

Tavelpresentation grupp 5B

Elliot Duchek
Jonatan Holmquist
Hugo Modin Askliid
Alexander Jonsson
Jozef Zoltan
Noah Tingbratt

februari 2023

1 Föreläsning 7/2, integraler över begränsade mängder och trippelintegraler

1.1 Integraler över begränsade mängder

För att integrera över områden som inte är eller kan delas upp i axelparallella rektanglar kan man använda en s.k. nollutvidgning av mängden för att fortsätta kunna integrera området.

Definition 1.1. Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ vara en begränsad funktion i den begränsade mängden $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Låt Δ vara en axelparallell rektangel så att $D \subseteq \Delta$ och

$$f_D(\bar{x}) = \begin{cases} f(\bar{x}), & \bar{x} \in D \\ 0 & \text{annars} \end{cases}. \quad (1)$$

Då är $\iint_D f(x, y, z) dx dy dz := \iint_\Delta f_D(x, y, z) dx dy dz$ om integralen existerar.

Lemma 1. Om f är likformigt kontinuerlig och begränsad på en kvadrerbar mängd D så är f integrerbar över D .

Notera att om $f \in C^0(D)$ kan f_D bli diskontinuerlig på randen till D . Randen kan dessutom bli för stor. Ett exempel på detta är s.k. "space filling curves" där randen till funktionen fyller upp hela mängden. Funktionerna måste därför åtminstone vara styckvis C^1 .

Exempel 1.1. Låt f vara en icke-integrerbar funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad (2)$$

Om $\Phi \leq f \leq \Psi$ och Φ och Ψ är trappfunktioner så kommer varje delintervall innehålla både rationella och irrationella punkter

$$\Phi(x) \leq 0, \Psi \geq 1 \quad \forall x \in [0, 1] \Rightarrow \int_0^1 \Psi dx - \int_0^1 \Phi dx \geq 1 \neq 0 \quad (3)$$

och kan ej integreras med Riemannintegraler.

1.2 Trippelintegraler

I stort är idéerna för dubbelintegraler överförbara på trippelintegraler, till exempel går de fortfarande att beräkna med Fubinis sats över reguljära områden. Ett praktiskt användningsområde för trippelintegraler är volymberäkningar. Låt $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vara ett kompakt och kvadrerbart område. Då är volymen av D

$$\mu(D) = \iiint_D 1 dx dy dz.$$

Samma integral kan även skrivas som

$$\iiint_D dV$$

där volymelementet $dV = dx dy dz$. Om D är ett reguljärt område (utöver kompakt och kvadrerbart) ges det av

$$D = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in E, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$$

där $E \subset \mathbb{R}^2$ är projektionen av D på xy -planet. Notationsmässigt skrivs detta $E = \pi(D)$.

Beräkning av trippelintegraler med hjälp av Fubinis sats kan göras på två sätt.

1.2.1 Fubini 2+1

Integralen delas upp i en enkelintegral och en dubbelintegral enligt

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\pi(D)} \left(\int_{z=\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

1.2.2 Fubini 1+2

Integralen delas upp i en enkelintegral och en dubbelintegral enligt

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

där $a, b \in \mathbb{R}$ och D_z är snittet av D vid höjd z . Vilken variant av Fubini man väljer att använda beror på integralen man ska beräkna. I vissa fall kan den ena vara lättare att räkna än den andra, och i vissa fall går integralen inte att beräkna alls om man väljer fel indelning av den.

1.2.3 Nivåytor

Vissa trippelintegraler kan, som dubbelintegraler, beräknas även med nivåytor. Om integralen ges av

$$\iiint_D h(g(x, y, z)) dx dy dz$$

kan den skrivas om som

$$\int_a^b h(u) V'(u) du$$

där $a \leq g(x, y, z) \leq b \forall (x, y, z) \in D$ och

$$V(u) = \mu(\{(x, y, z) \in D \mid g(x, y, z) \leq u\}).$$

2 Föreläsning 9/2: Trippel- och multipelintegraler

2.1 Multipelintegraler

Notation: Om $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ betyder det att

$$\int f(\bar{x}) d\bar{x} = \int \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Exempel: (s. 297) Det n -dimensionella enhetsklotet ges av

$$B_n = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n; \|\bar{x}\| \leq 1\},$$

där volymen av B_n ges av

$$\mu_n = \mu(B_n) = \int_{B_n} d\bar{x}.$$

Sats: Rekursionsformeln för volymen μ_n av B_n är

$$\mu_1 = 2, \mu_2 = \pi, \mu_n = \frac{2\pi}{n} \mu_{n-2}, n \geq 3.$$

Lemma: Det n -dimensionella klotet med radie r då $r > 0$ ges av

$$B_{n,r} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n; \|\bar{x}\| \leq r\} \Rightarrow \mu(B_{n,r}) = r^n \mu_n.$$

2.2 Gammafunktionen

Definition: Gammafunktionen definieras

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Gammafunktionen har följande egenskaper:

- $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$
- $\Gamma(n+1) = n!$
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Volymen av enhetsklotet B_n då $n \geq 1$ kan uttryckas med gammafunktionen enligt

$$\mu_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}, n \geq 1.$$

Den $(n-1)$ -dimensionella sfären S_{n-1} ges av

$$S_{n-1} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n; \|\bar{x}\| = 1\},$$

där ytarean A_n kan uttryckas med gammafunktionen enligt

$$A_n = \frac{d}{dr} \mu(B_{n,r})|_{r=1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

2.3 Tillämpningar av trippelintegraler

Massa: Massan M för ett föremål som ockuperar ett kompakt område $D \subseteq \mathbb{R}^3$ och har densitet $\rho = \rho(x, y, z)$ ges av

$$M = \iiint_D \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

Medelvärde: Medelvärdet $\bar{f}_D$ av $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ på $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ges av

$$\bar{f}_D = \frac{1}{\mu(D)} \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \frac{\iiint_D f dx dy dz}{\iiint_D dx dy dz}.$$

Masscentrum: Masscentrumet $\bar{m}$ för ett föremål är medelvärdet av positionerna av föremålets massa M och ges av

$$\bar{m} = (m_x, m_y, m_z), m_x = \frac{1}{M} \iiint_D x \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

m_y och m_z uttrycks analogt.

Tröghetsmoment: Tröghetsmomentet kring en axel L , där $a = a(x, y, z)$ är det vinkelräta avståndet från (x, y, z) till L , kan uttryckas

$$I_L = \iiint_D \rho a^2 dx dy dz.$$

3 Föreläsning 13/2, kurvor

3.1 Kurvor

Definition: Låt $a \leq b$. En C^k kurva $\bar{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ där $t \mapsto \bar{r}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$ kallas en orienterad och parametriserad C^k -kurva. $\bar{r}(a)$ är kurvans startpunkt och $\bar{r}(b)$ dess slutpunkt. Om $\bar{r}(a) = \bar{r}(b)$ kallas kurvan *sluten*. Informellt kan detta ses som att kurvan börjar i dess slut. Om kurvan är injektiv kallas den enkel, vilket kan ses som att den inte skär sig själv. Formellt tolkas detta som att

$$a \leq t_1 < t_2 \leq b \implies \bar{r}(t_1) \neq \bar{r}(t_2)$$

3.2 Fysikalisk tolkning

En fysikalisk tolkning av kurvor är en partikel som vid tidpunkten t har positionen $\bar{r}(t)$. Om $\bar{r}$ är C^1 kan kurvans derivata:

- $\bar{r}'(t)$ tolkas som hastigheten vid tiden t
- $\|\bar{r}'(t)\|$ tolkas som farten vid tiden t

Är kurvan C^2 kan accelerationen skrivas som $\bar{r}''(t)$

3.3 Längden av en kurva

Om man studerar en partikels rörelse över en infinitesimal tid dt kan den ändrade positionen skrivas som $d\bar{r} = \bar{r}'dt$. Längden av den vandrade sträckan blir då $ds = \|d\bar{r}\| = \|\bar{r}'\|dt$, där ds kallas längdelementet. Med hjälp av detta kan kurvans totala längd L skrivas som:

$$L = \int_a^b ds = \int_a^b \|d\bar{r}\| = \int_a^b \|\bar{r}'\|dt \quad (4)$$

3.4 Kurva är funktionsgraf

Kurvan från en envariabelfunktions graf kan parametriseras så här:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto (x, f(x)) \end{aligned}$$

Då är $\mathbf{r}'(x) = (1, f'(x))$ och $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

3.5 Derivata av skalärprodukt

3.5.1 Sats

Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara C^1 , då

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}'$$

3.5.2 Bevis

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)) &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n u_i(t)v_i(t) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} u_i(t)v_i(t) = \\ &= \sum_{i=1}^n (u_i'(t)v_i(t) + u_i(t)v_i'(t)) = \sum_{i=1}^n u_i'(t)v_i(t) + \sum_{i=1}^n u_i(t)v_i'(t) = \\ &= \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)\end{aligned}$$

v.s.v.

4 Föreläsning 14/2, ytor

Låt $D \subseteq \mathbf{R}$ vara en kompakt och kvaderbar mängd. En C^k funktion $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbf{R}^n$ kallas paramriserad C^k -yta, $k \geq 0, n \geq 2$.

Den infinitesimala arean av en funktion, $\mathbf{r} : (s, t) \rightarrow (\mathbf{u}, \mathbf{v})$, blir

$$dS = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right\| ds dt,$$

vilket kallas areaelement. Ytarean av en parametriserad C^1 -yta är

$$\int \int_D dS = \int \int_D \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right\| ds dt.$$

4.1 Specialfall 1

Ett specialfall är $Y = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in C \subseteq \mathbf{R}^2, z = f(x, y)\}$. Parametrise-
ringen

$$\begin{aligned}\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{bmatrix} &\Rightarrow \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_x \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_y \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f'_x \\ -f'_y \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\| = \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1},\end{aligned}$$

det leder till att ytarean av specialfallet är

$$\int \int_D \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1} \, dx dy.$$

4.2 Specialfall 2

$F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$.

$$Y = \{(x, y, z) \mid F(x, y, z) = C, (x, y) \in D \subseteq \mathbf{R}^2\},$$

Antag $F'_z \neq 0$ på hela Y . Enligt Implicita funktionssatsen existerar det f lokalt på D så att $(x, y, f(x, y)) \in Y$ och $f'_x(x, y) = \frac{-F'_x(x, y, f(x, y))}{F'_z(x, y, f(x, y))}$, $f'_y(x, y) = \frac{-F'_y(x, y, f(x, y))}{F'_z(x, y, f(x, y))}$.
 Insatt i specialfall ett ger att

$$\text{Ytarean} = \iint_D \sqrt{\left(\frac{-F'_x}{F'_z}\right)^2 + \left(\frac{-F'_y}{F'_z}\right)^2 + 1} dxdy = \iint_D \frac{\|\nabla F\|}{|F'_z|} dxdy.$$

Det innebär att ytarean kan beskrivas av

$$\iint_D \frac{\|\nabla F\|}{|F'_z|} dxdy,$$

om $F'_z \neq 0$.