

Grupp 1B skriftlig inlämning för tavelpresentation (Läsvecka 1).

Isak Hulthe, Frank Nissen, Martin Obasi, Melvin Ottosson, Simon Rehn & Ludvig Stigfeldt

7 februari 2023

1 Partiella derivator och notation (föreläsning 1)

Flervariabelanalys baseras på att analysera funktioner av typen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, där funktionen f är en funktion av n variabler. Om $m = 1$ är f skalärvärd, om $m > 1$ är f vektorvärd, och om $m = n$ kan f tolkas som ett n dimensionellt vektorfält. Om funktionen f är vektorvärd kan den göras skalärvärd genom att dela upp den enligt:

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) \quad (1)$$

där $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ i ekvation (1).

När derivatan av en flervariabelfunktion omtalas håller inte längre formuleringen för envariabelsfunktioner (som är ett specialfall av flervariabelfunktioner), då gränsvärden blir knepigare att beräkna. Om $n = 1$ i ekvation (1) finns en riktning, nämligen längs x-axeln. Däremot, om $n = 2$ finns istället ∞ riktningar. Därför brukar derivatan analyseras i en specifik riktning för flervariabelfunktioner. Sådana derivator kallas *riktningsderivator*. Ett specialfall av sådana är *partiella derivator*.

Dessa definieras i enlighet med def. 2.1.1 i kurslitteraturen, sid 46. För enkelhetens skull setts nu $n = 2$, alltså $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. f definieras i en omgivning av (a, b) . De partiella derivatorna till $f(a, b)$ blir då:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} \quad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k}. \quad (3)$$

Alltså betraktas den ena variabeln som konstant. I ekvation (2) är det y som hålls konstant, medan det i ekvation (3) är x .

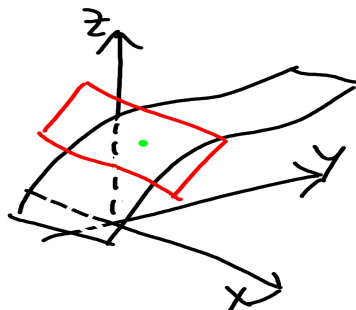
Värt att anmärka är att partiella derivator i sig inte kan antyda differentierbarhet. För detta generaliseras istället de kvotlösa definitionerna (från envariabelsanalysen) istället ges begreppet differentierbarhet (se:).

2 Differentierbarhet (föreläsning 2)

Om en funktion $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är definierad i en omgivning runt en punkt (a, b) och differentierbar i denna punkt (a, b) betyder det att det finns konstanter A, B och det finns en funktion $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ så att $f(x, y)$ uppfyller

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + Ah + Bk + \rho(h, k)\sqrt{h^2 + k^2} \quad (4)$$

där $\rho(h, k) \rightarrow 0$ då $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. Detta kan liknas grafiskt sett som att det finns ett unikt plan som tangerar funktionen $f(x, y)$ i punkten (a, b) . Konstanterna A



Figur 1: Röda planet tangerar den gröna punkten på ekvationen

och B i ekvationen (4) är $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = A$ och $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = B$ vilket kan ses då man sätter antingen h eller k som noll och sedan löser ut A eller B i ekvationen 4.

Som i envariabelsfallet med deriverbarhet så implicerar differentierbarhet i en punkt (a, b) även att funktionen är kontinuerlig i denna punkt. Detta ses enkelt i ekvationen (4) innan då man låter $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. Om en flervariabelsfunktion är differentierbar i (a, b) betyder det också att alla partiella derivator till funktionen existerar i (a, b) .

Att en funktion är differentierbar kan ses genom att alla dess partiella derivator existerar överallt och är kontinuerliga funktioner. Då sägs funktionen tillhöra C^1 .

3 Föreläsning 3

4 Kedjeregeln

Kedjeregeln inom matematisk analys är en regel för hur man hanterar derivering av sammansatta funktioner, alltså funktioner f och x som möjliggör sammansättning $f \circ x$ ($f(x)$). Här kommer kedjeregeln beskrivas utifrån tre olika fall, kedjeregeln i en variabel, flera variabler och hur kedjeregeln fungerar generellt.

4.1 En variabel

För kedjeregeln i en variabel definieras funktionerna f och x , som $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ och $x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, där $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$. Vid derivering av f med avseende på ett godtyckligt

t_j , beräknas detta på följande sätt:

$$\frac{\partial f}{\partial t_j} = \frac{df}{dx} \frac{\partial x}{\partial t_j} \quad (5)$$

4.2 Flera variabel

I fallet där f och x definieras som $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ och $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ och $t \in \mathbb{R}$, räknas den derivatan med avseende på t som följande:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} \quad (6)$$

Formen på ekvation 6 bevisas i sats 4, kapitel 2.3, på sida 66-67, i kurslitteraturen i $\mathbb{R}^2$ och på Canvas under innehåll för läsvecka 1. Att formen ser ut som den gör verkar dock inte helt orimligt. Om man inser att varje $x_1(t)$ till och med $x_n(t)$, involverar den oberoende variabeln t , måste varje funktion deriveras med avseende på den oberoende variabeln. Detta ger en intuitiv känsla över att formens utseende inte verkar helt orimlig.

4.3 Det allmänna fallet

För det allmänna fallet tas idén från de tidigare fallen och kombineras. Funktionerna f och x definieras nu som $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ och $x : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, där $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m$. I detta fall deriveras f med avseende på ett godtyckligt t_j som i första fallet, men t_j påverkar också alla $x_1(\mathbf{t})$ till och med $x_n(\mathbf{t})$ och beräknas därför som följande:

$$\frac{\partial f}{\partial t_j} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_j} \quad (7)$$

5 Gradienter och riktningsderivator (Föreläsning 4)

Gradienten till en funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ är en vektor bestående av funktionens partiella derivator, och den betecknas $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \text{grad}(f)$. Istället för att derivera längs koordinataxlarna kan vi nu hitta derivator i en godtycklig riktning. Med riktningsderivata menas förändringshastigheten i en viss riktning given av en vektor $\hat{\mathbf{u}}$. Riktningsderivatan i en punkt ges av:

$$f_{\hat{\mathbf{u}}} = \nabla f \cdot \hat{\mathbf{u}}$$

Genom att skalärmultiplicera har vi nu blivit av med vektorerna och istället fått en skalär, som motsvarar förändringshastigheten av funktionen i den givna vektorns riktning. Tänk på att vektorn alltid vara en enhetsvektor, d.v.s. längden av den ska vara ett, eftersom vi endast är intresserade av dess riktning.

5.1 Egenskaper för riktningsderivator och gradienter

Eftersom riktningsderivatan är en skalärprodukt kan vi göra ett antal observationer.

$$f_{\hat{\mathbf{u}}} = \nabla f \cdot \hat{\mathbf{u}} = |\nabla f| |\hat{\mathbf{u}}| \cos \theta$$

där θ är vinkeln mellan vektorerna. Eftersom $\hat{\mathbf{u}}$ är en enhetsvektor, har den längd ett. Alltså blir riktningsderivatan störst åt det håll som gradienten i punkten pekar åt, eftersom $\theta = 0$. Gradienten i en punkt pekar alltså åt det håll som vi ska röra oss mot, för att få störst förändring. Minst förändring (störst negativ förändring) får vi i precis motsatt riktning, då vinkeln mellan ∇f och $\hat{\mathbf{u}}$ är $\theta = \pi$.

Gradienten har egenskapen att vara normalvektor till tangerande plan till nivåytor, d.v.s till tangentplan till funktioner på formen, $f(x_1, \dots, x_n) = C$ där $C \in \mathbb{R}$.

6 Derivator av högre ordning

Derivata av högre ordning kan ha lite olika notation i flera variabler. Vanliga sätt är

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k} \right) \tag{9}$$

$$f''_{x_j x_k}. \tag{10}$$

I fallet där $j = k$ kan följande notation användas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}. \tag{11}$$

Detta är notation för andra derivata i två variabel fallet men notationen ser likadan ut för derivata av högre ordning.

6.1 Två variabel fallet

Om vi har en funktion $f_{(x,y)}$ som beror på de två variablerna x och y finns det 4 olika sätt att ta fram en andra derivata på. Först och främst att derivera med avseende på x två gånger i rad f''_{xx} . Sen har vi fallet där vi deriverar med avseende på y två gånger i rad f''_{yy} . Vi kan också derivera med avseende på x först och sen y samt tvärt om vilket ger f''_{xy} och f''_{yx} . Det kommer visa sig att det inte spelar någon roll i vilken ordning man deriverar variablerna alltså att $f''_{xy} = f''_{yx}$ i två variabelfallet.

6.2 Clairouts Sats

För derivata i högre ordning finns en sats som heter Clairouts sats men innan vi formulerar den behövs lite terminologi.

6.2.1 Terminologi

Vi låter $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ och vi låter D vara en öppen och sammanhängande mängd $D \subseteq \mathbb{R}^n$. $f \in C^k(D)$ Innebär att funktion f är de funktioner i D som är k gånger deriverbara där k är ett heltal $k \geq 0$. Om f 's partiella derivator av grad $\leq k$ existerar och är kontinuerliga på hela D kan Clairouts sats formuleras.

6.2.2 Sats

För $k \geq 2$ säger Clairouts sats att om $f \in C^k(D)$ så spelar det ingen roll i vilken ordning vi deriverar de olika variablerna upp till grad 2. T.ex. i $k = 3$ fallet gäller $f'''_{xxy} = f'''_{xyx} = f'''_{yxx}$.

6.2.3 Bevis

Bevis av satsen finns på sida 87-88 Sats 9 i boken Analys i flera variabler, Persson-Böiers. Beviset bygger på att bevisa att satsen gäller för två variabel fallet med hjälp av medelvärdesatsen och sedan utöka till det allmänna fallet med hjälp av ett induktionsbevis.