

Tavelpresentation 6D

Ludvig Broberg, Arvid Kolstad, Sebastian Miles, Andreas Wallberg

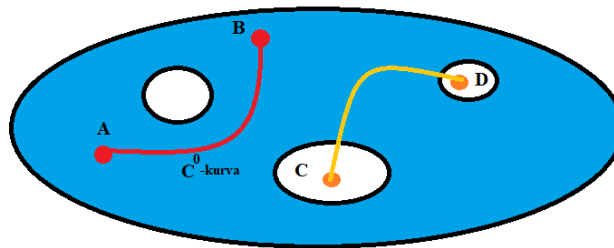
February 2023

1 Kurvintegraler

1.1 Definitioner:

Sammanhängande mängd är en mängd som inte går att dela upp i två separerade delmängder vars union är den ursprungliga mängden.

Bågvis sammanhängande mängd är en striktare form av sammanhängande mängd där varje par av punkter i mängden kan förbindas med en C^0 -kurva som ligger helt i mängden.



Figur 1: På bilden syns en blå bågvis sammanhängande mängd och en vit osammanhängande mängd. Oberoende av hur punkterna A och B placeras i den blå mängden kan de alltid förbindas med en C^0 -kurva som ligger helt i den blå mängden till skillnad från punkterna C och D där C^0 -kurvan kan passera utanför den vita mängden.

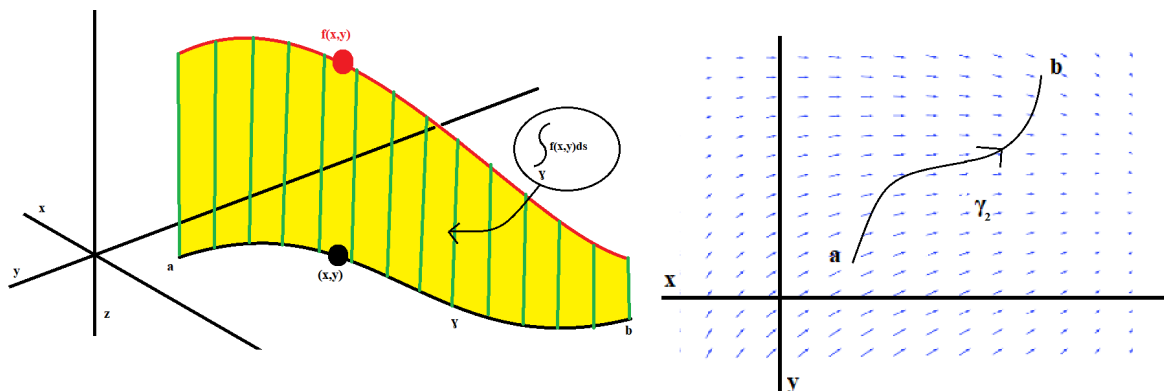
Sats: Bågvis sammanhängande mängd $\implies$ Sammanhängande mängd.

Domän $D \subseteq \mathbb{R}^n$, är en bågvis sammanhängande öppen mängd.

Kurvintegral: Låt $\vec{r}: [a, b] \rightarrow D$ som är en C^1 -kurva och $\vec{F}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ett C^0 vektorfält. Då är kurvintegralen (arbetet) av $\vec{F}$ längs kurvan:

$$I = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \quad (1)$$

- I är oberoende av parametrisering.
- I byter tecken vid orienteringsbyte.



Figur 2: Till vänster i bild syns den röda linjen $z=f(x,y)$ längsmed kurvan γ i ett skalärfält. Kurvintegralen i skalärfältet kan ses som arean under funktionen $z=f(x,y)$ längsmed kurvan γ . Till höger i bild syns kurvan γ_2 men i ett vektorfält. Kurvintegralen i vektorfält kan ses som ett mått på hur mycket vektorfältet är riktat längsmed kurvans bana eller fysikaliskt det arbete en partikel som följer banan utför.

1.2 Notationer:

1. γ är en vanlig beteckning för en kurva.

2. Ett vanligt skrivsätt är:

$$I = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2)$$

3. I planet är $\vec{F} = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$ och $d\vec{r} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$ och vi kan då skriva:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} P dx + Q dy \quad (3)$$

- I rummet är $\vec{F} = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}$ och $d\vec{r} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$ och vi kan då skriva:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz \quad (4)$$

4. Låt $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ vara C^1 -kurvan där slutpunkten för γ_i = startpunkt för γ_{i+1} , $i=1, \dots, k-1$. Då är $\gamma = \sum_{i=1}^k \gamma_i$ och vi kan skriva:

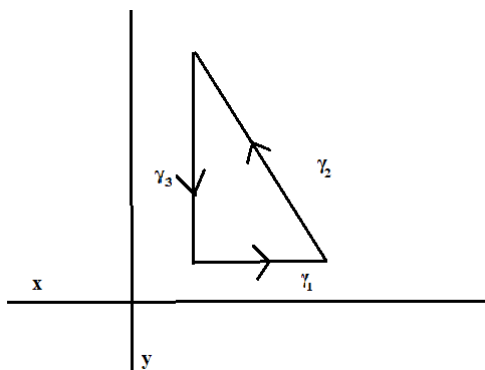
$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (5)$$

5. Om γ -kurvan är $-\gamma$ -kurvan med motsatt orientering för ett godtyckligt $\vec{F}$ så är:

$$\int_{-\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (6)$$

- Notera att $\gamma - \gamma = -\gamma + \gamma = 0$, Alltså har man inte utfört något arbete i vektorfältet om man följer en kurva och sedan går tillbaka på samma kurva.

6. Notationen $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ indikerar att γ är en sluten kurva, ofta randen till ett område.



Figur 3: γ är en styckvis sluten kurva som är positiv orienterad. $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$.

1.3 Jordans sats:

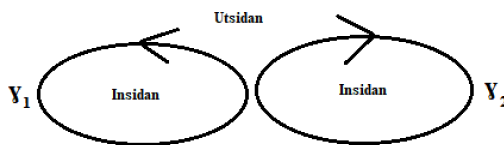
Låt γ vara en enkel sluten C^0 -kurva i $\mathbb{R}^2$. Då består $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ av exakt två sammanhängande komponenter, insidan och utsidan, där insidan är begränsad med γ som rand.

- **Positiv orientering** är då insidan av γ är till vänster i kurvans färdriktning och integration markeras med

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (7)$$

- **Negativ orientering** är då insidan av γ är till höger i kurvans färdriktning och integration markeras med

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (8)$$



Figur 4: Från vänster i bild, positiv respektive negativ orientering.

1.4 Beräkning av kurvintegral:

Det finns tre olika metoder för att beräkna kurvintegraler:

1. Parametrisering av randen och lös genom envariabelintegration över flera C^1 -stycken.
2. Utnyttja potentialer för konservativa fält (sats 9.4.2).
3. Greens sats (sats 9.2.1).

1.4.1 Metod 1:

Kurvan $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_k$. Hitta en explicit parametrisering för varje enskilt kurvstycke och räkna ut varje integral för sig:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt + \int_c^d \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt + \dots + \int_e^f \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \quad (9)$$

2 Konservativa fält

2.1 Definition av konservativt fält

Definition 9.4.2 Vi låter $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en domän. Vi säger därefter att $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ är ett vektorfält. Då sägs $\vec{F}$ vara konservativt eller ett potentialfält om $\exists \Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ så att $\vec{F} = \nabla \Phi$. Då brukar Φ kallas för en potential till vektorfältet $\vec{F}$. Om $\vec{F}$ även tillhör C^0 så skiljer sig olika Φ endast med en konstant.

$$\begin{aligned} \nabla \Phi_1 = \nabla \Phi_2 = \vec{F} &\Rightarrow \nabla(\Phi_1 - \Phi_2) = \vec{0} \\ &\Rightarrow \Phi_1 - \Phi_2 = C \end{aligned}$$

2.2 Satser om konservativa fält

Sats 9.4.2 Vi låter återigen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en domän och att $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ är ett vektorfält som har potentialen Φ . Då gäller att för varje C^1 -kurva $\gamma \in D$ där $\vec{a}$ och $\vec{b}$ är start och slutpunkter för γ :

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Phi(\vec{b}) - \Phi(\vec{a})$$

Bevis. Vi tar fram en godtycklig C^1 -parametrisering av $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ av γ då, som nämns i 1.1, vi vet att resultatet kommer vara oberoende av parameterframställningen.

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d}{dt} \vec{r}(t) dt$$

Då vi vet att Φ är potentialen till $\vec{F}$ så kan vi göra följande substitution:

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d}{dt} \vec{r}(t) dt = \int_a^b \nabla \Phi(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d}{dt} \vec{r}(t) dt$$

Med hjälp av kedjeregeln kan vi flytta ut tidsderivatan:

$$\int_a^b \nabla \Phi(\vec{r}) \cdot \frac{d}{dt} \vec{r}(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} \Phi(\vec{r}(t)) = \Phi(\vec{r}(b)) - \Phi(\vec{r}(a)) = \Phi(\vec{b}) - \Phi(\vec{a})$$

□

Följdsatser till 9.4.2

- $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ beror endast på start och slutpunkt för γ , den är alltså oberoende av vägen
- Om γ är en sluten kurva i D blir $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$. Observera att detta förklarar varför fältet kallas konserverat då ingen energin går åt och därför "konserveras"

Med hjälp av denna sats har vi hittat en ny metod för att beräkningar av $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Sats 9.4.3 Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en domän och $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara ett C^0 -vektorfält. Om $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ är oberoende av vägen eller, vilket är ekvivalent, $\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ så är $\vec{F}$ ett konservativt fält.

Bevis. Vi börjar med att anta att $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ är oberoende av vägen mellan ändpunkterna. Vårt mål är att hitta ett $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ så att $\vec{F} = \nabla \Phi$. Välj ett godtyckligt $\vec{a}$ där $\vec{a} \in D$. Vi definerar följande:

$$\Phi(\vec{x}) = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

där γ är en godtycklig C^1 -kurva från $\vec{a}$ till $\vec{x}$. Observera att $\Phi(x)$ är väldefinierad då den inte beror på vägen mellan $\vec{a}$ och $\vec{x}$. Om $i = 1, \dots, n$ så är målet med beviset att visa följande:

$$\vec{F} = \nabla \Phi \Leftrightarrow \forall \vec{b} \in D, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(\vec{b}) = F_i(\vec{b})$$

Vi fixerar nu i och $\vec{b}$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(\vec{b}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(\vec{b} + h\vec{e}_i) - \Phi(\vec{b})}{h}$$

Vi låter γ_1 vara en godtycklig C^1 -kurva från $\vec{a}$ till $\vec{b}$, $\gamma_{3,h}$ vara raka sträckan mellan $\vec{b}$ och $\vec{b} + h\vec{e}_i$ och γ_2 vara summan mellan γ_1 och $\gamma_{3,h}$. Med dessa definitioner skriver vi upp följande ekvationer:

$$\Phi(\vec{b}) = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\Phi(\vec{b} + h\vec{e}_i) = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\Phi(\vec{b} + h\vec{e}_i) - \Phi(\vec{b}) = \int_{\gamma_{3,h}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Om vi nu parametriserar $\gamma_{3,h}$ på följande sätt:

$$\vec{r}(t) = \vec{b} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ ht \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ där } t \in [0, 1]$$

Med denna parametrisering får vi nu:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{3,h}} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_0^1 \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ h \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} dt = h \int_0^1 F_i(\vec{r}(t)) dt = h \int_0^1 F_i(\vec{b} + ht\vec{e}_i) dt \\ &\Rightarrow \frac{\Phi(\vec{b} + h\vec{e}_i) - \Phi(\vec{b})}{h} = \int_0^1 F_i(\vec{b} + ht\vec{e}_i) dt \end{aligned}$$

Med hjälp av medelvärdessatsen får vi följande:

$$\begin{aligned} \int_0^1 F_i(\vec{b} + ht\vec{e}_i) dt &= (1-0)F_i(\vec{b} + \theta\vec{e}_i), 0 \leq \theta \leq 1 \\ &\Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(\vec{b}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(\vec{b} + h\vec{e}_i) - \Phi(\vec{b})}{h} = F_i(\vec{b}) \end{aligned}$$

□

De går dock enklare sätt att avgöra om ett fält är konservativt eller inte.

Definition

$\vec{F} = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$ och är ett C^1 -vektorfält i $\mathbb{R}$. Vi kallar då $\vec{F}$ virvelfritt eller irrotational om:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Sats 9.4.4 Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en domän och $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ är ett C^1 -vektorfält. Då gäller följande:

$$\vec{F} \text{ konservativt} \Rightarrow \vec{F} \text{ virvelfritt}$$

Bevis. Om $\vec{F}$ är ett konservativt C^1 vektorfält betyder det att det finns ett $\Phi \in C^2$ så att $\vec{F} = \nabla \Phi$

$$P = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, Q = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

□

3 Greens sats

Sats 9.2.1 (Greens sats i $\mathbb{R}^2$)

Låt P, Q vara C^1 -funktioner på en öppen mängd $\omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Om $D \subseteq \omega$ kompakt med rand ∂D som utgörs av en eller flera C^1 -kurvor med positiv orientering.

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

OBS! Positiv orientering D till vänster om färdriktning.

Ex 1. Beräkna kurvintegralen för måndagens triangel och fältet $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 8x^2 - y^2 \\ 2x^2 + y \end{bmatrix}$

Lösn. Greens sats:

$$\begin{aligned} P &= 8x^2 - y^2, Q = 2x^2 + y \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= -2y, \frac{\partial Q}{\partial x} = 4x \\ \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (4x + 2y) dx dy \\ &= 2 \int_0^2 \int_0^{4-2x} (2x + y) dy dx = \frac{64}{3} \end{aligned}$$

Ex 2. Beräkna

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

där $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 8x^2 - y^2 \\ 2x^2 + y \end{bmatrix}$ och γ övre halvan av enhetscirkeln moturs. **Lösn.** γ inte sluten Lägg till γ_2 så att $\gamma + \gamma_2 = \partial D$ men positiv orientering Green sats ger

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy - \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Den första integralen är

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (3x^2 - (-3y^2)) dx dy = 3 \int_0^{\pi} \int_0^1 r^2 r dr d\theta = \frac{3\pi}{4}$$

och den andra löses:

Parameterisera γ_2 :

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}, -1 \leq t \leq 1, \mathbf{r}'(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \begin{bmatrix} t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}$$

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-1}^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}.$$

3.1 Bevis av Greens sats (För reguljära områden)

Steg 1. Antag D är reguljärt i x -led. Ska visa

$$\int_{\partial D} P dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

Låt

$$D = \bigcup_{i=1}^n D_i$$

där

$$D_i = \{(x, y) | a_i \leq x \leq b_i, \alpha_i(x) \leq y \leq \beta_i(x)\}$$

och randen är

$$\partial D_i = \gamma_1 + \dots + \gamma_4$$

med positiv orientering.

Vi ska visa att för varje $i = 1, \dots, n$ gäller

$$\int_{\partial D_i} P dx = - \iint_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

Börjar på vänster ledet:

$$\begin{aligned} - \iint_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= - \int_{a_i}^{b_i} \int_{\alpha_i(x)}^{\beta_i(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx \\ &= - \int_{a_i}^{b_i} [P(x, y)]_{y=\alpha_i(x)}^{\beta_i(x)} dx = \int_{a_i}^{b_i} P(x_i, \alpha_i(x)) dx - \int_{a_i}^{b_i} P(x, \beta_i(x)) dx \\ &= \int_{\gamma_1} P dx + \int_{\gamma_3} P dx \end{aligned}$$

Eftersom integralerna över γ_2 och γ_4 är lika med noll (vertikala kurvor) följer det att

$$- \iint_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \sum_i \int_{\gamma_i} P dx = \int_{\partial D_i} P dx.$$

Återstår att visa

$$\sum_i \int_{\partial D_i} P dx = \int_{\partial D} P dx$$

Idé: integraler längs inre kanter kancellerar: Endast yttre kanten ∂D överlever (Proof by imagination).

Steg 2: Genom att utföra nästan samma bevis som i steg 1 får man: Om D är reguljärt i y -led:

$$\int_{\partial D} Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy.$$

Byter man x mot y får man annan orientering, därav bytt tecken.

Steg 3. Om D reguljärt är det reguljärt i x - och y -led. Vi kan då summera resultatet från steg 1 och steg 2:

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad \blacksquare.$$

3.2 Tillämpningar av Greens sats

Def. En mängd $M \subseteq \mathbb{R}^2$ sägs vara enkelt sammanhängande om

- (i) M är bågvisst sammanhängande
- (ii) Insidan av varje enkel slutenkurva i M ligger helt i M .

Den intuitiva tolkningen av en enkelt sammanhängande mängd är att mängden saknar hål.

Sats 9.4.5: Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara enkelt sammanhängande domän $F : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ ett C^1 -vektorfält. Då gäller:

F virvelfritt $\implies F$ Konservativt.

Vi har redan sett $\longleftarrow$.

Bevis. Antag $F = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$ Virvelfritt dvs $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Låt γ vara en godtycklig enkel slutenkurva i

D . Låt E = insidan av γ (funkar av Jordans kurvsats).

Ge $\gamma = \partial E$ positiv orientering D enkelt sammanhängande $\implies E \subseteq D \implies F$ definierad och C^1 på hela E . Greens sats ger

$$\oint_{\gamma} F dr = \oint_{\partial E} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad \blacksquare.$$

3.2.1 Areaformel

Av greens formel hittar vi formler för arean av ett område D .

(i)

$$\int_{\partial D} -y dx = \iint_D dx dy = \mu(D)$$

(ii)

$$\int_{\partial D} x dy = \mu(D)$$

(iii)

$$\frac{1}{2} \int_{\partial D} -y dx + x dy = \mu(D)$$

4 Greens sats, $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

4.1 Definition av rotation av F

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vara domän, $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ C^1 -vektorfält. Då är rotationen av $\vec{F}$ vektorfältet

$$\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (10)$$

Man säger att F är virvelfritt ifall $\nabla \times \vec{F} = 0$.

4.2 En omformulering av Greens sats:

I $\mathbb{R}^2$ skriver man Greens sats på följande vis

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

$$\text{om } \vec{F} = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$$

Betrakta domän D som ett ytstycke i $\mathbb{R}^3$ och ∂D som en kurva i $\mathbb{R}^3$ där båda är del av xy -planet.

$$\text{Låt } \vec{F} = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ 0 \end{bmatrix}. \text{ Rotationen av } \vec{F} \text{ blir då}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) = (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) \hat{z}.$$

Notera här att $\hat{z}$ är enhetsnormal $\hat{N}$ till ytan D och att $dx dy = ds$ är areaelementet i D . Greens sats kan därför skrivas om för D i xy -planet som

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D (\nabla \times F) \hat{N} ds.$$

Vad som också ska nämnas är att om ∂D är positivt orienterad råder ekvivalens med att $\hat{N} \times d\vec{r}$ pekar in mot D .

4.3 Definition av divergensen av $\vec{F}$ i $\mathbb{R}^3$

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vara domän, $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ C^1 -vektorfält. Divergensen av $\vec{F}$ är då skalärfältet

$$\text{div}(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \quad (11)$$