

Tavelpresentation 2E

Hassan Abla, Anton Rosvall, Elliott Retzlaff och Angel Strömstedt

January 2023

1 Föreläsning 1

1.1 Taylorutvecklingar

Taylorutvecklingar är omskrivningar av funktioner till oändliga summor av funktioners derivator i en bestämd punkt.

1.2 Notation ordo

Om f, g definierade på $D \subseteq \mathbb{R}^n$ så betyder $f = \mathcal{O}(g)$ att det existerar något $c \in \mathbb{R}$ så $|f(\vec{x})| < c|g(\vec{x})| \forall \vec{x} \in D$.

1.2.1 Taylorutvecklingar i en variabel

Låt D vara en omgivning kring $x = a$, $f \in \mathcal{C}^{k+1}(D)$ och $[a + |h|, a - |h|] \subseteq D$.

För små h gäller då att

$$f(a + h) = \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} h^{k+1} \quad (1)$$

för något ξ mellan a och $a + h$. Den sista termen kan skrivas som $\mathcal{O}(h^{k+1})$ då $f \in \mathcal{C}^{k+1}(D)$.

1.2.2 Taylorutvecklingar i två variabler

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ska utvecklas kring $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Antag $f \in \mathcal{C}^{k+1}$ och fixera h_1, h_2 och låt $F(t) = f(a + th_1, b + th_2)$. Sätt $t > 0$. Enligt ekvation (1) blir

$$F(t) = \sum_{j=0}^k \frac{F^{(j)}(0)}{j!} t^j + \frac{F^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} t^{k+1} \quad (2)$$

för något $\xi \in (0, t)$.

Enligt kedjeregeln är

$$F'(t) = f'_x(a+th_1, b+th_2) \frac{d}{dt}(a+th_1) + f'_y(a+th_1, b+th_2) \frac{d}{dt}(b+th_2) = (h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y}) f|_{(a+th_1, b+th_2)}. \quad (3)$$

Låt $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ och $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$. Med relationen i ekvation (3) och våra nya vektorer kan vi skriva

$$F^{(j)}(0) = \left((\vec{h} \cdot \nabla)^j f \right) (\vec{a}). \quad (4)$$

Således blir ekvation (2)

$$f(\vec{a} + \vec{h}) = \sum_{j=0}^k \frac{((\vec{h} \cdot \nabla)^j f)(\vec{a})}{j!} + \frac{((\vec{h} \cdot \nabla)^{k+1} f)(\vec{\xi})}{(k+1)!} \quad (5)$$

för något $\xi \in [a, a+h]$. $f \in \mathcal{C}^{k+1}$ och $|h_1| \leq \|\vec{h}\|$, $|h_2| \leq \|\vec{h}\|$ så $\frac{(\vec{h} \cdot \nabla)^{k+1} f(\vec{\xi})}{(k+1)!}$ kan skrivas som $\mathcal{O}(\|\vec{h}\|^{k+1})$ enligt vår notation. Taylorutvecklingen blir alltså

$$f(\vec{a} + \vec{h}) = \sum_{j=0}^k \frac{((\vec{h} \cdot \nabla)^j f)(\vec{a})}{j!} + \mathcal{O}(\|\vec{h}\|^{k+1}). \quad (6)$$

1.2.3 Taylorutvecklingar i n variabler

Taylorutvecklingar är likadana som i ekvation (6) för $n \geq 2$.

$$\text{Låt } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \text{ och } \nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Då blir

$$f(\vec{a} + \vec{h}) = \sum_{j=0}^k \frac{((\vec{h} \cdot \nabla)^j f)(\vec{a})}{j!} + \mathcal{O}(\|\vec{h}\|^{k+1}). \quad (7)$$

1.3 Exempel på Taylorutvecklingar

För $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ska utvecklas kring $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ med hjälp av ekvation (6). För $k = 2$:

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + (hf'_x + kf'_y)|_{(a,b)} + \frac{1}{2} (h^2 f''_{xx} + 2hk f''_{xy} + k^2 f''_{yy})|_{(a,b)} + \mathcal{O}(\|\vec{h}\|^3) \quad (8)$$

2 Föreläsning 2

2.1 Definition Lokala Extrempunkter

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ har en lokal extrempunkt i $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ om det finns en omgivning Ω av $\vec{a}$ så att $f(\vec{x}) \leq f(\vec{a})$ eller $f(\vec{x}) \geq f(\vec{a}) \forall \vec{x} \in \Omega$.

2.2 Sats 2.6.11

Om $f(\vec{x})$ har ett lokalt extremvärde i en inre punkt av definitionsmängden $\vec{a}$ och funktionen f är partiellt deriverbar så är $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$.

2.2.1 Bevis

Betrakta linjer genom $\vec{a}$ som är parallella med koordinat-axlarna. Resultatet följer av motsvarande sats för funktioner av en variabel. Följande funktion:

$$x_i \mapsto f(a_1, \dots, x_j, \dots, a_n) \quad (9)$$

har ett lokalt extremvärde i

$$x_i = a_i \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \Rightarrow \nabla f(\vec{a}) = \vec{0}. \quad (10)$$

□

2.3 Stationära punkter

2.3.1 Definition

Om $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$ kallas $\vec{a}$ en stationär punkt.

2.3.2 Klassificering av stationära punkter

Låt $\vec{a} = (a, b)$ och $\vec{h} = (h, k)$. Antag också att $\vec{a}$ är en stationär punkt till funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Taylorutveckling av f ger följande :

$$f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) = \frac{1}{2} \cdot \left(h^2 \cdot f''_{xx} + 2 \cdot h \cdot k \cdot f''_{xy} + k^2 \cdot f''_{yy} \right) + \mathcal{O} \left(\|\vec{h}\|^3 \right) \quad (11)$$

ty $\vec{a}$ är en stationär punkt vilket innebär att $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$. Vänsterledets $(f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}))$ tecken avgör om den stationära punkten $\vec{a}$ är en maximum punkt, minimum punkt eller annat.

Tecknet på följande funktion $Q(\vec{h}) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$, där $A = f''_{xx}$, $B = f''_{xy}$, $C = f''_{yy}$ kommer också avgöra om den en stationära punkten $\vec{a}$ är en maximum punkt, minimum punkt eller annat. Detta beror på att $Q(\vec{h}) = \mathcal{O} \left(\|\vec{h}\|^2 \right) \gg \mathcal{O} \left(\|\vec{h}\|^3 \right)$ för väldigt små $\vec{h}$.

Därför dominerar $Q(\vec{h})$ resttermen $\mathcal{O}(\|\vec{h}\|^3)$, vilket betyder att resttermen inte kommer ha någon påverkan på tecknet av högerledet i ekvation (3).

2.4 Extrempunkter

Funktionen $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är på kvadratisk form.

2.4.1 Definition och implikationer

1. $Q(\vec{x})$ är positivt definit om $Q(\vec{x}) > 0 \quad \forall \vec{x} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{a}$ strängt lokalt minimum.
2. $Q(\vec{x})$ är negativt definit om $Q(\vec{x}) < 0 \quad \forall \vec{x} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{a}$ strängt lokalt maximum.
3. $Q(\vec{x})$ är indefinit om funktionen antar både positiva och negativa värde $\Rightarrow \vec{a}$ är en sadelpunkt.
4. $Q(\vec{x})$ är positivt semidefinit om $Q(\vec{x}) \geq 0 \quad \forall \vec{x} \neq \vec{0}$. Längre Taylorutveckling behövs för mer info om $\vec{a}$.
5. $Q(\vec{x})$ är negativt semidefinit om $Q(\vec{x}) \leq 0 \quad \forall \vec{x} \neq \vec{0}$. Längre Taylorutveckling behövs för mer info om $\vec{a}$.

2.4.2 Matrisformulering

Låt matrisen $M = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$. Då är funktionen $Q(\vec{h}) = \vec{h}^T \cdot M \cdot \vec{h} = \begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ah + Bk \\ Bh + Ck \end{bmatrix} = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$.

Determinanten av matrisen M kommer avgöra vilken typ av extrempunkt $\vec{a}$ är. Följande regler gäller:

1. $\det(M) > 0$ och $A > 0 \Rightarrow Q(\vec{h})$ är positivt definit.
2. $\det(M) > 0$ och $A < 0 \Rightarrow Q(\vec{h})$ är negativt definit.
3. $\det(M) < 0 \Rightarrow Q(\vec{h})$ är indefinit.
4. $\det(M) = 0 \Rightarrow Q(\vec{h})$ är semidefinit.

Definitionen av matrisen är $n \times n$ -matris, vi definierar även vektorn $\vec{h} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow Q(\vec{h}) = \vec{h}^T \cdot M \cdot \vec{h}$. På så vis är funktionen Q på kvadratisk form där $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Matrisen M är en reell symmetrisk matris $\Rightarrow \exists$ ortogonal matris S så att $S^{-1} = S^T$ och en diagonal matris L vilket tillsammans ger att $M = SLS^T$.

Andra villkor som avgör tecknet på funktionen $Q(\vec{h})$ är följande:

1. Alla egenvärden till matrisen M är positiva $\Leftrightarrow Q(\vec{h})$ är positivt definit.
2. Alla egenvärden till matrisen M är negativa $\Leftrightarrow Q(\vec{h})$ är negativt definit.

3. Egenvärden till M är anta både positiva och negativa värden $\Leftrightarrow Q(\vec{h})$ är indefinit.
4. Egenvärde antar värdet 0 innebär att $Q(\vec{h})$ är semidefinit.

3 Föreläsning 3

3.1 Vektorvärda funktioner

En vektorvärd funktion är en funktion som har sin värdemängd i $\mathbb{R}^p, p > 1$. Exempelvis om vi har $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ kan funktionen skrivas som

$$\vec{f}(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n)). \quad (12)$$

Varje $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, p$, är skalärvärda funktioner av n stycken variabler. Detta leder till att $\vec{f}$ är differentierbar i $\vec{a}$ om alla f_i är det i $\vec{a}$. Om man gör detta antagande kan vi linjärisera enligt följande:

$$\begin{aligned} \exists \rho_i : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \text{ så att} \\ f_i(\vec{a} + \vec{h}) - f_i(\vec{a}) &= \nabla f_i \cdot \vec{h} + |\vec{h}| \rho_i(\vec{h}) \\ \text{där } \rho_i(\vec{h}) &\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \forall i = 1, \dots, p. \end{aligned} \quad (13)$$

3.1.1 Funktionalmatris/Jacobimatrix

Skriver vi ut varje funktions gradient,

$$\begin{aligned} \nabla f_1 &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right) \\ \nabla f_2 &= \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right) \\ &\vdots \\ \nabla f_p &= \left(\frac{\partial f_p}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

så ser vi att man kan samla vektorerna i en $p \times n$ -matris och får vi följande:

$$\vec{f}' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Denna matris kallas för funktionalmatrisen av $\vec{f}$ och betecknas som $\vec{f}'$. Matrisen kan tolkas som en multidimensionell gradient för en vektorvärd funktion.

3.1.2 Funktionaldeterminant/Jacobideterminant

Tar vi determinanten av en funktionalmatris får vi vad man kallar för funktionaldeterminanten av en vektorvärd funktion. För definitionen av determinanter krävs en kvadratisk matris, alltså $\vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Determinanten ser då ut som följande:

$$\det(\vec{f}') = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}. \quad (16)$$

3.2 Inversa funktionsatsen (IFS)

Vid ett specialfall av vektorvärda funktioner, då $\vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, bildas ett n -dimensionellt vektorfält. För sådana vektorvärda funktioner kan funktionaldeterminanten undersökas och ge information kring $\vec{f}$'s beteende. Detta leder till nästa sats - inversa funktionsatsen (IFS).

Sats 3.3.2 (IFS)

Låt $\vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\vec{f} \in \mathcal{C}^1(D)$, $\vec{a} \in D$ så att $\det(\vec{f}'(\vec{a})) \neq 0$

Då finns öppna omgivningar U kring $\vec{a}$ och V kring $\vec{f}(\vec{a})$ så att:

$$\begin{aligned} \vec{f}: U &\rightarrow V \text{ är bijektiv,} \\ \vec{f}^{-1}: V &\rightarrow U \text{ är } \mathcal{C}^1\text{-funktion.} \end{aligned} \quad (17)$$

3.3 Kedjeregeln

Låt $\vec{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\vec{f}: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ vara två differentierbara funktioner och antag att vektorn $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ är en inre punkt i $D(\vec{g})$ och att $\vec{g}(\vec{a})$ är en inre punkt i $D(\vec{f})$. Låt även $\vec{t} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^p$ och $\vec{g}(\vec{t}) \in \mathbb{R}^p$. Vi får då den i :te komponenten av sammansättningen $\vec{f} \circ \vec{g}$ genom $(\vec{f} \circ \vec{g})_i(\vec{t}) = f_i(\vec{g}(\vec{t}))$. Med denna funktion, f_i , kan vi använda tidigare regler för kedjeregeln gällande skalärvärda funktioner av flera variabler.

$$\begin{aligned} f_i: \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R} \\ \Downarrow \\ \frac{\partial}{\partial t_j} (\vec{f} \circ \vec{g})_i(\vec{t}) &= \nabla f_i(\vec{g}(\vec{t})) \cdot \frac{\partial \vec{g}(\vec{t})}{\partial t_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial t_j} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (18)$$

Radmatrisen och kolonnmatrisen vi får i slutet är rad i respektive kolonn j i funktionalmatrisen $(\vec{f} \circ \vec{g})'(\vec{t})$. Adderar vi för $\forall i, j$ så får vi den allmänna formeln för kedjeregeln för vektorvärda funktioner,

$$(\vec{f} \circ \vec{g})'(\vec{t}) = \vec{f}'(\vec{g}(\vec{t})) \vec{g}'(\vec{t}). \quad (19)$$

4 Föreläsning 4

4.1 Koordinatbyten i $\mathbb{R}^n$

Ett giltigt koordinatbyte måste kunna inverteras. Om $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{y}$ så ska $\vec{x} = \vec{f}^{-1}(\vec{y})$

Inversa funktionssatsen ger att det är möjligt att invertera i en omgivning av $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ om funktionaldeterminanten, $\det(\vec{f}'(\vec{a})) \neq 0$.

4.1.1 Polära koordinater

Polära koordinater är en typ av koordinatbyten. Om vi har en punkt i planet, (x, y) . Så vill vi uttrycka den i (r, θ) istället. Vilket ger oss:

$$x = r \cos(\theta) \quad (20)$$

$$y = r \sin(\theta), \quad (21)$$

och vi ska ju också kunna gå åt andra hållet, dvs:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (22)$$

$$\theta = \arctan(y/x), \text{ för } x > 0. \quad (23)$$

Om vi använder inversa funktionssatsen här, och tar determinanten av funktionalmatrisen så framgår det att $\det(\vec{f}'(\vec{a})) = 0$ i origo. Vilket innebär att koordinatbytet inte är giltigt där. Detsamma gäller vid $x = 0$, för då går det inte att göra omvandlingen $\theta = \arctan(y/x)$. Det uppstår även problem vid $x < 0$. Bevisligen ska koordinatbyten användas med försiktighet.

4.1.2 Sfäriska koordinater

Om vi har en punkt i rummet, alltså (x, y, z) , men vill uttrycka det i (r, θ, φ) .

På samma sätt som för polära koordinater ska man kunna gå mellan koordinaterna, och givetvis få samma punkt. Om vi gör detta och tar fram funktionaldeterminanten får vi $\frac{d(x,y,z)}{d(r,\theta,\varphi)} = r^2 \sin(\theta)$, vilket blir 0 i origo, samt när $\theta = 0, \pi$ för då blir funktionaldeterminanten 0.

4.1.3 Implicita funktioner

Om $F(x, y) = C$, när kan vi lösa ut y ? Vi kan tänka oss flera olika nivåkurvor. T.ex. $1 = yx$, där kan vi se att $y = 1/x$. Men i andra fall, exempelvis enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ så är det inte lika enkelt att lösa ut y eller x även om vi vet den andra variabeln. Vi kan t.ex. se att $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Så även om vi vet x , kan vi i allmänhet inte bestämma y entydigt. Vi kan däremot bestämma y entydigt i vissa omgivningar till punkterna.

Det leder oss till implicita funktionssatsen som säger följande:

Låt $F(x, y)$ vara C^1 funktion och (a, b) en punkt på nivåkurvan $F(x, y) = C$. Om $F'_y(a, b) \neq 0$ finns det en omgivning U av (a, b) så att restriktionerna av nivåkurvan implicit definierar en C^1 funktion. Vi har $y = f(x)$, alltså kan vi skriva $f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$.