

Tavelpresentation grupp 6E

Sophie Dahlgren
Oskar Jonsson

24-02-2023

1 Föreläsning 1 - Kurvintegraler

Under föreläsning 1 behandlades kurvintegralers definition samt satser kring dessa.

1.1 Definitioner av mängder relevanta till kurvintegraler

En mängd är *sammanhängande* om den inte kan delas upp i två icke-tomma delmängder χ och Ψ d.v.s.

$$\bar{\chi} \cap \Psi = \emptyset \quad \text{och} \quad \chi \cap \bar{\Psi} = \emptyset.$$

En mängd $M \subseteq \mathbb{R}^n$ är *bågvis sammanhängande* om varje par av punkter i M kan förbindas med en $\mathcal{C}^0$ -kurva helt i M .

En bågvis sammanhängande öppen mängd $D \subseteq \mathbb{R}^n$ kallas domän.

1.2 Kurvintegraler

Låt

$$\vec{F} = (P(\vec{r}), Q(\vec{r})) = (P(x, y), Q(x, y))$$

vara ett kontinuerligt vektorfält definierat i en öppen mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Om γ är en orienterad $\mathcal{C}^1$ -kurva i D med parameterframställningen

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t)), \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

så kallas integralen

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t))x'(t) + (Q(x(t), y(t))y'(t)) dt$$

för **kurvintegralen** av fältet $\vec{F} = (P, Q)$ längs kurvan γ och betecknas med

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{eller} \quad \int_{\gamma} P dx + Q dy.$$

Kurvintegraler har två viktiga egenskaper som formuleras i en sats som lyder att:

- (i) I är oberoende av parametreringen.
- (ii) I byter tecken vid orienteringsbyte.

1.3 Vidare notationer för kurvintegraler

1. I rummet kan vi skriva:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}, \quad d\vec{r} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \quad \text{s.a.}$$

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz.$$

2. Låt $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ vara $\mathcal{C}^1$ -kurvor och $\text{slut}(\gamma_i) = \text{start}(\gamma_{i+1})$, $i = 1, 2, \dots, k-1$ så att

$$\gamma = \sum_{i=1}^k \gamma_i$$

där γ är en styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva. Då gäller att

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

där ordningen är viktig p.g.a. orientering (*Följ kurvan*).

3. Om γ är en kurva så är $-\gamma$ kurvan med motsatt orientering och därmed gäller enligt satsen, för godtyckligt $\vec{F}$, att

$$\int_{-\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

4. Notationen

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

indikerar att γ är en sluten kurva och är även utav konvention positivt orienterad om γ är en enkel kurva.

1.4 Jordans kurvsats och orientering

Låt γ vara en enkel, sluten, $\mathcal{C}^0$ -kurva i $\mathbb{R}^n$. Då består $\mathbb{R}^n \setminus \gamma$ av exakt två sammanhängande komponenter. Komponenterna kallas insida (*begränsad*) och utsida (*obegränsad*).

Låt γ vara en enkel, sluten kurva i $\mathbb{R}^2$. γ är *positivt orienterad* om insidan ligger till vänster i färdriktningen och är *negativt orienterad* om insidan ligger till höger.

För tydligare notation av orientering på γ kan

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

användas för positiv orientering och

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

för negativ orientering.

1.5 Konservativa fält

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara domän och låt $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara ett vektorfält. $\vec{F}$ sägs vara konservativt eller ett potentialfält om

$$\exists \phi : D \rightarrow \mathbb{R} \text{ så att } \vec{F} = \nabla \phi. \quad (1)$$

ϕ är då en potential till $\vec{F}$.

2 Föreläsning 2 - konservativa fält

2.1 Sats 9.4.2 och två följsatser

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara domän och $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara konservativt fält med potentialen ϕ . För varje $\mathcal{C}^1$ - kurva $\gamma \in D$ gäller:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi(\vec{b}) - \phi(\vec{a})$$

där $\vec{a}$ och $\vec{b}$ är start- respektive slutpunkten för γ .

Av denna sats följer även två följsatser:

1. Integralen

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2)$$

beror endast på start- och slutpunkten för γ och är oberoende av vägen.

2. Om γ är en sluten kurva i D blir

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0. \quad (3)$$

2.2 Avgöra om $\vec{F}$ är konservativt eller inte

2.2.1 Sats 9.4.3

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara domän och $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara ett $\mathcal{C}^0$ -vektorfält. Om

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (4)$$

är oberoende av vägen eller ekvivalent med

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (5)$$

för varje $\mathcal{C}^1$ -kurva i D , så är $\vec{F}$ ett konservativt vektorfält.

2.2.2 Virvelfritt

För fallet $n = 2$ kan vi lättare bestämma om $\vec{F}$ är konservativt eller inte genom att undersöka om det är virvelfritt. Låt $\vec{F} = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$ vara C^1 -vektorfält i $\mathbb{R}^n$. $\vec{F}$ kallas virvelfritt om

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \quad (6)$$

Om $\vec{F}$ är konservativt $\implies \vec{F}$ är virvelfritt. Notera implikationspilen. Man kan alltså säga att $\vec{F}$ inte är konservativt om det inte är virvelfritt men om det är virvelfritt går det inte med säkerhet säga att det även är konservativt.