

Sammanfattning LV 3

Loe Edberg, Alex Helander, Erik Johansson, Max Larsson, Ludwig Lewis

12 februari 2023

1 Definition av dubbelintegral

Integralen i en variabel kan informellt tolkas som en area med tecken eller mer formellt med riemannsummor.

Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion och $D \subseteq \mathbb{R}^2$ en kompakt mängd, d.v.s. D är sluten och begränsad. På samma sätt kan integralen i två variabler då tolkas som en volym med tecken. Dubbelintegralen skrivs då

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy.$$

2 Tekniker för upprepade integration

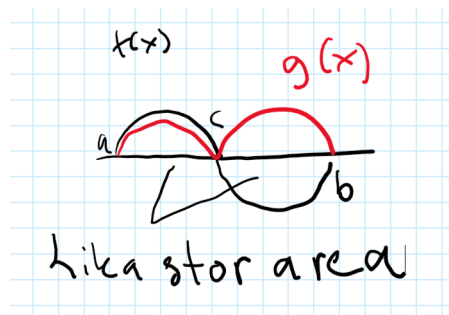
2.1 Inspektion och enkla tekniker

När en dubbelintegral ska beräknas bör alltid en inledande inspektion göras för att förenkla problemet, eller till och med lösa det utan att ha utfört någon beräkning. Tre användbara egenskaper av intresse är *symmetrier*, att en dubbelintegral beskriver en *volym med tecken* och att integralen är en *linjär operation*.

Om symmetrier över integrationsytan kan observeras kan olika slutsatser dras. Ett typiskt exempel är att om ytan är symmetrisk runt origo och funktionen är udda kommer summan givetvis bli 0, då ett lika stort negativt område som positivt adderas. I figur 1 går det att observera två sorters symmetrier. Det kan konstateras att $\int_a^b f(x) \, dx = 0$ utan att utföra beräkningar, men även att $2 \cdot \int_a^c f(x) \, dx = \int_a^b g(x) \, dx$. Samma symmetriargument kan användas i flera variabler.

Det går att dela upp integrationsytan enligt $D = D_1 \cup D_2$ och $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Därmed gäller likheten

$$\iint_D f \, dx dy = \iint_{D_1} f \, dx dy + \iint_{D_2} f \, dx dy.$$



Figur 1: Arean under de båda bågarna under $f(x)$ är lika stora och öppnar upp för symmetriargument.

Eftersom en dubbelintegral beskriver en volym är $\frac{1}{\text{area}(D)} \iint_D f \, dx dy$ medelvärdet av f över D . Av samma anledning kan $\iint_D \alpha \, dx dy$, där $\alpha \in \mathbb{R}$, även tolkas som $\alpha \cdot \text{area}(D)$.

Precis som i envariabelfallet är integralen en linjär operation även i flera variabler, det vill säga

$$\iint_D (\alpha f + \beta g) \, dx dy = \alpha \iint_D f \, dx dy + \beta \iint_D g \, dx dy,$$

där $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Genom en sådan uppdelning blir problemet mer översiktligt och inspektionen lättare.

2.2 Fubinis Sats

2.2.1 Fubinis Sats för axelparallella rektanglar

Låt $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ så att $a \leq b$ och $c \leq d$. Då definierar området

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} = [a, b] \times [c, d]$$

en axelparallell rektangel.

Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara kontinuerlig och $\Delta = [a, b] \times [c, d]$. Då gäller

$$\iint_{\Delta} f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy.$$

I de inre integralerna behandlas den variabeln som inte integreras över som konstant. För resultatet spelar det ingen roll över vilken variabel man integrerar först. Beräkningstekniskt kan det däremot göra stor skillnad.

2.2.2 Fubinis sats för reguljära områden

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara kompakt. D är då reguljär i x -led om D kan delas upp i ändligt många delmängder $D_1, \dots, D_n$ på formen

$$D_i = \{(x, y), a_i \leq x \leq b_i, \alpha_i(x) \leq y \leq \beta_i(x)\}$$

där $\alpha_i(x) \leq \beta_i(x) \forall x \in [a_i, b_i]$. Regularitet i y -led ges genom analog definition. D kallas reguljär om D är reguljär i både x - och y -led.

Låt $D = \{(x, y), a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ och $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ vara kontinuerlig. Då gäller

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

2.3 Integration med hjälp av nivåkurvor

För att beräkna dubbelintegraler på formen

$$I = \iint_D h(g(x, y)) \, dx dy, \tag{1}$$

där h är en kontinuerlig funktion, g är en kontinuerligt deriverbar funktion och D är en kvadrerbar mängd, kan vi använda oss av nivåkurvor. För att använda följande lösningsformel måste först funktionen

$$A(u) = \{(x, y); (x, y) \in D \text{ och } g(x, y) \leq u\}$$

tas fram samt gränserna a och b bestämmas. De kommer dock generellt vara funktionen g 's lägsta respektive högsta värde på D . När detta är gjort går det att skriva sambandet

$$I = \int_a^b h(u) A'(u) du$$

vilket är en envariabelfunktion vilket vi härifrån kan behandla som alla andra envariabelintegraler.

Några observationer och varningens tecken är att denna lösningsmetod endast fungerar och är effektiv vid mycket speciella tillfällen. Till exempel måste integranden vara av den speciella formen i ekvation (1). Utöver detta måste även området D generellt sett vara begränsad av en nivåkurva till g för att kunna formulera A på ett smidigt sätt. Tecken på att denna lösningsmetod är användbar är till exempel om funktionen g i sin helhet förekommer i definitionen av D .

I boken behandlas detta kort på sidorna 269 till 273. Bevis tas ej. Där finns även ett fullständigt exempel.

3 Nollmängder

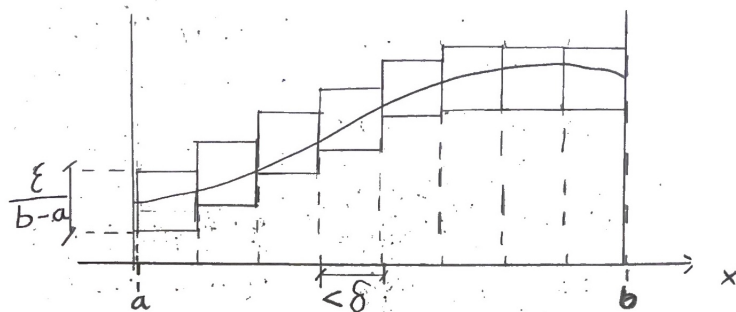
Vid utvidgningen av en funktion f till f_D sådant att

$$f_D(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{när } (x, y) \in D \\ 0 & \text{när } (x, y) \notin D \end{cases}$$

behöver inte f_D vara kontinuerlig även om f är det. Detta eftersom f_D blir diskontinuerlig i varje punkt på randen ∂D av D där f är skild från noll. Detta är dock betydelselöst för integrerbarheten av f om D är en mängd med liten rand enligt följande definition.

En mängd N i planet kallas en nollmängd om vi för varje tal $\epsilon > 0$ kan täcka över N med ändligt många axelparallella rektanglar vars sammanlagda area är högst ϵ . En mängd D kallas kvadrerbar om dess rand är en nollmängd.

Grafen av en kontinuerlig funktion av en variabel $y = \varphi(x)$, $a \leq x \leq b$, utgör en nollmängd.



Figur 2: Indelning av en kontinuerlig funktion i delintervall av längd δ . Rektanglarna med höjd $\frac{\epsilon}{b-a}$ täcker hela grafen.

Beviset bygger på att φ är likformigt kontinuerlig på $[a, b]$ och därmed finns det ett givet tal $\delta > 0$ till varje givet tal $\epsilon > 0$ så att

$$|x - x'| \leq \delta \implies |\varphi(x) - \varphi(x')| < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Genom att dela in $[a, b]$ i delintervall med maximal längd δ och sedan använda dessa delintervall för att skapa rektanglar med höjden $\frac{\epsilon}{b-a}$ ser man tydligt att funktionskurvan blir övertäckt av ändligt många rektanglar så som visas i figur 3. Den sammanlagda arean av dessa rektanglar blir då

$$\frac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon$$

därmed är kurvan innanför intervallet en nollmängd.

3.1 Variabelbyten i dubbelintegraler

En annan lösningsmetod för dubbelintegraler är variabelbyten. Oftast handlar det om att förenkla integrationsområdet så att Fubinis sats kan användas.

3.1.1 Sats 6.4.6

Låt

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

vara en bijektiv $\mathcal{C}^1$ avbildning av området E i uv -planet till D i xy -planet. Antag att områdena E, D är öppna, begränsade, kvadrerbara och att $J(u, v) \neq 0$. Då är

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_E f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| \, du dv$$

om integranderna är integrerbara över respektive område.

En intuitiv förklaring till varför faktorn $|J(u, v)|$ finns med fås genom linjärisering. Det ger sambanden

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \\ dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \end{cases}$$

mellan de infinitesimala storheterna som kan skrivas om med hjälp av matrismultiplikation till

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}.$$

Detta samband kan ses som en linjär avbildning och från linjär algebra vet vi att vid en linjär avbildning fungerar determinanten av avbildningsmatrisen som en skalfaktor för area. Det leder till sambandet

$$dx dy = |J(u, v)| du dv,$$

där $dx dy$ är arean innan variabelbytet, $du dv$ är arean efter och $J(u, v) = \frac{d(x, y)}{d(u, v)}$ är Jacobiandeterminanten.

Vidare, eftersom ett variabelbyte tillbaka till de gamla variablerna måste ge tillbaka samma område som stoppades in har vi

$$\frac{d(x, y)}{d(u, v)} \cdot \frac{d(u, v)}{d(x, y)} = 1.$$

Produkten av Jacobiandeterminaterna för bytet $(x, y) \rightarrow (x(u, v), y(u, v))$ och det inversa bytet $(u, v) \rightarrow (u(x, y), v(x, y))$ är alltså lika med 1.

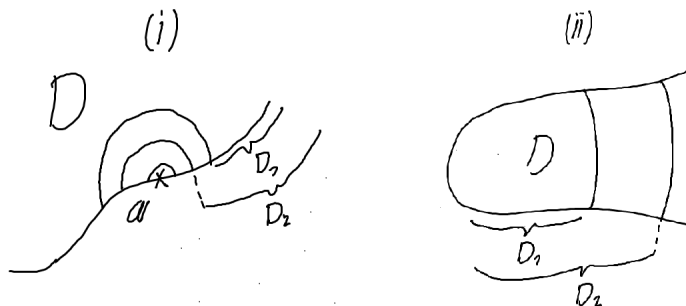
Detta kan användas för att förenkla beräkningar vid variabelbyten då det kan vara enklare att beräkna $J(x, y)$ än $J(u, v)$ i vissa fall.

4 Generaliserad integral

En integral är generaliserad om

- (i) D är begränsad men $f(x, y)$ är obegränsad i någon punkt $\mathbf{a}$
- (ii) D är obegränsad

Detta hanteras genom att skapa en följd av områden $D_1, \dots, D_n$ så att $D_n \subseteq D_{n+1}$ och $D_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} D$. I det första fallet skär man bort mindre och mindre områden kring $\mathbf{a}$. I det andra fallet betraktar man större och större begränsade delområden så som visas i figur 3.



Figur 3: Uppdelning av D i delområden $D_1, \dots, D_n$.

Detta fungerar bara om f inte byter tecken, då resultatet annars kan bero på valet av D_n . Om man behöver hantera funktioner med växlande tecken behöver man först dela upp dem i en negativ och en positiv funktion och sedan behandla dessa separat. Dessa funktioner kan vara följande

$$f^+ = \begin{cases} f(x, y) & \text{när } f(x, y) \geq 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}, \quad f^- = \begin{cases} f(x, y) & \text{när } f(x, y) \leq 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}.$$