

Sammanfattning LV3

MVE035/MVE600 - Flervariabelanalys

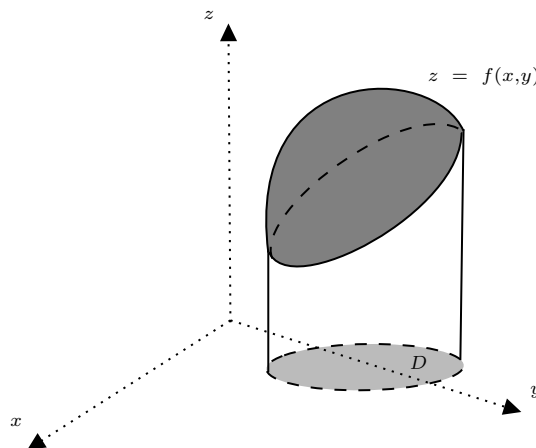
Grupp 3B

Deniz Atay, Hugo Ekstrand, Rohan Paul Jamieson
Ghadir Radhi, Izatuva Sjölin, Ernest Smailagic

2023-02-03

1 Dubbelintegraler

En flervariabelfunktion har inte en entydig derivata, och därför finns det ingen (uppenbar) generalisering av begreppet primitiv funktion, generaliserad integral, eller en sats motsvarande analysens huvudsats för funktioner i en variabel. Under den här veckans föreläsningar fokuserades det på integrering av funktioner av två variabler, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, d.v.s. dubbelintegraler, och hur man förfar när dessa skall integreras. Mer specifikt fokuserades det inledningsvis på *bestämda* dubbelintegraler. Vi antar tills vidare att $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är en kontinuerlig funktion samt att mängden $D \in \mathbb{R}^2$ är en kompakt (sluten och begränsad) mängd. En dubbelintegral av funktionen $f(x,y)$ m.a.p. variablerna x och y , över mängden D skrivs $\iint_D f(x,y) dx dy$. Informellt tolkas dubbelintegralen som volymen med tecken mellan grafen $z = f(x,y)$ och området D i xy -planet, se figur 1.



Figur 1: Figuren illustrerar hur $\iint_D f(x,y) dx dy$ kan tolkas som volymen (med tecken!) av kroppen som ligger mellan området D i xy -planet och en funktionsyta $z = f(x,y)$ ovanför D .

Idén är att dela in området D i små rektanglar och summera volymen av rätblocken som bildas mellan området D och funktionsytan. Detta kan göras mer rigoröst med hjälp av Riemannsummor. Här krävs att randen till D är snäll, så att den totala arean av rektanglarna som täcker randen går mot noll då indelningen förfinas. En naturlig fråga som kan formuleras är; hur beräknas dubbelintegraler? För att besvara frågan, presenteras nu fyra beräkningstekniker.

1.1 Beräkningstekniker

A. **Inspektion.** Här kan man utnyttja att dubbelintegraler beskriver volym med tecken, och därmed utnyttja att vi känner till volymen för några kroppar såsom cylindrar osv. Vidare har dubbelintegraler ärvt enkelintegralernas linearitetsegenskap, vilket därför kan utnyttjas med fördel. Linjäritetsegenskapen för dubbelintegraler innebär att

$$\iint_D (\alpha f + \beta g) \, dx \, dy = \alpha \iint_D f \, dx \, dy + \beta \iint_D f \, dx \, dy.$$

Vidare kan dubbelintegralen delas upp genom att dela upp mängden D i olika delmängder D_i , $i \in \mathbb{N}$. Om t.ex. $D = D_1 \cup D_2$ och $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, så gäller att

$$\iint_D f \, dx \, dy = \iint_{D_1} f \, dx \, dy + \iint_{D_2} f \, dx \, dy.$$

Att leta efter symmetrier inom matematiken är en bra idé, och detta fall är inget undantag. Under föreläsningen förklarades exempelvis att dubbelintegralen av en udda funktion m.a.p. på en variabel över ett symmetriskt område m.a.p. samma variabel är 0.

En annan viktig observation är att medelvärdet av f på D är:

$$\frac{1}{\mu(D)} \iint_D f(x,y) \, dx \, dy,$$

där $\mu(D)$ är arean av området D , d.v.s. $\mu(D) = \iint_D 1 \cdot dx \, dy$.

B. **Fubinis sats.** Fubinis sats säger att en dubbelintegral kan bestämmas genom att beräkna två itererade enkelintegraler. Satsen möjliggör således att tekniker från envariabelanalysen utnyttjas. Mer om Fubinis sats i avsnitt 2.

C. **Variabelbyten.** Beskrivs närmare i avsnitt 3.

D. **Nivåkurvor.** Beskrivs närmare i avsnitt 4.

2 Fubinis sats

2.1 Fubinis sats för axelparallell rektangel

För att förstå Fubinis sats för axelparallella rektanglar måste vi först få en förståelse för vad axelparallella rektanglar är. Axelparallella rektanglar är rektanglar vars sidor är parallella med koordinataxlarna. En mer formell definition följer nedan.

Definition

Låt $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ s.a. $a \leq b, c \leq d$. Mängden

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} = [a, b] \times [c, d]$$

kallas en axelparallell rektangel i planet, där $[a, b] \times [c, d]$ är en kartesisk produkt av intervallet.

Fubinis sats, (6.1.2, 6.1.3)

Låt $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ vara en axelparallell rektangel och $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$. Då gäller

$$\iint_D f(x,y) \, dx \, dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) \, dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) \, dy \right) dx.$$

Notera att vi betraktar variabeln vi inte integrerar över som konstant i den inre integralen. Kortfattat säger Fubinis sats alltså att resultatet är detsamma om vi integrerar över x eller y först. Däremot kan det bli en avsevärd skillnad beräkningstekniskt. Vidare skrivs parenteserna för de itererade integralerna sällan ut.

3 Riemannsumma och integrerbarhet

Definition av en partition av intervallet $[a, b]$ är en ändlig följd av $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Givet en axelparallell rektangel $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ där vi har partitioner

$$\begin{cases} a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \\ c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d \end{cases} \quad (*).$$

Vi delar upp partitionerna i delintervall $[x_i, x_{i+1}]$ där $i = 0, \dots, n-1$ och $[y_j, y_{j+1}]$ där $j = 0, \dots, m-1$. Detta ger Δ som en partition av $m \cdot n$ delrektanglar $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$. För att få en godtyckligt fin indelning ska arean i varje delrektangel gå mot noll.

Om vi har en funktion $\Phi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ kallas den en trappfunktion om det existerar en partition (*) så att Φ har konstant värde c_{ij} på $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$. Värdena på kanterna gör ingen skillnad på grund av nollmängd. Dubbelintegralen av trappfunktionen Φ över Δ definieras som:

$$\iint_{\Delta} \Phi(x, y) \, dx \, dy = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij} (x_{i+1} - x_i) (y_{j+1} - y_j).$$

En funktion f , där $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ och är begränsad, sägs vara Riemannintegrerbar över Δ om det $\forall \varepsilon > 0$ existerar det trappfunktioner Φ_ε och Ψ_ε på Δ så att:

$$\begin{aligned} (i) \quad & \Phi_\varepsilon(x, y) \leq f(x, y) \leq \Psi_\varepsilon(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Delta \\ (ii) \quad & \iint_{\Delta} \Psi_\varepsilon(x, y) \, dx \, dy - \iint_{\Delta} \Phi_\varepsilon(x, y) \, dx \, dy < \varepsilon. \end{aligned}$$

Gäller (i) och (ii) kan vi definiera dubbelintegralen av f över Δ som

$$\iint_{\Delta} f(x, y) \, dx \, dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\Delta} \Psi_\varepsilon(x, y) \, dx \, dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\Delta} \Phi_\varepsilon(x, y) \, dx \, dy.$$

Användningen av Riemannsummor för integraler kan ge ett bevis för triangelolikheten. Om f är en kontinuerlig på Δ gäller det att

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \mu(\Delta_k) \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\xi_k, \eta_k)| \mu(\Delta_k)$$

där $\mu(\Delta_k)$ är arean av delrektangeln och $f(\xi_k, \eta_k)$ är den valda punkten i den slutna delrektangeln Δ_k . När vi har en obegränsat förfinad indelning av delrektanglarna, alltså att arean går mot noll kan vi skriva summorna som dubbelintegraler och får därmed

$$\left| \iint_{\Delta} f(x, y) \, dx \, dy \right| \leq \iint_{\Delta} |f(x, y)| \, dx \, dy.$$

4 Integration över godtyckliga områden

Vid beräkning av integraler skiljer sig funktioner av fler variabler från fallet av funktioner av en variabel. Exempelvis saknar en funktion av fler variabler en generell primitiv funktion vilket försvårar integrering. Däremot är det fortfarande möjligt att integrera funktioner av fler variabler över ett godtyckligt område vilket vi kommer se är möjligt genom att införa några nya begrepp.

Definition

En mängd N i planet kallas en **nollmängd** om vi för varje tal $\varepsilon > 0$ kan täcka över N med ändligt många axelparallella rektanglar vars sammanlagda area är högst ε . En mängd D kallas **kvadrerbar** om dess rand är en nollmängd.

Tillsammans med definitionen för en nollmängd och en kvadrerbar mängd följer 3 lemmen. Dessa kommer komma till användning för att påvisa en sats för integration över ett kompakt område.

Lemma 1. Grafen av en kontinuerlig funktion av en variabel, $f(x)$, i ett slutet intervall, $a \leq x \leq b$, utgör en nollmängd.

Detta blir intuitivt av att grafen av en kontinuerlig funktion av en variabel kan ses som en sammanhängande linje och att en linje kan stängas in i en oändligt liten area $< \varepsilon$.

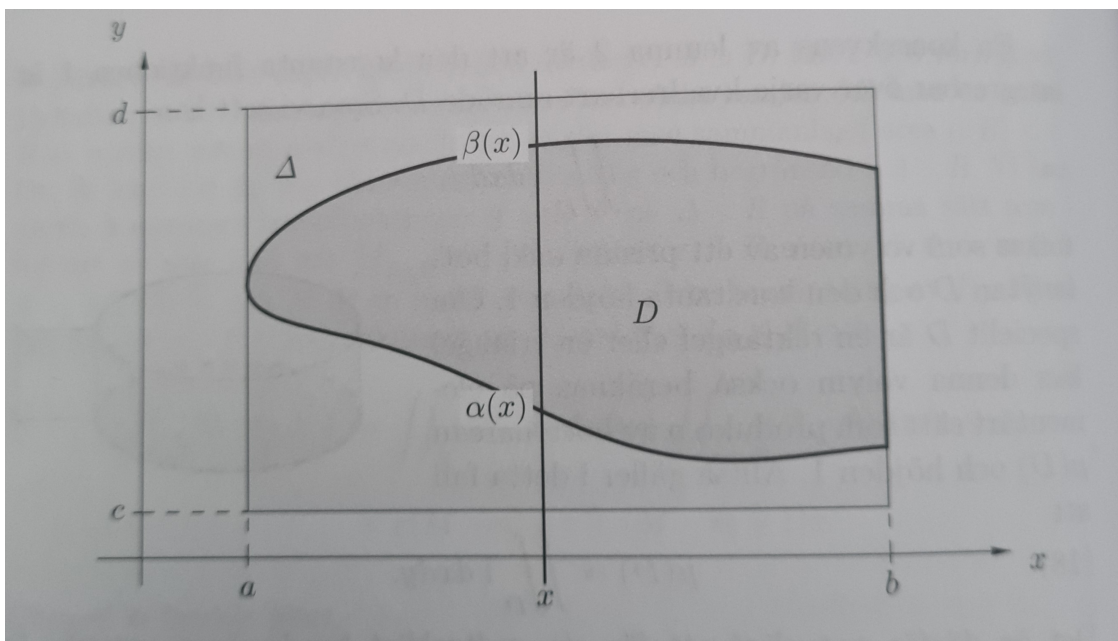
Lemma 2. Antag att f är likformigt kontinuerlig och begränsad på en kvadrerbar mängd D . Då är f integrerbar över D .

Att f kan integreras över ett område i mängden D är kanske självklart. Sedan att f kan integreras över randen som är en nollmängd klargörs av lemma 3.

Lemma 3. Varje begränsad funktion f är integrerbar över en nollmängd N och

$$\iint_N f \, dx \, dy = 0.$$

Varför lemma 3 gäller beror på att en integration över en nollmängd är en integration på en mängd vars area är godtyckligt liten. Detta kan jämföras till att integrera en funktion av en variabel över en ensam punkt vilket framställer samma resultat. Med hjälp av dessa lemmen, och tillsammans med Fubinis sats, följer en sats från boken *Analys i flera variabler* om integrering av en kompakt mängd i planet.



Figur 2: En kompakt mängd D i planet.

Sats 4. Om f är kontinuerlig på en kompakt mängd D så är f integrerbar över D och

$$\iint_D f(x,y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y) \, dy \right) dx.$$

Den itererade integreringen i högerledet kan förklaras av att man först integrerar över y mellan funktionerna $\beta(x)$ och $\alpha(x)$, beroende av en variabel, x , vilket av lemma 1 och 2 möjliggör en integrering av mängden D . Därefter integreras funktionen över x på ett delintervall $a \leq x \leq b$. Den omvända ordningen av den itererade funktionen gäller också där man först integrerar över x och sedan y . I det fallet kommer funktionen

integreras över x mellan två funktioner på randen som är beroende av y istället för x och därefter integreras funktionen över y på ett delintervall $c \leq y \leq d$.

5 Variabelbyten av dubbelintegraler

Variabelbyte bygger på att omvandla integrationsområdet E i xy -planet till ett plan av en integrand till ett annat, enklare område D i uv -planet. Detta genomförs med en avbildning från xy -planet till uv -planet, så att $x = F_1(u,v)$ och $y = F_2(u,v)$ och multiplicera integranden med Jacobideterminanten, $d(u,v)/d(x,y)$ av avbildningsfunktionen. Formellt lyder satsen om variabelbyten:

Sats 6.4.6

Om $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ är en bijektion som avbildar ett område E i uv -planet till ett område D i xy -planet så att $x = F_1(u,v)$, $y = F_2(u,v)$ och $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^1$. Givet att E och D är öppna, begränsade, kvadrerbara och att Jacobi-determinanten $J(u,v) \neq 0$ i E . Då gäller att

$$\iint_D g(x,y) dx dy = \iint_E g(\mathbf{F}(u,v)) \cdot |J_{\mathbf{F}}(u,v)| du dv, \text{ där } J_{\mathbf{F}}(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

5.1 Linjär algebra och intuition för sats 6.4.6

Intuitivt kan variabelbytet beskrivas med dess differentialer så att Jacobimatrisen avbildar x och y på u och v :

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}.$$

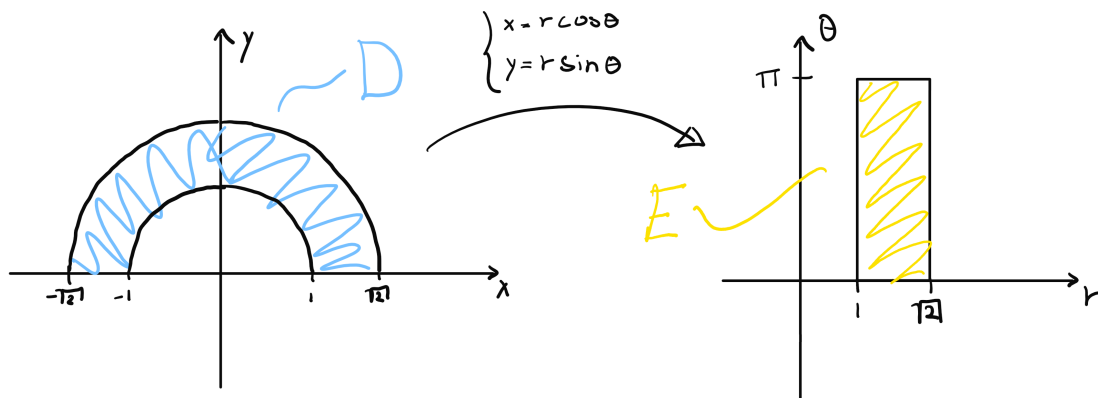
Detta gäller då $dx = \partial x / \partial u \cdot du + \partial x / \partial v \cdot dv$ och på samma sätt för dy . Geometriskt kan $dx dy$ betraktas som area av ett infinitesimalt litet delområde i xy -planet och $du dv$ som ett infinitesimalt litet delområde i uv -planet. Avbildningsmatrisen omvandlar från xy -planet till uv -planet för respektive område, och geometriskt representerar determinanten av en avbildningsmatris area förändringen mellan områdena. Alltså kan skalningsfaktorn som variabelbytet medför beskrivas med Jacobideterminanten, så att $dx dy = |J(u,v)| \cdot du dv$.

5.2 Ett vanligt exempel - polära koordinater

Ett återkommande variabelbyte är det bytet till polära koordinater så att

$$\mathbf{F}(r, \theta) = \begin{cases} x(r, \theta) = r \cos(\theta) \\ y(r, \theta) = r \sin(\theta) \end{cases}$$

med Jacobideterminanten $J_{\mathbf{F}}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = r$. Utöver detta är Jacobideterminanten $\neq 0$ och $\mathbf{F}$ bi-jektiv för alla $(x,y) \neq (0,0)$. Detta medför att variabelbytet är giltigt enligt sats 6.4.6 $\forall (x,y) \neq (0,0)$. Detta variabelbyte kan användas för att till exempel beräkna en integral i ett cirkulär område, såsom $D = \{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, 0 \leq y\}$. Motsvarande område, E , för D i $r\theta$ -planet blir en axelparallell rektangel $E = \{(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}$ (se figur 3).



Figur 3: Figuren illustrerar ett variabelbyte från området $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, 0 \leq y\}$ i xy -planet till ett området $E = \{(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}$ i $r\theta$ -planet med variablerna $x = r \cos(\theta)$ och $y = r \sin(\theta)$. Alltså representeras ett cirkelbåge område D som en axelparallell rektangel.

Volymen av exempelvis ytan $z = |x|$ över området D är därmed lika med ytan $z = |r \cos(\theta)| \cdot r$ över området E , vars konkreta beräkning kan ses i ekvationen

$$\begin{aligned} \iint_D |x| dx dy &= \iint_E |r \cos(\theta)| \cdot r dr d\theta = \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} r^2 dr \cdot 2 \int_0^{\pi/2} |\cos(\theta)| d\theta = \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^{\sqrt{2}} \cdot 2 [\sin(\theta)]_0^{\pi/2} = \frac{4\sqrt{2} - 2}{3}. \end{aligned}$$

6 Integration med nivåkurvor

Av de 4 huvudsakliga verktygen vi har till vårt förfogande när vi löser dubbelintegraler utgör nivåkurvor den sista av dessa. Idén bakom påminner geometriskt om Fubini, men här vill man istället dela upp längst en så kallad nivåkurva för en given funktion i 2 variabler.

Följande sats kommer ge oss en metod att använda vid integraler på formen:

$$\iint_D h(g(x, y)) dx dy.$$

Sats (Ekvation 29 s.271)

Låt $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara $\mathcal{C}^1$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara $\mathcal{C}^0$ och $D \subset \mathbb{R}^2$ vara en kompakt samt kvadrerbar mängd. Observera här att g är en funktionsyta så att vi får motsvarande nivåkurvor $g(x, y) = u_j$. Antag nu att

$$a \leq g(x, y) \leq b \quad \forall x \in D.$$

Detta leder till att området D kan delas upp i oändligt många och små delområden A_j , som begränsas av sin motsvarande nivåkurva $g(x, y) = u_j$.

Som följd låter vi areafunktionen $A(u)$ vara arean av ett av dessa begränsade områden.

$$A(u_j) = \mu(\{(x, y) \in D : g(x, y) \leq u_j\}), \quad j = 1, \dots, n.$$

Den avgörande idén för satsen, är att vi nu genom att summera alla dessa oändligt små delområden, så kommer $g(x, y)$ approximativt få värdet u_j , därav får vi som följd att $h(g(x, y)) = h(u_j)$ så att h kan ses ungefär som en konstant. Integranden i helhet är nu konstant på nivåkurvorna och vi kan slutligen skriva:

$$\iint_D h(g(x,y)) \, dx \, dy = \int_a^b h(u) A'(u) \, du.$$

Observationer

Metoden kräver att:

- integranden har speciell form (den ska finnas i området D),
- samt att $A(u)$ kan beräknas explicit.

7 Generaliserade integraler

7.1 Generaliserade integraler med positiv integrand

Vi har upp tills nu bara studerat dubbelintegraler av begränsade funktioner på begränsade områden. Generaliserade dubbelintegraler kan ha obegränsade funktioner och obegränsade områden. Det är dock inte tillräckligt att undersöka om dessa integraler har ett värde, som illustreras av funktionen $f(x,y) = xy(2-xy)e^{-xy}$. Om man först integrerar x , och sedan y får man värdet 0, medan y och sen x ger värdet 1. Vi börjar med att definiera *konvergens* och *divergens* för generaliserade integraler med positiva integrander.

Definition:

En *avskärning* av Ω för f är en begränsad, kvadrerbar mängd $D \subset \Omega$ sådant att f är begränsad i D .

Definition:

Den generaliserade integralen

$$\iint_{\Omega} f(x,y) \, dx \, dy$$

är *konvergent* om

$$\left\{ \iint_D f(x,y) \, dx \, dy \mid D \text{ avskärning av } \Omega \right\}$$

är uppgåt begränsad, annars är integralen *divergent*. Med detta kan vi utöka vår definition av konvergens till integrander som inte nödvändigtvis är positiva. Betrakta

$$f^+(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{om } f(x,y) \geq 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$f^-(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{om } f(x,y) \geq 0 \\ -f(x,y) & \text{annars.} \end{cases}$$

Vi får att $|f| = f^+ + f^-$. f sägs då vara konvergent om $\iint_{\Omega} |f(x,y)| \, dx \, dy$ är konvergent. Konvergens kan också visas med olika metoder, som att använda sig av variabelbyte för att reducera dubbelintegralen till en envariabelintegral, och sedan visa konvergens för den.