

SAMMANFATTNING AV FLERVARIABELANALYS

ALVIN LARSSON BRINGHOLM

LUDVIG ERIKSSON

ALMA HADZIMURATOVIC

ANTON JARETUN

ELSA STENBERG

LÄSVECKA 3 LP3 2022/2023

Dubbelintegraler

Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara kontinuerlig och $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Dubbelintegralen $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$ tolkas som volymen med tecken, mellan grafen $z = f(x, y)$ och området D , i xy -planet.

Den formella definitionen bygger på idén att dela in D i små rektanglar och summera volymen av rätblocken de bildar, där $dV = f(x, y) \, dx \, dy$.

Inspektion

Ett sätt att beräkna dubbelintegraler är genom inspektion. Där utnyttjas följande egenskaper:

- Dubbelintegralens betydelse, dvs. volym med tecken.
- Symmetrier, t.ex. att en funktion som är udda med avseende på x och integreras över ett symmetriskt område i x -led, ger integralen 0.
- Linjäritet: $\iint_D (\alpha f + \beta g) \, dx \, dy = \alpha \iint_D f \, dx \, dy + \beta \iint_D g \, dx \, dy$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ konstanter, $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$).

Fubinis sats för axelparallella rektanglar

En annan teknik för att beräkna dubbelintegraler är genom användning av Fubinis sats.

Def. Låt $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ så att $a \leq b$ och $c \leq d$. Mängden $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} = [a, b] \times [c, d]$ kallas en axelparallell rektangel i planet.

Sats. Låt $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ axelparallell rektangel och $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ kontinuerlig. Då gäller

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Anmärkningar:

- Variabeln som ej integreras över betraktas som konstant.
- Integration över x först eller y först ger samma resultat, men beräkningstekniskt kan skillnaden bli stor.

Notationsmässigt skrivs parenteser sällan ut; integralen läses inifrån och ut.

Fubinis sats för reguljära områden

Fubinis sats kan även utvidgas till mer generella områden än axelparallella rektanglar, närmare bestämt reguljära områden.

Def. Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara kompakt. D kallas reguljärt i x -led om D kan delas upp i ändligt många delområden $D_1, \dots, D_n$ på formen

$$D_i = \{(x, y) \mid a_i \leq x \leq b_i, \alpha_i(x) \leq y \leq \beta_i(x)\},$$

där $\alpha_i, \beta_i \in C^1$ och $\alpha_i(x) \leq \beta_i(x)$ för alla $x \in [a_i, b_i]$.

Anmärkning. Ett reguljärt område i y -led definieras analogt. Ett område sägs vara reguljärt om det är reguljärt i både x - och y -led.

Sats. Låt

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

med $\alpha, \beta \in C^1$ och låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ vara kontinuerlig. Då gäller

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Med ovanstående sats kan en dubbelintegral över ett reguljärt område beräknas genom att tillämpa satsen på varje delområde och sedan summera bidragen.

Nollmängder

En mängd $N \subset \mathbb{R}^2$ kallas för en nollmängd om man för alla tal $\epsilon > 0$ kan täcka N med ändligt många axelparallella rektanglar vars totala area är högst ϵ . Om randen ∂D av en mängd D är en nollmängd kallas D kvadrerbar.

Variabelbyten

Likt med envariabelintegraler kan variabelbyten genomföras även i dubbelintegraler för att på olika sätt förenkla integralberäkningen. Nedanstående sats sammanfattar förfarandet vid variabelbyte i dubbelintegraler. Notera även att teorin naturligt generaliserar till fler variabler.

Sats. Betrakta den kontinuerliga funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ och låt

$$\varphi(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{bmatrix}$$

vara en vektorvärd bijektiv C^1 -funktion som beskriver ett koordinatbyte mellan variablerna (x, y) och (u, v) . Låt vidare området $D \subseteq \mathbb{R}^2$ i xy -planet avbildas på området $E \subseteq \mathbb{R}^2$ i uv -planet, det vill säga $\varphi(E) = D$, och antag att D och E båda är öppna, begränsade och kvadrerbara. Om Jacobideterminanten

$$\frac{d(\varphi)}{d(u, v)} = \frac{d(x, y)}{d(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

vidare är nollskild i hela E gäller

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_E f(u, v) \left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| \, du dv.$$

Satsen kan, precis som i envariabelfallet, tillämpas för att på olika sätt omvandla integranden så att integralen blir mer lättberäknelig med andra integrationstekniker, exempelvis Fubinis sats. Till skillnad från envariabelfallet kan dock även området över vilket vi integrerar påverka svårigheten vid integralberäkningen. Med ett väl valt variabelbyte finns möjligheter att omvandla komplicerade områden till enkla områden såsom axelparallella rektanglar, över vilka det kan vara lättare att tillämpa andra integrationstekniker.

Integration med hjälp av nivåkurvor

Sats. Låt $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara C^1 , $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara C^0 (kontinuerlig), och $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en kompakt och kvadrerbar mängd. Antag att D beskrivs av $a \leq g(x, y) \leq b$. Låt vidare $A(u) = \mu(\{(x, y) \in D \mid g(x, y) \leq u\})$, där μ betecknar arean. Då gäller

$$\iint_D h(g(x, y)) \, dx dy = \int_a^b h(u) A'(u) \, du.$$

Anmärkning. Metoden kräver att integranden har en speciell form, samt att vi kan beräkna $A(u)$ explicit.

Bevisidé. Reducera integralen till en envariabelintegral genom att integrera längs gradienten till h .

Generaliserade integraler

Dubbelintegralen $\iint_D f(x, y) \, dx dy$ kallas generaliserad om

- (i) D är en begränsad mängd men f är obegränsad på D
- (ii) D är en obegränsad mängd

Anmärkning. En integral kan vara begränsad på flera sätt samtidigt.

Generaliserade integraler hanteras allmänt genom att skapa en följd av delmängder $D_n \subseteq D_{n+1}$ där $D_n \rightarrow D$ då $n \rightarrow \infty$ som isolerar problemområdet. De två typerna hanteras enligt följande:

- (i) D_n fås genom att skära bort mindre och mindre delområden av D runt punkterna där $f \rightarrow \pm\infty$
- (ii) D_n fås genom att ta större och större men begränsade delområden av D .

Om f växlar tecken kan gränsvärdet bero på hur man väljer D_n eftersom tecknet gör att integralerna över olika delområden kan ta ut varandra på olika sätt. För $f(x, y) \geq 0$ har vi helt enkelt

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) \, dx dy$$

Ifall man vill hantera f med växlande tecken kan en uppdelning göras av f i två positiva funktioner enligt

$$f = f^+ - f^-,$$

$$\text{där } f^+ = \begin{cases} f(x, y) & \text{då } f(x, y) \geq 0 \\ 0 & \text{då } f(x, y) \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{och } f^- = \begin{cases} -f(x, y) & \text{då } f(x, y) \leq 0 \\ 0 & \text{då } f(x, y) \geq 0 \end{cases}.$$

Med denna kan man bryta upp integralen i en positiv och en negativ del och integrera dessa var för sig enligt

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_D f^+(x, y) \, dx dy - \iint_D f^-(x, y) \, dx dy.$$

Ett väldefinierat värde på denna integral fås endast om båda integralerna konvergerar, d.v.s. att integralen är absolutkonvergent ($|f| = f^+ + f^-$).

Anmärkning.

$$\begin{aligned} & \iint_D |f(x, y)| \, dxdy \text{ konvergerar} \\ \Rightarrow & \iint_D f^+(x, y) \, dxdy \text{ och } \iint_D f^-(x, y) \, dxdy \text{ konvergerar.} \end{aligned}$$