

Tavelpresentation grupp 5C

Elias Alvring, Frida Brinkmalm, Viggo Gripestam, Johan Hasselblad,
Petter Ollinen, Marta Sandell

Februari 2023

1 Volymberäkningar

1.1 Geometrisk tolkning av dubbelintegraler

Låt $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ och $g(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ och $D \subseteq \mathbb{R}^2$
om $f(x, y) \leq z \leq g(x, y) \quad \forall (x, y) \in D$
så representeras volymen mellan funktionsytorna $z = f(x, y)$ och $z = g(x, y)$
över området D av:

$$\mu(K) = \iint_D g(x, y) - f(x, y) \, dx \, dy \quad (1)$$

1.2 Geometrisk tolkning av trippelintegraler

Volymen av samma kropp K kan även beräknas genom att integrera en 1:a med
avseende på volymelementet $dV = dx \, dy \, dz$. Alltså gäller följande:

$$\mu(K) = \iiint_K 1 \, dx \, dy \, dz \quad (2)$$

Om exempelvis z kan uttryckas som funktioner $\alpha(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ och $\beta(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kan trippelintegralen istället överföras till en dubbelintegral:

$$\mu(K) = \iint_E \left(\int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} dz \right) dx \, dy = \iint_E \beta(x, y) - \alpha(x, y) \, dx \, dy \quad (3)$$

där $z = \beta(x, y)$ och $z = \alpha(x, y)$ är de två funktionsytor mellan vilken volymen
skall beräknas och E projektionen av kroppen på xy -planet. Således överförs
beräkningarna på en dubbelintegral. Givetvis kan beräkningarna ske i en annan
ordning.

1.3 Val av metod för volymberäkning

Oftast kan en trippelintegral över en kropp K med en 1:a som integrand direkt
överföras på fallet med en dubbelintegral som i (3). I vissa fall kan det däremot
vara praktiskt att göra ett variabelbyte redan i trippelintegralen för att förenkla
beräkningarna.

2 Multipelintegraler

Målet med denna sektion är att beräkna volym av det n-dimensionella enhetsklotet respektive ett n-dimensionellt klot med valfri radie r. Liksom för trippelintegraler fungerar Fubinis sats, integrering längst nivåytor och variabelbyten för multipelintegraler som kommer användas nedan.

2.1 Notation

Givet en funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ skriver man förkortat en multipelintegral av grad n som

$$\int \dots \int f(x_1 \dots x_n) dx_1 \dots dx_n = \int f(\bar{x}) d\bar{x} \quad (4)$$

där $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

2.2 Sats: Rekursionsformel för n-dimensionellt enhetsklot

Låt $B_n = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\bar{x}\| \leq 1\}$ beteckna enhetsklotet i $\mathbb{R}^n$ och $\mu_n = \int_{B_n} d\bar{x}$ beteckna dess volym. Då gäller:

$$\mu_1 = 2, \mu_2 = \pi, \quad (5)$$

$$\mu_n = \frac{2\pi}{n} \mu_{n-2}, \forall n \geq 3 \quad (6)$$

2.3 Lemma: Volym av n-dimensionellt klot med godtycklig radie

Givet $r > 0$ låt $B_{n,r} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\bar{x}\| \leq r\}$ beteckna n-dimensionellt klot med radie r och $\mu(B_{n,r})$ dess volym. Då gäller:

$$\mu(B_{n,r}) = r^n \mu_n \quad (7)$$

där μ_n är volymen av n-dimensionellt enhetsklotet

2.4 Bevis av lemmat

Definitionsmässigt ges volym av ett n-dimensionellt enhetsklot av

$$\mu(B_{n,r}) = \int_{\|\bar{x}\| \leq r} d\bar{x} \quad (8)$$

Genom att utföra variabelbytet $\bar{y} = r\bar{x}$ kan man skriva om integralen till

$$\mu(B_{n,r}) = \int_{\|\bar{y}\| \leq 1} r^n d\bar{y} = r^n \mu_n \quad (9)$$

där r^n är jacobideterminanten för variabelbytet.

2.5 Bevis idé för satsen

Ungå från definitionen för volymen för B_n . Genom att applicera Fubinis sats på multipelintegralen kan man dela upp den i en dubbelintegral med avseende på x_{n-1}, x_n och en multipelintegral av grad $n-2$ med avseende på $x_1, \dots, x_{n-2}$. Efter beräkning av de nya gränserna och den inre dubbelintegralen bör man få:

$$\mu_n = \pi \int_{B_{n-2}} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2\right) dx_1 \dots dx_{n-2} \quad (10)$$

I integrera i detta steg längs nivåytorna för funktionen $g(x_1, \dots, x_{n-2}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-2} x_i^2}$ och beräkna motsvarande $V'(u)$ med hjälp av lemmat. Integralen skrivs då om till:

$$\mu_n = \pi \int_0^1 (1 - u^2) V'(u) du = \dots = \frac{2\pi}{n} \mu_{n-2} \quad (11)$$

2.6 Sluten formel för μ_n

2.6.1 Gammafunktionen

I denna sektion visar vi en sluten formel för volymen av n -dimensionella enhetsklotet. För detta kommer vi behöva använda gammafunktionen som definieras enligt

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad (12)$$

där $z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0$.

Gammafunktionen har följande användbara egenskaper som behövs för att bevisa den slutna formeln för μ_n

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (13)$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (14)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (15)$$

2.6.2 Formel för μ_n

Den slutna formen för μ_n kan därmed skrivas som

$$\mu_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}, \forall n \geq 1. \quad (16)$$

2.6.3 Bevis idé

Antag att formeln gäller för $n = 1$ och $n = 2$. Tag $n \geq 3$. Enligt den slutna formeln som ska bevisas och gammafunktionens egenskaper kan sambandet mellan μ_n och μ_{n-2} skrivas som:

$$\frac{\mu_n}{\mu_{n-2}} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \frac{\Gamma(\frac{n-2}{2} + 1)}{\pi^{\frac{n-2}{2}}} = \dots = \frac{2\pi}{n} \quad (17)$$

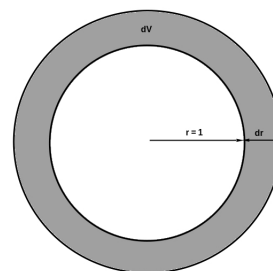
vilket stämmer med rekursionsformeln för μ_n .

2.7 Area av en n-dimensionell sfär

Låt $S_n = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\bar{x}\| = 1\}$ beteckna $n - 1$ -dimensionella sfären med radie 1 i $\mathbb{R}^n$. Ytan av denna sfär kan tolkas som ändring av volymen av motsvarande klot vid en infinitesimal ändring av radien r kring värdet $r = 1$ som illustreras i figuren till höger.

Givet den slutna formeln för μ_n kan detta skrivas som:

$$A_n = \left. \frac{d}{dr}(\mu(B_{n,r})) \right|_{r=1} = \dots = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \quad (18)$$



3 Ytor

3.1 Definition av parametriserad yta

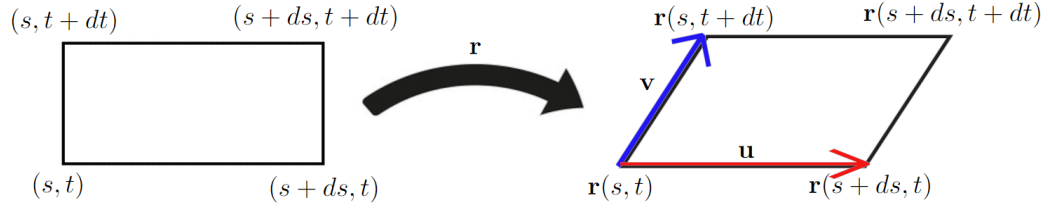
Låt mängden $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara kompakt och kvadrerbar. Bestäm två naturliga tal $k \geq 0$ och $n \geq 2$. En C^k funktion $\mathbf{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ kallas då parametriserad C^k -yta.

3.1.1 Anmärkning och notation

I kursen kommer endast fallet $n = 3$ betraktas vilket medför att $\mathbf{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ och parametriseringen skrivs ofta med s och t , alltså $(s, t) \mapsto \mathbf{r}(s, t)$. Vi kommer även anta att $\mathbf{r} \in C^1$.

3.2 Ytarea

Vi studerar en infinitesimal axelparallell rektangel i D som avbildas med $\mathbf{r}$ på en parallelogram, se figur 1. Med hjälp av kunskaper från linjär algebra kan arean på parallelogrammen bestämmas till $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ där $\mathbf{u} = \mathbf{r}(s + ds, t) - \mathbf{r}(s, t)$ och $\mathbf{v} = \mathbf{r}(s, t + dt) - \mathbf{r}(s, t)$. På grund av att parallelogrammen är infinitesimal kan dessa likheter skrivas om som $\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} ds$ och $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} dt$ vilket leder till att



Figur 1: Infinitesimal axelparallel rektangel i D som avbildas med $\mathbf{r}$ på en parallelogram där vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ ligger längs med sidorna.

den infinitesimala arean dS kan skrivas som $dS = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right\| ds dt$. Den totala ytarean av en parametriserad C^1 -yta ges därav av

$$\iint_D dS = \iint_D \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right\| ds dt. \quad (19)$$

3.2.1 Specialfall 1

Det första specialfallet är när ytan Y ges av en funktionsgraf, alltså $Y = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2, z = f(x, y)\}$. För att bestämma ytarean vill vi beräkna de partiella derivatorna till funktionen och därefter använda oss av

ekvation 19. Funktionen $\mathbf{r}$ kan i detta fallet skrivas som $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{bmatrix}$. De

partiella derivatorna kan sedan beräknas till $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_x \end{bmatrix}$ och $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_y \end{bmatrix}$.

Normen av deras kryssprodukt blir $\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}$ och insättning av detta i ekvation 19 leder till att

$$\text{ytarean} = \iint_D \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1} dx dy. \quad (20)$$

3.2.2 Specialfall 2

Det andra specialfallet är nivåytor till en funktion $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ där ytan Y då ges av $Y = \{(x, y, z) \mid F(x, y, z) = C, (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2\}$. Först och främst måste vi anta att $F'_z \neq 0$ på hela ytan Y för att undvika division med noll längre fram.

Från implicita funktionssatsen får vi att det existerar en funktion f sådan att $z = f(x, y)$ och $f'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}$ och $f'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$. Detta fungerar lokalt.

Insättning i ekvation 20 och förenkling/omskrivning ger oss uttrycket

$$\text{ytarean} = \iint_{\pi(Y)} \frac{\|\nabla F\|}{|F'_z|} dx dy \quad (21)$$

där $\pi(Y)$ är projektionen av F på xy -planet. Det går även att använda x eller y istället för z i beräkningen ovan.

4 Kurvor

4.1 Parametrisering och orientering

Definition:

Låt $a \leq b$ och vi har en funktion $\bar{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ där $t \mapsto \bar{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ som är av klass C^k . Funktionen kallas då en parametriserad och orienterad C^k -kurva i $\mathbb{R}^n$.

Orienteringsbyte

Om vi byter $\bar{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mot $\bar{s} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ så kan $\bar{s}(t)$ beskrivas som $\bar{s}(t) = \bar{r}(b + a - t)$. När man gör ett orienteringsbyte så är det samma kurva men den är baklänges.

Parameterbyte

Parameterbyte behåller samma kurva (värdemängd) och orientering men ändrar vilka parametervärden som tillhör de olika punkterna.

Om $\bar{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ och $\bar{s} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$, C^k -kurvor. De är då olika parametriseringar av samma C^k -kurva om $\exists \varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ som är en växande och bijektiv C^k -funktion så att $\bar{r}(t) = \bar{s}(\varphi(t)) \forall t \in [a, b]$.

4.2 Hastighet, fart och acceleration

Tolka t som tid.

Definition

Låt $\bar{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara en C^1 -kurva och $t \in [a, b]$. Då kallas $\bar{r}'(t)$ för hastigheten vid tid t och $||\bar{r}'(t)||$ kallas farten vid tid t .

Om $\bar{r}$ är en C^2 -kurva så är $\bar{r}''(t)$ accelerationen vid tiden t .

Längd

Låt $\bar{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara en C^1 -kurva.

Hastighetsvektorn $\bar{r}'(t)$ är tangent till kurvan i orienteringens riktning. På infinitesimal tid dt rör sig då partikeln $d\bar{r} = \bar{r}'(t)dt$ med längden $ds = ||d\bar{r}|| = ||\bar{r}'(t)||dt$. ds kallas längdelementet på kurvan. Den totala längden L av kurvan bestäms av

$$L = \int_a^b ds = \int_a^b ||\bar{r}'(t)|| dt \quad (22)$$

Sats

Längden av en C^1 -kurva beror ej på parametrisering eller orientering.

Specialfall

Då kurvan är en funktionsgraf i $\mathbb{R}^2$. I detta fall sker en naturlig parametrisering enligt

$$\bar{\mathbf{r}} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto \bar{\mathbf{r}}(t) = \begin{bmatrix} x \\ f(x) \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Vilket i sin tur leder till att $\bar{\mathbf{r}}'(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ f'(x) \end{bmatrix}$ och $\|\bar{\mathbf{r}}'(x)\| = \sqrt{1^2 + f'(x)^2}$. Detta betyder även att

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx. \quad (24)$$

4.3 Skalarprodukt

Sats

Låt $\bar{\mathbf{u}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \bar{\mathbf{v}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara C^1 . Då är

$$\frac{d}{dt}(\bar{\mathbf{u}}(t) \cdot \bar{\mathbf{v}}(t)) = \bar{\mathbf{u}}'(t) \cdot \bar{\mathbf{v}}(t) + \bar{\mathbf{u}}(t) \cdot \bar{\mathbf{v}}'(t). \quad (25)$$

5 Tillämpningar av trippelintegraler

5.1 Massa

Om ett föremål ockuperar ett kompakt område $D \subseteq \mathbb{R}^3$ och har densiteten $\rho = \rho(x, y, z)$ ges dess massa av

$$M = \iiint_D \rho(x, y, z) dx dy dz. \quad (26)$$

5.2 Medelvärde

Vi har en funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ på D då är

$$\bar{f}_D = \frac{1}{\mu(D)} \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \frac{\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_D 1 dx dy dz} \quad (27)$$

5.3 Masscentrum

Masscentrum är medelvärde av positionerna av ett föremåls massa.

$$\bar{m} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} \quad (28)$$

då är

$$m_x = \frac{1}{M} \iiint_D x \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad (29)$$

p.s.s. m_y och m_z .

5.4 Tröghetsmoment

Om man har ett tröghetsmoment kring en axel L blir

$$I_L = \iiint_D \rho \cdot d^2 dx dy dz, \quad (30)$$

där $d = d(x, y, z)$ är avståndet från (x, y, z) till L .

6 Kurvintegraler

6.1 Definition enligt kurslitteraturen

Om $\vec{F}(\vec{r}) = (P(\vec{r}), Q(\vec{r})) = P(x, y), Q(x, y)$

Då $\vec{r} \in \mathbf{R}^2$

Parametrisering ger $\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t)), \alpha \leq t \leq \beta$

Då är kurvintegralen av fältet $\vec{F} = (P, Q)$ längs kurvan γ lika med

$$\int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) dt \quad (31)$$

och betecknas med

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}(t) = \int_{\gamma} Pdx + Qdy \quad (32)$$

6.2 Fysiktillämpning (av skalärprodukt)

Antag att en partikel med massa m följer en C^2 -kurva $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Förändringen i kinetisk energi blir

$$\Delta E = \frac{1}{2} \|\vec{r}(b)\|^2 - \frac{1}{2} \|\vec{r}(a)\|^2 \quad (33)$$

Analysens huvudsats ger

$$\Delta E = \frac{1}{2}m \int_a^b \frac{d}{dt} \|\vec{r}(t)\|^2 dt \quad (34)$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}m \int_a^b \frac{d}{dt} (\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)) dt \quad (35)$$

Förenkling och insättning av Newton II ger

$$\Delta E = \int_a^b \vec{F}(t) \cdot \vec{r}'(t) dt \quad (36)$$

där $\vec{F}(t)$ är kraften som verkar på partikeln.

Ofta beror $\vec{F}$ på positionen längs med kurvan, inte tiden. Får statiskt vektorfält $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Då får vi *kurvintegral* eller *arbetsintegral* som definieras av uttrycket:

$$\Delta E = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \quad (37)$$

Arbetet partikeln utför = Förändringen i partikelns energi