

Tavelpresentationer v.7 grupp A

Marie Enelund, Erik Johansson, Edvard Nauc  r, Melker Manne

7 mars 2023

1 Gauss Sats

Definition: Divergens

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vara domän och $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara C^1 -fält. Divergensen av $\vec{F}$   r skalärfältet $\text{div}(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$.

Gauss' sats (Divergenssatsen)

Låt $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ vara en öppen mängd och $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara C^1 -vektorfält. Om det kompakta området $K \subset \Omega$ med rand ∂K bestående av C^1 -ytor   r   rienterad med utåtriktad normal $\hat{N}$ så gäller att

$$\iint_{\partial K} \vec{F} \cdot \hat{N} ds = \iiint_K \nabla \cdot \vec{F} dV. \quad (1)$$

I den här formeln kan kurvintegralen i vänsterledet tolkas som flödet av $\vec{F}$ genom randen av K och högerledet som den totala produktionen i K . Gauss' sats är en tredimensionell motsvarighet till Greens formel. Satsen kan användas om ytan är sluten och om den inte är det kan en yta behöva läggas till.

2 Stokes Sats

Definition: Parametriserad yta

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara kompakt kvadrerbar och randen ∂D vara positivt   rienterad samt styckvis C^1 . Låt $\vec{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara en C^1 -funktion. $Y = \vec{r}(D)$ kallas en parametriserad yta. $\partial Y = \vec{r}(\partial D)$ kallas randen till Y och s  gs vara positivt   rienterad om ∂Y ärver   rienteringen från ∂D .

Definition: Rotation

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vara en domän och $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara C^1 -fält. Rotationen av $\vec{F}$ (som är ett vektorfält) definieras som

$$\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right). \quad (2)$$

Stokes sats

Låt $\vec{F}$ vara ett C^1 -fält som är definierat i en öppen mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Om Y är ett positivt orienterat yttystycke i Ω med positivt orienterad rand ∂Y gäller att

$$\oint_{\partial Y} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_Y (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{N} dS. \quad (3)$$

En enkel regel för orienteringen är att $\hat{N} \times d\vec{r}$ ska peka mot Y och om inte behövs ett minustecken i satsen.

Fysikalisk tillämpning

Både Gauss divergenssats och Stokes sats kan användas vid fysikalisk tillämpning, vilket visas i Maxwells följande ekvationer kring elektriska och magnetiska fält

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}, \quad (\text{Gauss' lag}) \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (\text{Magnetiska fältet är källfritt}) \quad (5)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (\text{Stokes, Faradays induktionslag}). \quad (6)$$

3 Nablaräkning

Definition: Laplacianen

Laplacianen av en funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ betecknas $\Delta f = \nabla^2 f$, och beräknas

enligt följande: $\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$. Där ∇ är operatoren: $\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$.

f kan också vara en vektorvärd funktion. Laplacianen definieras alltså som divergensen av $\nabla \vec{F}$.

Olika identiteter

Antag att ϕ, ψ är skalärfält och att $\vec{F}, \vec{G}$ är vektorfält, alla av klass C^1 för de första sex identiteterna och klass C^2 för de sista tre. Då gäller följande identiteter:

$$\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi \quad (7)$$

$$\nabla \cdot (\phi\vec{F}) = (\nabla\phi) \cdot \vec{F} + \phi(\nabla \cdot \vec{F}) \quad (8)$$

$$\nabla \times (\phi\vec{F}) = (\nabla\phi) \times \vec{F} + \phi(\nabla \times \vec{F}) \quad (9)$$

$$\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{G} - \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G}) \quad (10)$$

$$\nabla \times (\vec{F} \times \vec{G}) = (\nabla \cdot \vec{G})\vec{F} + (\vec{G} \cdot \nabla)\vec{F} - (\nabla \cdot \vec{F})\vec{G} - (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{G} \quad (11)$$

$$\nabla(\vec{F} \cdot \vec{G}) = \vec{F} \times (\nabla \times \vec{G}) + \vec{G} \times (\nabla \times \vec{F}) + (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{G} + (\vec{G} \cdot \nabla)\vec{F} \quad (12)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0 \quad (13)$$

$$\nabla \times (\nabla\phi) = \vec{0} \quad (14)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F} \quad (15)$$

De två första identiteterna gäller i $\mathbb{R}^n$, övriga gäller endast i $\mathbb{R}^3$.

4 Potentialer

Existens av en potential under angivna förutsättningar ges av:

Sats 9.4.3 Låt $F = (P, Q)$ vara ett kontinuerligt vektorfält definierat i en bågvis sammanhängande öppen mängd Ω . Om kurvintegralen $\int_{\gamma} F \cdot d\mathbf{r}$ är oberoende av vägen för alla kurvor γ i Ω , så har F en potential i Ω .

Kurvintegralen i rummet är:

$$\int_{\gamma} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma} u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + u_3 dx_3, \quad (16)$$

där $\mathbf{u} = \text{Grad } U$ för någon funktion U . Integralen är oberoende av vägen om dess värde bara beror av kurvans ändpunkter. Om $\mathbf{u}$ är definierad i en öppen, bågvis sammanhängande mängd gäller formen:

$$\int_{\gamma} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = U(b) - U(a),$$

Vi har även sett hur.

Sats 10.5.3 Varje potentialfält är virvelfritt.

5 Optimeringsproblem

Optimeringsproblem kan nästan alltid skrivas om till att hitta största och minsta värdet för en funktion, betrakta därmed följande problem **P**.

P: Givet kompakt mängd $D \subseteq \mathbb{R}^n$ och en C^1 funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Sök största och minsta värde som f antar.

Observera följande:

(a) D kompakt och $f \in C^1 \subseteq C^0$ garanterar att f antar ett största och minsta värde.

(b) Varje punkt i D är antingen en inre punkt eller randpunkt, givet detta kan D skrivas som $D = D_{inre} \cup \partial D$.

(c) Om f antar största eller minsta värde i en inre punkt $\bar{x}_0 \in D_0 \implies \bar{x}_0$ lokal extrempunkt. $\implies \nabla f(\bar{x}_0) = \bar{0}$.

(d) Antag ∂D är styckvis C^1 , ∂D kan alltså delas upp i $\partial D = Y_1 \cup \dots \cup Y_k$ där varje Y_i är en $(n-1)$ -dimensionell C^1 -yta. Kan hitta en C^1 -parametrisering $\bar{r}_i : E_i \rightarrow Y_i$ där $E_i \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt.

Sammansättningen $g_i = f \circ \bar{r}_i : E_i \rightarrow \mathbb{R}$ blir en C^1 -funktion av $(n-1)$ -variabler på E_i kompakt.

Observation (a), (b) och (c) gäller för g_i på E_i för $i = 1 \dots k$.

Utifrån detta fås en rekursiv procedur i tre steg för att lösa problemet.

Steg 1:

Hitta alla inre stationära punkter:

Lös $\nabla f = \bar{0}$ för $\bar{x} \in D_{inre}$.

($\bar{x} \in \partial D$ ej nödvändigt men okej att ta med.)

Steg 2:

Dela upp ∂D i C^1 -ytstycken $Y_1, \dots, Y_k$.

Bestäm en C^1 -parametrisering för varje Y_i

$\bar{r} : E_i \rightarrow Y_i$ där $E_i \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt.

Sätt $g_i = f \circ \bar{r}_i$ och gå till steg 1 för paret (g_i, E_i) . Avsluta när randen är tom vilket normalt kräver n steg.

Steg 3:

Jämför alla kandidater.