

Sammanfattning LV 5

MVE035 Flervariabelanalys VT23

Nickoo Sadeghi, William Weeks, David Holmén, Adam Molnar, Axel Wijk

February 2023

1 Generaliserade integraler

Nedan följer resonemang för att avgöra konvergens och divergens för funktioner f som växlar tecken.

Den växlande funktionen f kan delas upp på följande vis:

$$f = f^+ - f^-,$$

där f^+ respektive f^- är ≥ 0 .

Observera att $|f| = f^+ + f^-$. Detta ger att om

$$\iint_D |f| dx dy$$

är konvergent, implicerar det att även $\iint_D f^+ dx dy$ samt $\iint_D f^- dx dy$ är konvergenta. Detta implicerar i sin tur att

$$\iint_D f dx dy$$

är konvergent. Det vill säga dubbelintegralen kan beräknas som vanligt:

Om en funktion $g > |f|$ på D kan hittas implicerar konvergens av

$$\iint_D g dx dy,$$

konvergens av

$$\iint_D |f| dx dy.$$

På motsvarande sätt kommer en funktion $0 \leq g \leq |f|$ där

$$\iint_D g dx dy$$

är divergent implicera att

$$\iint_D |f| dx dy.$$

är divergent.

2 Integral över begränsad mängd

Definition

Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ vara begränsad, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är begränsad. Låt $D \subseteq \Delta$ vara en axelparallell rektangel.

$$f(\bar{x}) = \begin{cases} f(\bar{x}) & \text{om } \bar{x} \in D \text{ (nollutvdigning),} \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Då är $\iint_D f dx dy = \iint_\Delta f_D dx dy$ om integralen existerar.

Lemma 6.2.2

Om f likformigt kontinuerlig och begränsad på en kvadrerbar mängd D så är f integrerbar.

Bevisidé

Funktionen f kan klämmas in godtyckligt väl mellan trappfunktioner Φ och Ψ .

f är kontinuerlig på de rutor helt inneslutna av det kvadrerbara området D och antar 0 utanför D . Att D är en kvadrerbar mängd är ekvivalent med att randen ∂D är en nollmängd. De rutorna som överlappar med f har då en total area på $< \epsilon$.

3 Trippelintegraler och koordinatbyten

Principerna bakom trippelintegraler är samma som de bakom dubbelintegraler. Det resulterar i att samma tekniker används för att lösa dubbelintegraler och trippelintegraler. De vanligaste tillämpningarna av trippelintegraler är; volymeräkningar, massberäkningar, eller beräkning av masscentrum.

3.1 Fubinis sats för trippelintegraler

Fubinis sats säger att integrationsordningen kan bytas utan att integralen påverkas. I praktiken resulterar det i att det finns 2 fall:

Fubini 2+1. Informellt så kan detta fall jämföras vid att man gör "pommes frites" av kroppen man integrerar över.

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\pi(D)} \int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) dz dx dy \quad (1)$$

Fubini 1+2 Detta fall kan till skillnad från det föregående betraktas som att man gör skivor av kroppen över vilken man integrerar. Dessa skivor kan informellt jämföras med att man gör "chips".

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy dz \quad (2)$$

3.2 Koordinatbyten

Koordinatbyten i trippelintegraler utförs på exakt samma sätt som två variabler detta gäller även för multipelintegraler. Den enda skillnaden är att beräkningen av Jacobideterminanten blir mer komplicerad.

4 Multipelintegraler. Tillämpningar av trippelintegraler

4.1 Multipelintegraler

En naturlig inledning till studiet av multipelintegraler är att utreda notationen.

Definition 5.1

Om $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ betyder $\int f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n)dx_1dx_2\dots dx_n$.

Multipelintegraler har många, för det mesta abstrakta, tillämpningar inom matematiken. Exempelvis kan de användas för att beräkna n-dimensionella hypervolymer.

Sats

Låt $B_n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ resp. $\mu_n = \mu(B_n) = \int_{B_n} d\mathbf{x}$. För volymen av ett klot med radie 1 i en godtycklig dimension har vi följande rekursionsformel

$$\mu_1 = 2, \mu_2 = \pi, \dots, \mu_n = \frac{2\pi}{n} \mu_{n-2}, \forall n \geq 3.$$

För att göra en kontroll av satsen ovan räcker det med att betrakta μ_3 . Vi vet att $\mu_1 = 2$. Enligt rekursionsformeln är då $\mu_3 = \frac{2\pi}{3} \mu_1 = \frac{4\pi}{3}$, vilket stämmer överens med volymen för ett klot med radie 1. Intressant att studera är även fallet för ett klot med godtycklig radie, se lemmat nedan.

Lemma

För $r > 0$, låt $B_{n,r} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq r\}$. Då är $\mu(B_{n,r}) = r^n \mu_n$.

Bevis av lemmat

Variabelbytet $\mathbf{x} = r\mathbf{y}$ har Jacobimatrix $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} = r\mathbf{I}$, vilket implicerar att dess Jacobideterminant är $\frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{y}} = r^n$ (linjär algebra). Detta ger oss

$$\mu(B_{n,r}) = \int_{\|\mathbf{x}\| \leq r} d\mathbf{x} = \int_{\|\mathbf{y}\| \leq 1} r^n d\mathbf{y} = r^n \mu_n.$$

Beviset är därmed klart.

Bevis av satsen

Låt oss betrakta fallet där $n \geq 3$. Vi har då att

$$1 \geq \|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \iff x_{n-1}^2 + x_n^2 = 1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2. \quad (3)$$

Om vi fixerar $x_1, \dots, x_{n-2}$ blir 3 en cirkelskiva med radie $\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2}$. Projektionen av B_n på $x_1 \dots x_{n-2}$ -planet blir då B_{n-2} . Volymen av B_n är således

$$\mu_n = \int_{B_{n-2}} \left(\iint dx_{n-1} dx_n \right) dx_1 \dots dx_{n-2} = \pi \int_{B_{n-2}} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2 \right) dx_1 \dots dx_{n-2}. \quad (4)$$

Vidare ska vi använda nivåytor i $n-2$ dimensioner. Låt $g(x_1, \dots, x_{n-2}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-2} x_i^2}$, vilket medför att $h(u) = 1 - u^2$. Metoden för integrering med nivåytor ger att $\mu_n = \int_0^1 h(u) V'(u) du$ där $V(u)$ är den $(n-2)$ -dimensionella volymen av B_{n-2} . Lemmat ovan ger oss att $V(u) = u^{n-2} \mu_{n-2}$. Med andra ord är

$$\mu_n = \pi \int_0^1 (1 - u^2) \frac{d}{du} (u^{n-2} \mu_{n-2}) du = \dots = \frac{2\pi}{n} \mu_{n-2}.$$

Satsen är därmed bevisad.

Definition 5.2.

Gammafunktionen definieras som

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0,$$

och har egenskaperna

- $\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$
- $\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \geq 0 \in \mathbb{Z}, \Gamma(1) = 0! = 1$
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Gammafunktionen visade sig vara användbar (i vår situation) för bl.a. beräkningen av volymen av B_n ,

$$\mu_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)} \quad \forall n \geq 1.$$

4.2 Tillämpningar av trippelintegraler

Trippelintegralernas tillämpningar inom fysik är många. Bl.a. används de i samband med beräkning av medelvärden och föremåls massa, masscentrum samt tröghetsmoment.

4.2.1 Massa

Om ett föremål ockuperar ett kompakt område $D \subseteq \mathbb{R}^3$ och har densitet $\rho = \rho(x, y, z)$ ges dess massa av

$$M = \iiint_D \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

4.2.2 Medelvärden

Medelvärdet av $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ på $D \subseteq \mathbb{R}^3$ är

$$\bar{f}_D = \frac{1}{\mu(D)} \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \frac{\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_D dx dy dz}.$$

4.2.3 Masscentrum

Masscentrum är medelvärdet av positionerna av ett föremåls massa och ges av

$$\bar{m} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix},$$

där

$$m_x = \iiint_D x \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

Storheterna m_y och m_z beräknas analogt.

4.2.4 Tröghetsmoment

Tröghetsmomentet kring en axel L ges av

$$I_L = \iiint_D \rho(x, y, z) d^2 dx dy dz,$$

där $d = d(x, y, z)$ är avståndet från punkten (x, y, z) till L .

5 Kurvor

Nedanstående innehåll presenterades i föreläsning 15, 13 februari 2023.

5.1 Definition

Låt $a \leq t \leq b$ där $a, b, t \in \mathbb{R}$. En vektorvärd funktion $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ med värdemängd $\vec{r} = (r_1(t), \dots, r_n(t))$ av klass C^k kallas en parametriserad och orienterad C^k -kurva i $\mathbb{R}^n$. Här är $\vec{r}(a)$ startpunkt och $\vec{r}(b)$ slutpunkt. Kurvan är sluten om $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$. Kurvan är också enkel om $a \leq t_1 < t_2 < b \implies \vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_2)$, dvs korsar inte sig själv.



(a) Enkel, ej sluten



(b) Enkel, sluten



(c) Ej enkel, ej sluten



(d) Ej enkel, sluten

- Kan tolkas fysikaliskt som en partikel vid position $\vec{r}(t)$ vid tiden t , med början i $\vec{r}(a)$ och slut i $\vec{r}(b)$.
- Samma bana, men baklänges, uppnås genom att sätta $\vec{s} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\vec{s}(t) = \vec{r}(b + a - t)$, $a \leq t \leq b$.
- Kurvor med samma bild och orientering betraktas som identiska, inklusive kurvor som uppkommer genom parameterbyte.

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) & \quad \forall t \in [a, b] \\ \vec{r}(\varphi(u)) & \quad \forall u \in [c, d] \end{aligned}$$

ger alltså samma kurva om $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ är en strängt växande funktion. Alternativt ger

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) & \quad \forall t \in [a, b] \\ \vec{s}(\varphi(t)) & \quad \forall t \in [a, b] \end{aligned}$$

samma kurva om $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ är en strängt växande funktion som uppfyller likheten $\vec{r}(t) = \vec{s}(\varphi(t))$.

5.2 Hastighet, fart och acceleration

Om $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ är en C^1 -kurva och $t \in [a, b]$ tolkas som tid, kallas

- vektorn $\vec{r}'(t)$ hastigheten vid tid t .
- skalären $\|\vec{r}'(t)\|$ farten vid tid t .

Om $\vec{r}: [a, b]$ är en C^2 -kurva kallas dessutom

- vektorn $\vec{r}''(t)$ accelerationen vid tid t .

5.3 Längd

Om $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ är en C^1 -kurva:

- Hastighetsvektorn $\vec{r}'(t)$ är en tangent till kurvan i samma riktning.
- På infinitesimal tid dt rör sig en partikel sträckan $d\vec{r} = \vec{r}'(t)dt$ med längd $ds = \|d\vec{r}\| = \|\vec{r}'(t)\|dt$
- Totala längden på kurvan, L , blir $L = \int_a^b ds = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\|dt$
- Längden av kurvan beror ej på parametrisering eller orientering enligt *exempel 3*, s123-124 i *PB*, (*sats*).

5.4 Specialfall

Kurvan av en funktionsgraf $f(x)$ i $\mathbb{R}^2$ parametriseras naturligt enligt

$$\begin{aligned}\vec{r}: [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto (x, f(x))\end{aligned}$$

$$\vec{r}'(x) = (1, f'(x)) \implies \|\vec{r}'(x)\| = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

och grafens längd L ges av $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

5.5 Skalarprodukt

För två vektorvärda funktioner $\vec{u}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ och $\vec{v}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ av klassen C^1 ges derivatan av

$$\frac{d}{dt}(\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t)) = \vec{u}'(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \cdot \vec{v}'(t)$$

enligt s125 i *PB*, (*sats*).

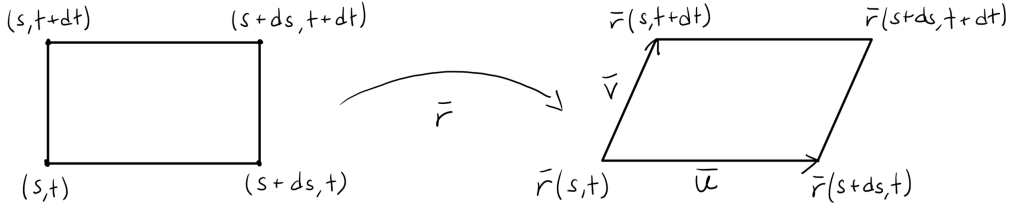
6 Ytor

Definition

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt och kvadrerbar mängd. En C^k -funktion $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ kallas för en parametriserad C^k -yta. ($k \geq 0, n \geq 2$)

6.1 Ytarea

Vi studerar en infinitesimal rektangel:



Arean för detta parallelogram kan uttryckas: $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$
Vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ kan linjärt approximeras till följande:

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}(s+ds, t) - \mathbf{r}(s, t) \approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} ds$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}(s, t+dt) - \mathbf{r}(s, t) \approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} dt$$

En infinitesimal del av ytan dS blir följande:

$$dS = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right\| ds dt$$

Den totala ytarean av ett visst område D ges av:

$$\iint_D dS = \iint_D \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right\| ds dt$$

6.2 Specialfall 1

Ytan ges av en funktionsgraf $f(x, y)$

$$\{Y = (x, y, z) : (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2, z = f(x, y)\}$$

Detta ger en naturlig parametrisering: $\mathbf{r}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_x \end{pmatrix}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_y \end{pmatrix} \implies \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\| = \sqrt{f'^2_x + f'^2_y + 1}$$

Ytarean ges då av:

$$\iint_D \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1} \, dx dy \quad (5)$$

6.3 Specialfall 2

Nivåyta till en funktion $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\{Y = (x, y, z) : F(x, y, z) = C, (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2\}$$

Med hjälp av den implicita funktionssatsen existerar en funktion F så att $z = f(x, y)$ och

$$f'_x = \frac{-F'_x}{F'_z}, f'_y = \frac{-F'_y}{F'_z}$$

Med insättning i (5) och förenkling ges följande dubbelintegral som också är ett uttryck för ytarean:

$$\iint_D \frac{\|\nabla F\|}{|F'_z|} dx dy, \quad F'_z \neq 0$$