation

$$\iint_D (\alpha f + \beta g) \, dx dy = \alpha \iint_D f \, dx dy + \beta \iint_D g \, dx dy.$$

- (ii) Medelvärdet av f på D

$$\frac{1}{\mu(D)} \iint_D f \, dx dy$$

där $\mu(D) = \iint_D 1 \, dxdy$ är arean av D .

(iii) Uppdelning av området D i delområden

$$D = D_1 \cup D_2.$$

Då det finns ett givet samband mellan D_1 och D_2 kan slutsatser om integralens lösning dras utan att beräkning krävs. Till exempel om f är en udda funktion och D är symmetrisk i $(0,0)$ m.a.p. x , kan D delas i de två delarna D_1 och D_2 i linjen $x = 0$. Det går då att inse att $\iint_{D_1} f \, dxdy = -\iint_{D_2} f \, dxdy$ och därmed att $\iint_D f \, dxdy = \iint_{D_1} f \, dxdy + \iint_{D_2} f \, dxdy = 0$. Inspektionsmetoden kan alltså ge lösning till en dubbelintegral utan att beräkning krävs.

1.2 Fubinis sats

Fubinis sats är en metod för att beräkna dubbelintegraler i $\mathbb{R}^2$. Satsen tillåter oss att beräkna över alla reguljära områden:

Def: Ett område D kallas reguljärt i x -led om det kan delas i ändligt många delområden $D_1, \dots, D_n$ där

$$D_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a_i \leq x \leq b_i, \alpha_i(x) \leq y \leq \beta_i(x)\}$$

$$a_i, b_i \in \mathbb{R} \text{ och } a_i \leq b_i \text{ samt } \alpha_i(x), \beta_i(x) \in C^1([a_i, b_i])$$

Definitionen är analog över y -led och ett område som är reguljärt över både x -led och y -led kallas reguljär.

Med denna definition kan nu Fubinis sats användas över ett av dessa delområden:

$$\text{Låt } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

$$\text{och } f : D \rightarrow \mathbb{R} \text{ där } f \in C^0(D)$$

Då gäller:

$$\iint_D f(x, y) \, dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \, dy \right) dx \quad (1)$$

Satsen tillåter oss därför att beräkna dubbelintegraler som två separata enkelnintegraler genom att betrakta den yttre variabeln som konstant i uträkningarna av den inre integralen.

1.3 Variabelbyten

För att lösa en dubbelintegral kan ett variabelbyte ibland vara användbart. Om vi har en dubbelintegral över ett område D och en funktion $f(x, y)$

$$\iint_D f(x, y) \, dxdy$$

kan vi göra ett variabelbyte där x och y ersätts med funktioner av u och v

$$\begin{cases} x = g(u, v) \\ y = h(u, v) \end{cases}.$$

Denna avbildning måste vara bijektiv och C^1 -klass (första ordningens kontinuerlig derivata). Området D som integreras över behöver även ändras till en ny mängd E för att integralen ska behålla värdet. E är en mängd i uv -planet och D är en mängd i xy -planet. Ytterligare så måste E och D vara öppna, begränsade och kvadrerbara. Jacobianen

$$J(u, v) = \frac{d(x, y)}{d(u, v)}$$

måste även vara nollskild i E . Integralen efter variabelbyte blir

$$\iint_E f(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| du dv$$

förutsatt att funktionerna är integrerbara över områdena.

1.4 Nivåkurvor

Integration med hjälp av nivåkurvor genomförs enligt följande sats:

Låt $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara C^1 , $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara C^0 och $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en kompakt och kvadrerbar mängd. Antag att $a \leq g(x, y) \leq b, \forall (x, y) \in D$. Låt $A(u) = \mu(\{(x, y) \in D : g(x, y) \leq u\})$. Då gäller

$$\iint_D h(g(x, y)) dx dy = \int_a^b h(u) \cdot A'(u) du. \quad (2)$$

Detta innebär att dubbelintegralen kan skrivas om till en enkelintegral om integrandens form tillåter omskrivningen till en variabel ($h(g(x, y)) = h(u)$) samt att arean av definitionsmängden efter variabelbytet ($A(u)$) går att räkna ut explicit (vanligen om $g(x, y)$ ingår i definieringen av D).

1.5 Generaliserade integraler

$\iint_D f(x, y) dx dy$ är generaliserad om

- (i) D är ett begränsat område men f är obegränsad på D
- (ii) D är ett obegränsat område

Om integralen är generaliserad på flera sätt behöver den delas upp i delintegraler som endast är generaliserade på ett sätt. För att sedan lösa integralen skapas en följd av delområden $D_n \subseteq D_{n+1}$ så att $D_n \rightarrow D$ då $n \rightarrow \infty$. För typ (i) fås D_n genom att skära närmare och närmare den obegränsade punkten och för typ (ii) fås D_n genom att inkludera större och större men fortsatt begränsade delar av D . Notera att typ (ii) måste vara absolutkonvergent för att kunna lösas på detta sätt.