

Tavelpresentation Grupp 5E LP3

Daniel Abrahamsson, Felix Nettby, Felix Dahlin, Axel Sahlstedt Zachrisson
och Emil Olofsson

February 2023

1 Integral över begränsad mängd

I denna kursen har vi tidigare gått igenom definitionen av en dubbelintegral över en axelparallell rektangel Δ . Men givetvis finns det ett behov av att integrera över allmännare typer av områden än Δ . Det är av denna anledning som vi utvidgar integralbegreppet.

Definition: Låt $f(x, y)$ vara en begränsad funktion på en begränsad mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Låt Δ vara en axelparallell rektangel så $D \subseteq \Delta$. Inför den utvidgade funktionen

$$f_D(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{när } (x, y) \in D \\ 0 & \text{när } (x, y) \notin D \end{cases}$$

Då är f **integrerbar över** D om f_D är integrerbar över Δ som omfattar D .

$$\iint_D f \, dx dy = \iint_{\Delta} f_D \, dx dy$$

Utifrån den utvidgade definitionen av integralbegreppet kan vi göra flera observationer:

- Alla möjliga val av Δ ger samma resultat.
- Om $f \in \mathcal{C}^0(D)$ så kan f_D bli diskontinuerlig på randen ∂D . Randen ∂D får därmed inte bli för stor.
- Det är oklart om f_D är integrerbar över Δ .

Men vi har ett lemma som vi kan använda oss av för att avgöra om en funktion f är integrerbar över en mängd D .

Lemma: Om f är (likformigt) kontinuerlig och begränsad på en kvadrerbar mängd D , så är f integrerbar över D .

Notera att detta är bara tillräckliga villkor, och att det finns funktioner utöver de som täcks av lemmat som också är integrerbara.

2 Trippel och multipelintegraler

För att lösa trippelintegraler används samma idéer och metoder som för dubbelintegraler.

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vara ett kompakt kvadrerbart område. Då är volymen:

$$\mu(D) = \iiint 1 \, dx dy dz.$$

Här är volymelementet $dV = dx dy dz$.

Det är vanligt att D är ett område mellan två funktioner. Till exempel:

$$D = \left\{ (x, y, z) : (x, y) \subseteq E, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y) \right\} \quad (1)$$

där E är projektionen av D på xy -planet med beteckningen $\pi(D) = E$.

För att lösa en trippelintegral över området D används primärt Fubinis 2+1 sats:

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \iint_{\pi(D)} \left(\int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} dz \right) dx dy.$$

Alternativt Fubinis 1+2 sats:

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_a^b \left(\iint_{D_z} f \, dy dz \right) dx.$$

Där D_z är ett snitt av D vid höjd z .

Cylindriska koordinater: Fungerar på samma sätt som polärkoordinater i xy -planet men med z som extra koordinat. Vi har alltså variablebytet $(x, y, z) \rightarrow (\rho, \theta, z)$

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta), \\ y = \rho \sin(\theta), \\ z = z. \end{cases} \quad (2)$$

Volymelementet blir $dx dy dz = \rho \, d\rho d\theta dz$.

Sfäriska koordinater: Har värdemängden av en sfär med radien r och medelpunkt i origo. Variabelbytet är $(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \phi)$, där θ är vinkeln från positiva z -axeln till vektorn (x, y, z) och ϕ är vinkeln mellan positiva x -axeln och projektionen av (x, y, z) på xy -planet

$$\begin{cases} x = r \sin(\theta) \cos(\phi), \\ y = r \sin(\theta) \sin(\phi), \\ z = r \cos(\theta). \end{cases} \quad (3)$$

Volymelementet blir $dV = dx dy dz = r^2 \sin(\theta) \, dr d\theta d\phi$.

Notation: Om $\bar{x} \subseteq \mathbb{R}^n$ är:

$$\int f(\bar{x}) \, d\bar{x} = \iint \cdots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) \, dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad (4)$$

2.1 Volymberäkning

Låt $B_n = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\bar{x}\| \leq 1\}$, det vill säga det n -dimensionella enhetsklotet, och låt μ_n vara volymen av detta klot. Med hjälp av induktion går det att visa att μ_n kan bestämmas med den rekursiva formeln:

$$\mu_n = \frac{2\pi}{n} \mu_{n-2}, \quad \forall n \geq 3$$

Beviset innefattar bland annat beräkning med nivå-ytor. Både formeln för volymen och ytarean av enhetsklotet, A_n , kan även skrivas på explicit form. Dessa formler är:

$$\mu_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)},$$

$$A_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

I båda formler dyker Gammafunktionen, $\Gamma(x)$, upp. Den är definierad som följande:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

$\Gamma(x)$ är en interpoleringsformel av fakulteten och har alltså bland annat egenskapen att $\Gamma(x+1) = x!$, $\forall x \in \mathbb{N}$.

2.2 Massa och masscentrum

Massan av ett objekt som ockuperar ett kompakt område $D \subseteq \mathbb{R}^3$ kan beräknas med trippelintegralen:

$$M = \iiint_D \varrho(x, y, z) dx dy dz,$$

där $\varrho(x, y, z)$ är objektets densitet som funktion av x , y och z . Masscentrumet av objektet, vars koordinater är $\bar{m} = (m_x, m_y, m_z)$, kan beräknas med en trippelintegral:

$$m_x = \frac{1}{M} \iiint_D x \varrho(x, y, z) dx dy dz.$$

m_y och m_z beräknas analogt. Notera att $\varrho(x, y, z)$ kan förkortas om densiteten är konstant eftersom $\varrho(x, y, z)$ också är en faktor i M .

3 Kurvor

Definition: Låt $a \leq b$. En funktion $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ av klass $\mathcal{C}^k$ kallas en parametriserad och orienterad $\mathcal{C}^k$ -kurva i $\mathbb{R}^n$.

Startpunkten på kurvan blir då $\vec{r}(a)$ och slutpunkten $\vec{r}(b)$. Det finns många olika sätt för en kurva att "slingra" sig. Om:

$$\vec{r}(a) = \vec{r}(b) \quad (5)$$

kallas kurvan sluten. En kurva kan även vara enkel om:

$$a \leq t_1 < t_2 < b \Rightarrow \vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_2). \quad (6)$$

Detta innebär i praktiken att kurvan inte korsar sig själv. I fysikaliska sammanhang kan man tänka att en partikel rör sig från $\vec{r}(a)$ och har position $\vec{r}(t)$ vid tiden t .

Man kan byta orientering på en kurva så att det blir samma bana fast baklänges. Vi byter vår vektorvärda funktion $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mot $\vec{s}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ så att $\vec{s}(t) = \vec{r}(b + a - t)$, $a \leq t \leq b$.

Till synes olika kurvor kan vara olika parametriseringar av samma kurva. Ifall $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ och $\vec{s}: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ är $\mathcal{C}^k$ -kurvor så är de olika parametriseringar av samma $\mathcal{C}^k$ -kurva om $\exists \varphi: [a, b] \rightarrow [c, d]$ växande bijektiv $\mathcal{C}^k$ -funktion så att $\vec{r}(t) = \vec{s}(\varphi(t)) \quad \forall t \in [a, b]$.

3.1 Hastighet, fart, acceleration

Definition: Låt $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara en $\mathcal{C}^1$ -kurva och $t \in [a, b]$. $\vec{r}'(t)$ kallas hastighet vid tid t . $\|\vec{r}'(t)\|$ kallas fart.

Viktigt är att $\vec{r}'(t)$ är en vektor medan $\|\vec{r}'(t)\|$ är en skalär. Om $\vec{r}$ är $\mathcal{C}^2$ -kurva är accelerationen $\vec{r}''(t)$ vid tiden t .

Längd: Låt $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara $\mathcal{C}^1$ -kurva. Hastighets vektorn $\vec{r}'(t)$ är tangent till kurvan i samma riktning (positiv) på infinitesimal tid dt rör sig partikeln sträckan $d\vec{r} = \vec{r}'(t)dt$ med längd $ds = \|d\vec{r}\| = \|\vec{r}'(t)\|dt$. Den totala längden på kurvan blir då:

$$L = \int_a^b ds = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt. \quad (7)$$

4 Ytor

Definition: Låt $D \in \mathbb{R}^2$ vara en kompakt och kvadrerbar mängd där $k \geq 0, n \geq 0$. En $\mathcal{C}^k$ -funktion som $\vec{r} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ är en parametriserad $\mathcal{C}^k$ -yta.

Notation: Man säger att $\vec{r} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Parametriseringen kallas ofta för (s, t) med parametrarna s och t enligt

$$\vec{r}(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t)). \quad (8)$$

Ytarean för en parametriserad $\mathcal{C}^k$ -yta härleds med hjälp av en infinitesimal axelparallell rektangel i D med hörn i (s, t) , $(s, t + dt)$, $(s + ds, t)$, $(s + ds, t + dt)$.

För avbildningen $\vec{r}$ finns två intressanta vektorer $\vec{u}$ och $\vec{v}$ där

$$\vec{u} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} ds, \vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} dt \quad (9)$$

Ytarean ges då av

$$\iint dS = \iint \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right\| ds dt \quad (10)$$

där dS är areaelementet.

Specialfall: Ytan ges av en funktionsgraf enligt följande

$$Y = \{(x, y, z) | (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2, z = f(x, y)\} \quad (11)$$

Där x och y är naturliga parametrar. Därav ges ytan av

$$\vec{r} = (x, y, f(x, y)). \quad (12)$$

Med samma relation för vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$ som ovan så går det att uttrycka i partiella derivator enligt

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right), \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right). \quad (13)$$

Detta betyder att ytarean ges av följande uttryck

$$\iint \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1} dx dy. \quad (14)$$