

Sammanfattning Föreläsningar Lv7

Albin Bertebo, Felix Rylander, Oskar Rasmussen, Edward Fritzell,
Elias Guedra och Lukas Sango

04/03-23

1 Gauß sats

1.1 Formulering av stats

Låt $\mathbf{F}$ vara definierat i ett $\mathcal{C}^1$ -vektorfält på den öppna mängden $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Om det finns ett kompakt område $K \subseteq \Omega$ med rand ∂K som består av en eller flera $\mathcal{C}^1$ -ytor orienterad med en normal utåt gäller att

$$\oint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F} dV. \quad (1)$$

1.2 Tillämpningar vid problemlösning

Satsen beskriver relationen mellan ett vektorfält som beskriver flödet genom en yta som omger mängden och en volymintegral. Mer specifikt säger satsen att flödet av ett vektorfält genom en yta är lika med volymsintegralen av fältets divergens över mängden som ytan omsluter. På detta sätt kopplar Gauß divergenssatsen samman två viktiga begrepp inom matematik: ytor och volymer.

2 Stokes sats

2.1 Definition av orientering av parametriserade ytor

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vara kompakt och kvadrerbar med en positivt orienterad rand ∂D som är styckvis $\mathcal{C}^1$. Låt $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara en $\mathcal{C}^1$ -funktion.

$Y = \mathbf{r}(D)$ kallas för en parametriserad yta och $\partial Y = \mathbf{r}(\partial D)$ kallas randen till Y .

Y sägs vara positivt orienterad om ∂Y ärver orienteringen av ∂D .

Det är viktigt att rätt riktning väljs när man integrerar längs den slutna kurvan, eftersom integralerna kommer att ha olika värden beroende på om man integrerar i medurs eller moturs riktning längs kurvan.

Orienteringen av en parametriserad kurva beskriver vilken kurvans positiva riktning är och kan ofta bestämmas enligt en enkel regel där man går runt kurvan i en riktning så att det inneslutna området ligger på vänster sida.

Genom att välja rätt orientering för den parametriserade kurvan som begränsar ytan, kan man se till att den integreras i rätt riktning längs kurvan, vilket garanterar att man får rätt resultat när man tillämpar Stokes sats.

2.2 Formulering av sats

Låt $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ vara öppen och $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara ett C^1 -vektorfält. Om Y är ett positivt orienterat yttstycke i Ω med positivt orienterad rand ∂Y . Då gäller

$$\oint_{\partial Y} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_Y (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}} dS. \quad (2)$$

Stokes sats säger att om vi har ett differentierbart vektorfält $\mathbf{F}$, och en yta Y som är begränsad av randen av Y , som vi kallar för ∂Y , då är integralen av vektorfältet längs den slutna kurvan ∂Y lika med integralen av rotationen av vektorfältet över ytan Y .

Stokes sats visar på ett matematiskt sätt hur flödet av ett vektorfält över en yta är relaterat till dess källor och svängningar längs kanten av ytan.

3 Virvelfritt vs. konservativt i $\mathbb{R}^3$

3.1 Sats 10.5.3

Låt $D \in \mathbb{R}^3$ domän, $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ett C^1 -fält. Då gäller $\mathbf{F}$ konservativt $\Rightarrow \mathbf{F}$ virvelfritt, dvs. $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$

Bewis:

Antag $\mathbf{F} = \nabla \phi$ med $\phi : D \rightarrow \mathbb{R} \in C^2$, dvs. $\mathbf{F}$ är konservativt.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ Enligt Clairauts sats } QED$$

3.2 Enkelt sammanhängande mängd i $\mathbb{R}^n$

Definition av enkelt sammanhängande mängd i $\mathbb{R}^n$.

En mängd $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sägs vara enkelt sammanhängande om:

- (1) M är bågvisst sammanhängande
- (2) Varje enkel, sluten kurva i M kan kontinuerligt deformeras till en punkt utan att lämna M .

OBS.

$\mathbb{R}^3 \setminus \{\textit{klot}\}$ och $\mathbb{R}^3 \setminus \{\textit{punkt}\}$ är enkelt sammanhängande. Däremot är $\mathbb{R}^3 \setminus \{\textit{linje}\}$ ej enkelt sammanhängande.

3.3 Sats 10.5.4

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^3$ enkelt sammanhängande domän. $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ett C^1 -fält. Då gäller att $\mathbf{F}$ virvelfritt $\Rightarrow \mathbf{F}$ konservativt

4 Nablaräkning

4.1 Laplacian

Definition av Laplacianen lyder:

Laplacianen av $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ är $\Delta F = \nabla^2 F = \nabla \cdot \nabla F$.

Vektorvärda funktioner $\mathbf{F}$ går också bra.

4.2 Rotationsfält

Definition av Rotationsfält:

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^3$ domän, $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$. $\mathbf{F}$ sägs vara ett rotationsfält om

$\exists \mathbf{G} : D \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{G} \subseteq C^1$ sådant att $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$. $\mathbf{G}$ kallas då vektorpotential till $\mathbf{F}$.

5 Maxwells ekvationer

Maxwells ekvationer är en uppsättning fyra partiella differentialekvationer som beskriver elektriska och magnetiska fält och hur de interagerar med varandra. De är en grundläggande del av elektromagnetismen och är centrala för förståelsen av en mängd fysikaliska fenomen, inklusive ljus, radiovågor och elektriska kretsar.

5.1 Maxwells första ekvation

Om man ställer upp ett uttryck för det elektriska fältet $\vec{E} \in C^1$ från en punktladdning som befinner sig i origo får man,

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2} \hat{r}. \quad (3)$$

Där $\hat{r} = \frac{1}{r}\vec{r}$, Q är laddningen och ϵ är en materialkonstant. Låt K vara klotet med radie R kring origo. Efter lite förenklingar i högerled kan flödet av fältet $\vec{E}$ upp genom sfären ∂K skrivas som,

$$\oint_{\partial K} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q}{\epsilon}. \quad (4)$$

Om man här skriver laddningen Q som en trippelintegral över laddningsfördelningen $\rho(x, y, z) \in C^0$ och tillämpar Gauß sats på vänsterledet får man

$$\iiint_K \nabla \cdot \vec{E} dV = \iiint_K \frac{\rho}{\epsilon} dV. \quad (5)$$

Eftersom integralerna skall vara lika för varje val av K måste integranderna vara lika vilket ger Maxwells första ekvation.

5.2 Maxwells andra ekvation

Maxwells andra ekvation säger att det magnetiska fältet är källfritt och kan härledas med hjälp av Gauß lag om magnetism där man sedan använder Gauß divergenssats, om dessa beräkningar utförs ges att

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (6)$$

5.3 Maxwells tredje ekvation

Maxwells tredje ekvation kan härledas ur Faradays induktionslag som lyder

$$\oint_{\partial Y} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \iint_Y \vec{B} \cdot \hat{N} dS. \quad (7)$$

Stokes sats används här på vänsterledet samt att derivatan flyttas in under integralen och blir en partialderivata, det nya uttrycket blir då

$$\iint_Y (\nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{N} dS = \iint_Y -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{N} dS \quad (8)$$

och eftersom att ekvationen skall gälla för en godtycklig yta Y måste integranderna vara identiskt lika. Vi får då

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (9)$$

som är Maxwells tredje ekvation.

5.4 Maxwells fjärde ekvation

Maxwells fjärde ekvation härleds ur Amperes lag genom att identifiera en brist i lagen och korrigera för denna. Detta ger efter förenklingar att,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \nabla \cdot (\mu \vec{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}). \quad (10)$$

Om man nu tillämpar Gauß divergenssats får man ut

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (11)$$

vilken är Maxwells fjärde ekvation.

5.5 Vågekvationen

En viktig lösning till uppsättningen av Maxwells ekvationer är den så kallade vågekvationen. Denna beskriver hur elektromagnetiska vågor utbreder sig i vakuum och att de har en utbredningshastighet $c = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ som per definition blir ljusets hastighet. Vågekvationen för elektriska fält ges av följande,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = c^2 \nabla^2 \vec{E}. \quad (12)$$

6 Optimering i kompakt områden på $\mathbb{R}^n$

Vi vill hitta ett största respektive minsta värde för funktionen

$$F : K \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad F \in \mathcal{C}^1 \quad \text{and} \quad K \in \mathbb{R}^n, \quad (13)$$

där K är ett Kompakt område. Att K är ett Kompakt område och att F är en $\mathcal{C}^1$ funktion har några viktiga implikationer som listas nedan:

- (A) F antar ett största och ett minsta värde.
- (B) Alla punkter i K är antingen inre punkter eller randpunkter.
- (C) $F(\mathbf{a})$ är en extrempunkt $\implies (\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ eller $\mathbf{a}$ är en randpunkt.
- (D) Randen till ∂K , är styckvis $\mathcal{C}^1$ där varje delyta Y_i är en $(n-1) - \dim$. $\mathcal{C}^1$ -yta. $\implies$ Vi kan hitta en $\mathcal{C}^1$ -parametrisering $\mathbf{r}_i : E_i \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ där $g_i = F(\mathbf{r}_i) : E_i \rightarrow \mathbb{R}$ är en $\mathcal{C}^1$ funktion av $(n-1)$ variabler på det kompakta området E_i . Det här i sin tur ger att (A), (B) och (C) kommer att gälla för g_i på E_i för alla i som hör till en delyta Y_i .

För att nu lösa vårt ovan presenterat optimeringsproblem så försöker vi hitta alla kandidater till max och min punkter. Dessa kandidater måste vara extrempunkter, (C) leder oss till

Steg1:

Hitta alla punkter där $\nabla F(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$

Dessa punkter $\mathbf{a}$ är kandidater till att vara våra extrempunkter. Enligt (B) och (C) återstår endast att undersöka om det finns extrempunkter på randen ∂K . För att göra detta skulle vi enligt (D) dela upp ∂K i $\mathcal{C}^1$ -ytstycken och parametrisera dessa. Enligt (D) så kan vi dessutom undersöka ∂K på samma sätt som vi gjort hittills eftersom att (A), (B) och (C) även gäller för parametriseringen av ∂K .

Steg2:

Dela upp Randen ∂K i $\mathcal{C}^1$ ytstycken och parametrisera varje yt-stycke Y_i som

$$\mathbf{r}_i : E_i \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \quad \text{där} \quad g_i = F \circ \mathbf{r}_i : E_i \rightarrow \mathbb{R} \quad (14)$$

Om parametreringen är av 0 variabler så fortsätt till Steg 3. Annars, börja om på steg 1 med g_i på E_i i för alla i :n som hör till en delyta Y_i .

När vi har undersökt alla möjliga kandidater till största och minsta värde så återstår endast att jämföra våra kandidater för att se vilket värde som är störst respektive minst.

Steg3:

Jämför våra kandidater.

Detta är en metod som alltid kommer att funka men kommer inte helt utan komplikationer. Exempelvis så kan det bli väldigt mycket beräkningar i högre dimensioner och speciellt om vi har flera ytstycken i våra ränder. En kub i $\mathbb{R}^3$ har 6 sidor, 12 kanter och 8 hörn som alla måste parametreras. I detta fall hade det varit smart att överväga en annan metod för att hitta extremvärden.

Ett exempel kan vara om man ska bestämma största och minsta värde av

$$f(x, y) = \frac{7y^2}{2(1 + 2x + 3y)} \text{ på } \mathbf{D} = [0, 1] \times [0, 1] \quad (15)$$

I detta fallet finns det en smart lösning som är:

$x \geq 0, y \geq 0$ i $\mathbf{D} \Rightarrow f(x, y) \geq 0$ i $\mathbf{D}$ och $f(x, y) = 0$ då $y = 0$ så minsta värde är $0 = f(x, 0)$

För att bestämma det största värdet så gör man likheter hela vägen då $x = 0$, $y = 1$

$$f(x, y) = \frac{7y^2}{2(1 + 2x + 3y)} \leq \frac{7y^2}{2(1 + 3y)} \leq \frac{7y^2}{2(y + 3y)} = \frac{7y}{8} \leq \frac{7}{8} \quad (16)$$

Detta ger då:

$$\begin{cases} f(x, 0) = 0 \leftarrow \text{Minsta värdet} \\ f(0, 1) = \frac{7}{8} \leftarrow \text{Största värdet} \end{cases} \quad (17)$$

Självklart skulle detta fungera med den vanliga metod men det skulle då ta längre tid.

7 Optimering på icke kompakta områden

Om $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}$ är en C^1 funktion med $\mathbf{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ inte är kompakt, finns ingen garanti för f Att anta extremvärden. Behöver undersöka existens

Huvudidé

Använd uppskattning för att visa att max/min inte kan finnas utanför ett visst kompakt område $\mathbf{K}$. Sök sedan max/min på $\mathbf{K}$

T.ex:

Om $\mathbf{D}$ obegränsat slutet område och $f(\vec{x}) \rightarrow 0$ då $\vec{x} \in \mathbf{D}$ och $\|\vec{x}\| \rightarrow \infty$ om man då kan hitta $\vec{a} \in \mathbf{D}$ där $f(\vec{a}) > 0$, $\exists R \in \mathbb{R}$ så att $f(\vec{x}) \leq \frac{f(\vec{a})}{2}$ om $\|\vec{x}\| \geq R$ och $\vec{x} \in \mathbf{D}$.

$\mathbf{K} = \mathbf{D} \cap \mathbf{B}_R$ kompakt

$f(\vec{x}) \leq f(\vec{a})$ om $\vec{x} \in \mathbf{D} \setminus \mathbf{K}$. Då måste f anta max på $\mathbf{K}$. Metoden från kap 4.1 kan användas. Max kan inte vara på $\|\vec{x}\| = R$ motsvarande för min.