

Tavelpresentation 6A

Alice Jonson, Olle Lapidus, Harry Chu, Simon Eriksson,
Emil Sitell, Ensar Junuzovic

24 February 2023

1 Kurvintegraler

1.1 Definition

En mängd är *sammanhängande* om den inte kan delas upp i två icke-tomma delmängder X, Y med $\overline{X} \cap Y = \emptyset$ och $X \cap \overline{Y} = \emptyset$

1.2 Definition

En mängd $M \subseteq \mathbb{R}^n$ är *bågvis sammanhängande* om varje par av punkter kan förbindas med en C^0 -kurva helt i M .

Observera: Bågvis sammanhängande $\longrightarrow$ sammanhängande

1.3 Definition

En *domän* är en bågvis sammanhängande öppen mängd $D \subseteq \mathbb{R}^n$

1.4 Definition

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ domän, $\hat{r} : [a, b] \longrightarrow D$ en C^1 -kurva, $\hat{F} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ett C^0 vektorfält.

$$I = \int_a^b \hat{F}(\hat{r}(t)) \cdot \hat{r}'(t) dt$$

kallas *kurvintegralen* av $\hat{F}$ längs kurvan.

1.5 Sats

1. I är oberoende av parametrisering
2. I byter tecken vid orienteringsbyte

Bevis utelämnas.

1.6 Jordans kurvsats

Låt γ vara en enkel sluten C^0 -kurva i $\mathbb{R}^2$. Då består $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ av exakt två sammanhängande komponenter.

Bevis utelämnas.

1.7 Definition

Låt γ vara en enkel sluten kurva i $\mathbb{R}^2$. γ är positivt orienterad (moturs) om insidan av γ ligger till vänster om kurvan i färdriktningen och negativt orienterad om γ ligger till höger om kurvan i färdriktningen.

1.8 Konvention

Om γ är en enkel sluten kurva betyder $\oint_{\gamma} \hat{F} \cdot d\hat{r}$ positiv orientering. Värdet är oberoende av start- och slutpunkt.

1.9 Beräkning av kurvintegraler

A - Parametrisering av randen och envariabelintegration (flera C^1 -stycken)

B - Utnyttja potentialer för konservativa fält (Sats 9.4.2)

C - Greens sats (Sats 9.2.1)

2 Greens sats

2.1 Areaberäkning med Greens sats

Låt D vara ett kompakt område i planet vars rand ∂D består av en eller flera positivt orienterade styckvis C^1 -kurvor. Då kan arean av D beräknas med hjälp av en kurvintegral över randen enligt

$$\mu(D) = \iint_D 1 dx dy = \int_{\partial D} x dy = \int_{\partial D} -y dx.$$

Vi har här uttryckt arean med två olika kurvintegraler. Tillsammans ger de ännu ett uttryck för arean av D :

$$\mu(D) = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x dy - y dx$$

Beroende på hur parametriseringen av kurvan ser ut kan de olika formlerna vara olika användbara.

3 Konservativa fält

En viktig typ av kurvintegraler är de som ej beror på kurvans väg utan endast start och slutpunkterna för kurvan. Integralen $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ beror då inte på γ utan endast på start respektive slutpunkten. Detta kan formaliseras, men först behövs en definition.

3.1 Definition

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ domän, $\hat{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektorfält. $\hat{F}$ sägs vara *konservativt* eller ett *potentialfält* om $\exists \Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ så att $\hat{F} = \nabla \Phi$. Då är Φ en potential till fältet $\hat{F}$.

Om $\hat{F} \in C^0$ konservativt så är potentialen unik upp till en konstant.
 $\nabla \Phi_1 = \nabla \Phi_2 = \hat{F} \rightarrow \nabla(\Phi_1 - \Phi_2) = 0 \rightarrow \Phi_1 - \Phi_2 = \text{konstant}$

Med denna definition kan en viktig sats formuleras.

3.2 Sats 9.4.2

Låt $\subseteq \mathbb{R}^n$ domän, $\hat{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ konservativt fält med potential Φ . För varje C^1 -kurva i domänen D gäller

$$\int_{\gamma} \hat{F} \cdot d\hat{r} = \Phi(\hat{b}) - \Phi(\hat{a})$$

där $\hat{a}$ och $\hat{b}$ är start- och slutpunkter för γ .

Med denna sats kan kurvintegraler över konservativa fält beräknas som differensen mellan start och slutpunkten vilket kan förenkla räkningarna avsevärt. Om fältet ej är konservativt kan de fortfarande vara möjligt att dela upp fältet i en potentiell del och en icke-potentiell del i hopp om att den senare går att lösa med parameterisering. En ytterligare konsekvens ges som en följsats.

3.2.1 Följsats 9.4.2

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en domän. Om γ är en sluten kurva i D blir $\int_{\gamma} \hat{F} \cdot d\hat{r} = 0$.

Då alla vektor fält inte är konservativa är det av stort intresse att kunna ta reda på ifall ett specifikt fält är konservativt eller ej. Med vetskapen att varje konservativt fält har en potential kan man helt enkelt försöka ta fram en potential till fältet. Då $\hat{F} = (P, Q) = \nabla \Phi$ kan den fås fram genom att lösa följande system

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= P \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= Q. \end{aligned}$$

Om en potential kan hittas är fältet konservativt men det kan vara svårt att visa det motsatta, att systemet inte går att lösa. Det finns dock andra tillräckliga krav. För fallet $n = 2$ och $\hat{F} \in C^1$:

3.3 Definition

Låt $\hat{F} = (P, Q)$ vara ett C^1 vektorfält i $\mathbb{R}^2$. $\hat{F}$ kallas virvelfritt om

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Med detta begrepp följer nästa sats.

3.4 Sats 9.4.4

Om $D \subseteq \mathbb{R}^n$ och $\hat{F} \in C^1$ gäller $\hat{F}$ konservativt $\Rightarrow \hat{F}$ virvelfritt.

Notera att det endast ger implikation. För ekvivalens krävs något striktare krav på området.

3.5 Sats 9.4.5

Om D är en enkelt sammanhängande öppen del av planet och $\hat{F} \in C^1$ gäller $\hat{F}$ konservativt $\Leftrightarrow \hat{F}$ virvelfritt.

4 Ytintegraler

4.1 Definition

För parameterframställningen $\hat{r} = \hat{r}(s, t)$ där $(s, t) \in D$ av en yta Y , pekar ytans normalvektor $\frac{\partial \hat{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \hat{r}}{\partial t}$ mot den *positiva* sidan.

4.2 Definition

En strömtäthetsvektor $\hat{u}(\hat{r})$ ger skalärmultipliserat med den normerade positiva normalvektorn $\hat{N} = \hat{N}(\hat{r})$ till planet Y strömtäthetens komponent i normalens riktning. Flödet genom ett litet areaelement dS på ytan Y kan därför skrivas som $\hat{u} \cdot \hat{N}dS$.

4.3 Sats

Flödet Φ genom en yta Y är:

$$\Phi = \iint_Y \hat{u} \cdot \hat{N} dS$$

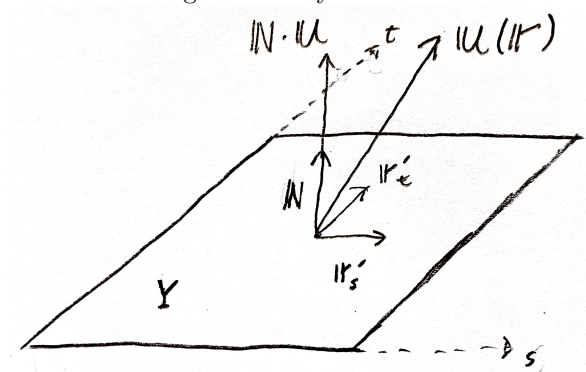
Eftersom $\hat{N} = \frac{\frac{\partial \hat{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \hat{r}}{\partial t}}{|\frac{\partial \hat{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \hat{r}}{\partial t}|}$ och $dS = |\frac{\partial \hat{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \hat{r}}{\partial t}| ds dt$ blir $\hat{N} dS = (\frac{\partial \hat{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \hat{r}}{\partial t}) ds dt$. Φ kan då skrivas om till

$$\Phi = \iint_Y \hat{u} \cdot \hat{N} dS = \iint_D \hat{u} \cdot \left(\frac{\partial \hat{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \hat{r}}{\partial t} \right) ds dt$$

4.4 Tolkning

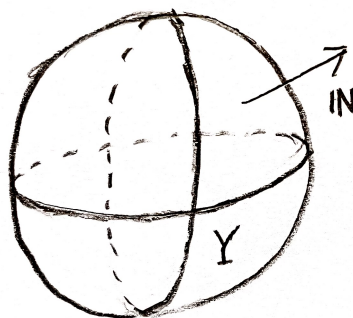
Φ är nettoflödet som passerar genom Y från den negativa till den positiva sidan. Ett negativt Φ tolkas som ett nettoflöde från den positiva till den negativa sidan.

Figure 1: En yta Y i $\mathbb{R}^3$



Om ytan Y sluter ett område i $\mathbb{R}^3$ tolkas Φ som nettoflödet in i eller ut ur området.

Figure 2: Ytan Y sluter ett klot i $\mathbb{R}^3$



5 Greens sats i rummet $\mathbb{R}^3$

5.1 Definition

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vara en domän, $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ett C^1 -vektorfält med komponenterna F_1 , F_2 och F_3 i x -, y - respektive z -led.

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

sägs då vara *divergensen* av $\vec{F}$

5.2 Definition

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vara en domän, $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ett C^1 -vektorfält med komponenterna F_1 , F_2 och F_3 i x -, y - respektive z -led.

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{bmatrix}$$

sägs då vara *rotationen* av $\vec{F}$.

5.3 Stokes sats

Betrakta D som ett ystykke i xy -planet i $\mathbb{R}^3$, ∂D som en kurva i $\mathbb{R}^3$ och låt

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ där } P \text{ och } Q \text{ är oberoende av } z.$$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \hat{z}$$

eftersom både P och Q är oberoende av z . Notera att $\hat{z}$ är en enhetsnormal till området D eftersom D ligger i xy -planet. Insättning i Greens sats ger nu att

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{N} dS,$$

där $dS = dx dy$ och är ytelementet till D och $\hat{N}$ är enhetsnormalen till D . Denna ekvation är ett specialfall av *Stokes sats*.

5.4 Gauss sats

Låt $\vec{G} = \begin{bmatrix} Q \\ -P \\ 0 \end{bmatrix}$ och betrakta högerledet i Greens sats,

$$HL = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \left(\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z} \right) dx dy$$

vilket kan skrivas om till

$$\iint_D \left(\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z} \right) dx dy = \iint_D (\nabla \cdot \vec{G}) dx dy.$$

Låt nu D^* vara cylindern i rummet med basyta D parallellt med xy -planet och höjden 1. Tillämpning av Fubinis sats ger

$$\iint_D (\nabla \cdot \vec{G}) dx dy = \iiint_{D^*} (\nabla \cdot \vec{G}) dx dy.$$

Betrakta nu vänsterledet i Greens sats som ges av

$$VL = \int_{\partial D} P dx + Q dy = \int_{\partial D} -G_2 dx + G_1 dy = \int_{\partial D} \vec{G} \cdot \begin{bmatrix} dy \\ -dx \\ 0 \end{bmatrix},$$

som med hjälp av Fubinis sats kan skrivas

$$\int_{\partial D} \vec{G} \cdot \begin{bmatrix} dy \\ -dx \\ 0 \end{bmatrix} = \iint_{\mu(\partial D^*)} \vec{G} \cdot \hat{N} dS,$$

där $\mu(\partial D^*)$ är mantelarea av ∂D^* , vektorn $\hat{N}$ är enhetsnormal till $\mu(D^*)$ och dS är areaelementet.

Notera att basytorna av D^* inte ger något bidrag då enhetsnormalen är vinkelrät mot $\vec{G}$. Tillsammans ger Greens sats alltså att

$$\iint_{\partial D^*} \vec{G} \cdot \hat{N} dS = \iiint_{D^*} \nabla \cdot \vec{G} dV.$$

Denna ekvation kallas för *Gauss sats*.