

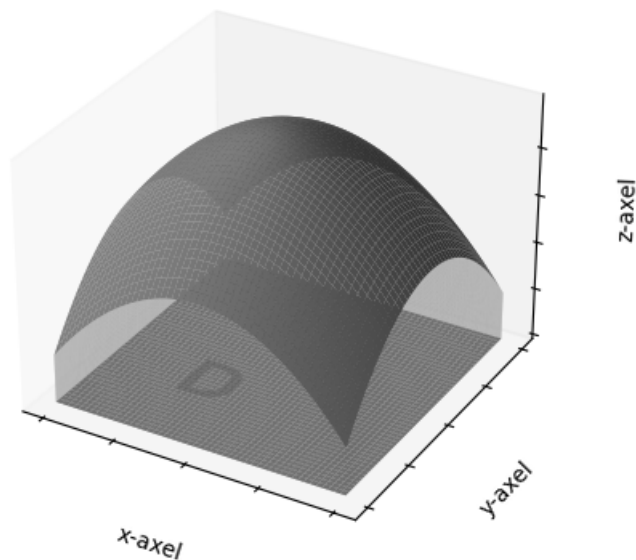
Sammanfattning av läsvecka 4 & 5

Erik Albinsson, Joel Gyllenstedt, Albin Schmidt,
Lisa Böckert Åman & Fredrik Frones

February 2023

1 Dubbelintegralers definition och Fubinis sats

En dubbelintegral är integralen över en viss mängd i $\mathbb{R}^2$ vars innebörd visas i figur 1. Vi skriver en dubbelintegral som $\iint_D f(x, y) dx dy$ och i figur 1 så är denna integral representerad som den signerade volymen över mängd D . Att en dubbelintegral är samma som en kurvas area över ett område kommer vara viktigt för vidare i texten.



Figur 1: visuell representation av en dubbelintegral som volymen under en kurva över ett visst område D

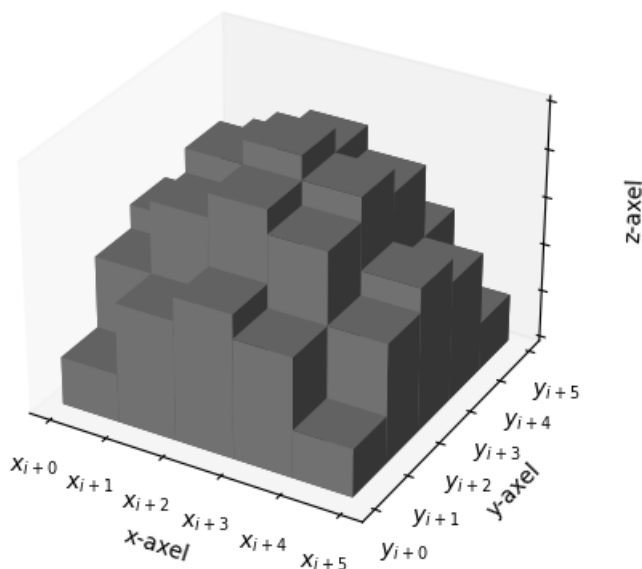
En dubbelintegral olik en enkelintegral är ej en antiderivata av en flerva-

riabel funktion då det ej går att generalisera en antiderivata till flervariabel funktioner. Men man kan ändå beräkna en dubbelintegral på liknande sätt som en Riemann integral. Dock istället för att dela upp en funktion i rektanglar så delas funktionen i rätblock med hjälp av trappfunktioner, ett exempel av en sådan finns i figur 2. En trappfunktion ϕ är definierad i ett område $\Delta = [a, b] \times [c, d]$. Detta område delas vidare upp i delområden

$$\Delta_{ij} = (x, y); x_{i-1} \leq x < x_i, y_{j-1} \leq y < y_j$$

där x_i och y_j är definierade som mängderna $x_i \in [a, b], y_j \in [c, d]$. Vidare finns det en mängd konstanter c_{ij} som ϕ sedan antar i en motsvarande mängd Δ_{ij} . Alltså säger vi att

$$\phi(x, y) = c_{ij} \text{ då } (x, y) \in \Delta_{ij}.$$



Figur 2: visuell representation av en trappfunktion där vi ser hur för i indelningarna Δ_{ij} så är funktionen konstant och ger oss rätblock med höjderna c_{ij}

En trappfunktion har den hjälpsamma egenskapen att

$$\iint_{\Delta} \phi(x, y) dx dy = \sum_{i,j} c_{ij} \mu(\Delta_{ij})$$

där då μ ger arean av Δ_{ij} . För att sedan få en definition med hjälp av dessa trappfunktioner tar vi två trappfunktioner $\phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ och förutsätter att f är

integrerbar. Därefter sätter vi att

$$\begin{aligned}\phi_\varepsilon(x, y) &\leq f(x, y) \leq \psi_\varepsilon(x, y), \forall (x, y) \in \Delta \\ \iint_{\Delta} \psi_\varepsilon(x, y) dx dy - \iint_{\Delta} \phi_\varepsilon(x, y) dx dy &< \varepsilon, \forall \varepsilon\end{aligned}$$

vilket om man har en godtyckligt fin uppdelning av området Δ så kan man uppfylla detta. Därmed får man att om $\varepsilon \rightarrow 0$ blir

$$\iint_{\Delta} \psi_\varepsilon(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} \phi_\varepsilon(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy. \quad (1)$$

1.1 Fubinis sats

Med hjälp av resultatet från ekvation 1 kan vi få fram Fubinis sats, men först måste vi betrakta att man kan få ut en dubbelintegral definierat i en mängd i samma form som Δ genom den upprepade integralen

$$I = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

som ofta skrivs

$$I = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

om vi tar då och betraktar f som en trappfunktion (som vi vet vi kan göra från ekvation 1) inser vi snabbt att man får en Riemann integral om man integrerar den över x-axeln, vi kallar denna integral I_x och denna integral är då beroende av y . Därefter får man en till Riemann integral om man integrerar I_x över y axeln, denna kallar vi I_{xy} . Därmed kan man påvisa på grund av Riemann integralens definition och ekvation 1 att I_{xy} är dubbelintegralen av f och att $I_{xy} = I$. Vidare är det trivialt att bevisa Fubinis sats som följer att

$$I = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

då man kan gå genom samma process, men byta axlarna och få samma resultat.

2 Integral över en godtycklig begränsad mängd

Def. Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ vara begränsad där $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är en begränsad mängd. Låt Δ vara en axelparallell rektangel. Om $D \subseteq \Delta$ och

$$f_D(\bar{x}) = \begin{cases} f(\bar{x}) & \text{om } \bar{x} \in D \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

innebär det att

$$\iint_D f \, dx \, dy = \iint_\Delta f_D \, dx \, dy$$

om integralen existerar.

Värt att notera är att oavsett val av Δ kommer resultatet vara det samma på grund av att f_D är noll utanför området D . Dessutom är det inte självklart att f_D är en integrerbar funktion. Om $f \in C^0(D)$ skulle f_D kunna bli diskontinuerlig på randen ∂D . Det innebär alltså att ∂D inte får bli för stor. Skulle ∂D vara en nollmängd är det också ekvivalent med att mängden D är kvadrerbar. För att veta om f_D är integrerbar finns ett lemma som kan hjälpa.

Lemma. Om f är likformigt kontinuerlig och begränsad på en kvadrerbar mängd D så är f integrerbar över D .

3 Trippelintegraler: Volymberäkningar

Trippelintegraler kan tillämpas för att beräkna volymer.

Def. Låt området $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vara en kompakt och kvadrerbar mängd. Volymen över området betecknas då $\mu(D)$ och beräknas med hjälp av en trippelintegral enligt

$$\mu(D) = \iiint_D dx \, dy \, dz.$$

3.1 Två sätt att integrera med hjälp av Fubinis sats

3.1.1 Sätt 1: Fubini 2+1”

I det första sättet delas trippelintegralen i två delar där den första delen som beräknas är en envariabelintegral med avseende på antingen x , y eller z . För att integrera över området som definieras av $D = \{(x, y, z) : (x, y) \in E, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$ används trippelintegralen

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_E \left(\int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) dx \, dy$$

där E är projektionen av området D på (i detta fallet) xy -planet.

3.1.2 Sätt 2: Fubini 1+2”

Det andra sättet att beräkna en trippelintegral är genom att dela upp den så att den första delen som integreras är en dubbelintegral och den andra är en envariabelintegral enligt

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b \left(\iint_{D_x} f(x, y, z) \, dy \, dz \right) dx$$

där D_x är ett parallellt plan med yx -planet genom punkten $(x, 0, 0)$ som skär ut området D . a och b är de yttre gränserna för mängden av alla x -värden som ger alla icke-tomma skärningar mellan D_x och D .

4 Kurvor

Definition

Bilda funktionen $\bar{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ där $a \leq b$ och variabeln $t \in [a, b]$. Då gäller att $\bar{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ och om $x_1, \dots, x_n$ är C^k -funktioner kallar man $\bar{r}$ en parametriserad och orienterad C^k -kurva i $\mathbb{R}^n$.

4.1 Orienteringsbyte och parametriseringar

Om vi byter $\bar{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mot $\bar{s} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ där $\bar{s}(t) = \bar{r}(a + b - t)$ bildas samma C^k -kurva men vi ser att $\bar{s}(a) = \bar{r}(b)$ och $\bar{s}(b) = \bar{r}(a)$. Alltså är det motsatt orientering.

Om $\bar{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ och $\bar{u} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ är C^k -kurvor, de är då olika parametriseringar av samma C^k -kurva om det finns en bijektiv och växande C^k -funktion $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ så att $\bar{r}(t) = \bar{u}(\varphi(t)) \quad \forall t \in [a, b]$.

4.2 Tillämpningar

4.2.1 Position, hastighet, fart och acceleration

Definition

Låt $\bar{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Om vi ser kurvan som en bana för en partikel som rör sig från $\bar{r}(a)$ till $\bar{r}(b)$, ges partikelns position av $\bar{r}(t)$. Om $\bar{r}$ är en C^1 -kurva gäller även att $\bar{r}'(t)$ kallas för hastigheten och $\|\bar{r}'(t)\|$ kallas för farten. Hastigheten vid en punkt t kan ses som tangentvektorn för kurvan vid punkten t . Om $\bar{r}$ även C^2 -kurva kallar vi $\bar{r}''(t)$ för accelerationen.

4.2.2 Längd

Låt $\bar{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara en C^1 -kurva. Då gäller det att på en infinitesimal tid dt rör sig partikeln sträckan $d\bar{r} = \bar{r}'(t)dt$ vilket har längden $ds = \|\bar{r}'(t)\|dt$ där ds kallas för ett längdelement på kurvan. Därmed ges totala längden av kurvan av

$$L = \int_a^b ds = \int_a^b \|\bar{r}'(t)\| dt.$$

Sats

Längden av en C^1 -kurva beror ej på parametrisering eller orientering.

5 Skalarprodukt

Sats

Om $\bar{u} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\bar{v} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ är två C^1 -kurvor. Då gäller att

$$\frac{d}{dt}(\bar{u}(t) \cdot \bar{v}(t)) = \bar{u}'(t) \cdot \bar{v}(t) + \bar{u}(t) \cdot \bar{v}'(t).$$

6 Ytor

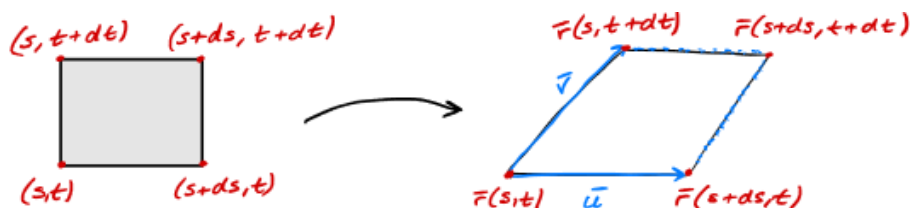
Definition: Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en kompakt samt kvadrerbar mängd.

För $k \geq 0, n \geq 2$, kallas en C^k -funktion $\bar{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ för en parametriserad C^k -yta.

6.1 Yteare i 3 dimensioner

$\bar{r} \in C^1, \bar{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3, (s, t) \rightarrow [x(s, t), y(s, t), z(s, t)]^T$

Studera en infinitesimal axelparallell rektangel i D som avbildas på $\bar{r}$:



Där $\bar{u} = \bar{r}(s + ds, t) - \bar{r}(s, t)$ som när linjariserad blir $\frac{\bar{r}(s + ds, t) - \bar{r}(s, t)}{ds} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial s}$

och på samma sätt $\bar{v} = \bar{r}(s, t + dt) - \bar{r}(s, t) \Rightarrow \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}$. Arean av den infinitesimala

avbildningen blir då $dS = \left\| \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \right\|$ känt som areaelementet.

Ytarean av den parametriserade C^1 -funktionen blir då som följande:

$$\iint_D dS = \iint_D \left\| \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \right\| ds dt *$$

6.2 Specialfall 1

Ytan ges av en funktionsgraf; $Y = \{(x, y, z) | x, y \in D \subseteq \mathbb{R}^2, z = f(x, y)\}$ ger den naturliga parametreringen $\bar{r} = [x, y, f(x, y)]^T$ där

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_x \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f'_x \\ -f'_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

som när insatt i * ger dig att ytarean är lika med

$$\iint_D \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1} dx dy **$$

6.3 Specialfall 2

Ytan kan beskrivas med nivåötor; $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$Y = \{(x, y, z) | F(x, y, z) = C, x, y \in D \subseteq \mathbb{R}^2\}$ och $F'_z \neq 0$ på hela Y . Då säger IFS (implicita funktions satsen) att det existerar ett f sådan att $z = f(x, y)$

och $f'_x = \frac{F'_x}{F'_z}$, $f'_y = \frac{F'_y}{F'_z}$. Insättning i ** ger $\iint_D \sqrt{\left(\frac{F'_x}{F'_z}\right)^2 + \left(\frac{F'_y}{F'_z}\right)^2 + 1} dx dy =$

$$= \iint_D \frac{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}{|F'_z|} dx dy = \iint_D \frac{||\nabla F||}{|F'_z|} dx dy \quad * * *$$

7 Multipelintegraler

En multipelintegral är en integral i n-dimensioner, tex. en trippelintegral är en multipelintegral där $n = 3$. Notation ser ut så här. Då $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ så är $\int f(\bar{x})d\bar{x} =$

$$\underbrace{\int \int \dots \int}_{n \text{ integraler}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Formaliseringen av multipelintegraler ger oss möjligheten att skapa en formel för volymen av en n-dimensionell boll i form av en rekursionsformel;

Låt $B_n = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : ||\bar{x}|| \leq 1\}$

Låt $\mu_n = \mu(B_n) = \int_{B_n} 1 d\bar{x}$ Vi har då att

- $\mu_1 = 2$
- $\mu_2 = \pi$
- $\mu_n = \frac{2\pi}{n} \mu_{n-2}$

8 Gammafunktionen

Gammafunktionen definieras som:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \Re(z) > 0 \quad (2)$$

Gamma funktionen kan ses som en förlängning av fakultet till de komplexa talen (interpolation). Den har flera intressanta egenskaper som:

- $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$
- $\Gamma(n) = (n-1)! \quad n \in \mathbb{N}$
- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

Gamma funktionen kan också användas för att beskriva volymen av en n-dimensionell boll. $\mu_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$

9 Tillämpningar av trippelintegraler inom fysik

9.1 Massa

Ett föremål vars densitet i en punkt i $\mathbb{R}^3$ definieras av en funktion $\rho(x, y, z)$ och som finns i ett kompakt område $D \subseteq \mathbb{R}^3$ har en massa som ges av $M = \iiint_D \rho(x, y, z) dx dy dz$ Medelvärdet av föremålets densitet, kan då bestämmas med

$$\rho' = \frac{M}{\mu(D)} = \frac{\iiint_D \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_D 1 dx dy dz} \quad (3)$$

Eller medelvärde av andra intensiva storheter, till exempel temperatur;

$$\bar{f}_D = \frac{1}{\mu(D)} \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \quad (4)$$

där $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ i en kompakt mängd $D \subseteq \mathbb{R}^3$

9.2 Masscentrum

Masscentrum är den genomsnittliga positionen av ett föremåls massa i rummet, kan definieras som punkten

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} M_{x_1} \\ M_{x_2} \\ M_{x_3} \end{bmatrix} \quad (5)$$

där $M_{x_n} = \frac{1}{\mu(D)} \iiint_D x_n \rho(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3$

9.3 Tröghetsmoment

Tröghetsmomentet kring en axel L är

$$I = \iiint_D \rho d^2 dx dy dz \quad (6)$$

Där $d = d(x, y, z)$ är avståndet från axeln L i punkten (x, y, z) , exempelvis om axeln hade varit y -axeln hade funktionen $d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + z^2}$.