

Sammanfattning flervariabelanalys Lv 7

7D: Madicken Astorsdotter, Nils Kalmnäs Drakenfors,
Filip Karlsson, Jacob Larsson och Ellinor Olesen

10 mars 2023

1 Gauss sats

Begrepp

$$\iint_{\partial K} \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS$$

kallas för flödesintegralen och representerar flödet genom en yta.

Divergensen av $\vec{F}$ defineras som

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}$$

Sats (Gauss sats. Divergenssatsen)

Låt $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ vara ett C^1 -fält definierat i en öppen mängd Ω i rummet. Om det kompakta området $K \subset \Omega$ har en rand ∂K som består av en eller flera C^1 -ytor och som är orienterad med utåtriktad normal($\hat{N}$) så gäller att

$$\iint_{\partial K} \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS = \iiint_K \nabla \cdot \vec{F} \, dV$$

Bevis

Beviset av Gauss sats (för reguljära områden) påminner om beviset för Greens sats. Först bevisas det för ett delområde då $\vec{F} = (0, 0, F_3)$. Sedan

summeras alla delområden och samma resonemang genomförs i alla axelriktningar.

2 Stokes sats

Definition: Parametriserad yta

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en kompakt och kvadrerbar mängd, och dess rand ∂D vara positivt orienterad samt styckvis C^1 . $\vec{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara en C^1 funktion.

$Y = \vec{r}(D)$ kallas för parametriserad yta (ytstycke).

$\partial Y = \vec{r}(\partial D)$ kallas för randen till Y .

∂Y sägs vara positivt orienterad om den ärver orienteringen från D .

Man kan se Y och ∂Y som bilden av D respektive ∂D under avbildningen: $\vec{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Stokes sats

Vi såg förra veckan att man kunde skriva om Greens sats i xy-planet enligt:

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{N} dS \quad (1)$$

Där $\hat{N}$ är enhetsnormal till ytan D som ligger i xy-planet.

Om vi istället betraktar ett parametriserat ytstycke Y enligt definitionen ovan som bilden av D under parametriseringen $\vec{r}(s, t)$, kan vi nu generalisera Greens sats till 3-dimensioner.

Sats: (Stokes sats)

Låt $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ vara en öppen mängd, $\vec{F}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F} \in C^1$

Om Y är ett positivt orienterat ytstycke i Ω med positivt orienterad rand ∂Y , gäller att:

$$\int_{\partial Y} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_Y (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{N} dS \quad (2)$$

Där $\hat{N}$ är enhetsnormal till ytstycket Y .

Allmänt: $\hat{N}dS = (\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t})dsdt$ med s och t som våra parametrar.

3 Nablaräkning

Skalär- och vektorprodukterna

Vi definierar den skalärvärda funktionen f och de vektorvärda funktionerna $\vec{U}, \vec{V}$

$$\begin{aligned}f &: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{U} &: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \nabla &: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3\end{aligned}$$

I Gauss sats används skalärprodukten även kallad divergensen.

$$\nabla \cdot \vec{U} = \text{div} \vec{U} = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial U_3}{\partial z}$$

I Stokes sats är det istället vektorprodukten som används, vilket även kallas rotationen.

$$\nabla \times \vec{U} = \text{rot } \vec{U} = \left(\frac{\partial U_3}{\partial y} - \frac{\partial U_2}{\partial z}, \frac{\partial U_1}{\partial z} - \frac{\partial U_3}{\partial x}, \frac{\partial U_2}{\partial x} - \frac{\partial U_1}{\partial y} \right)$$

Def: Laplacian

Laplacianen av $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ är

$$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Identiteter

Dessa identiteter gäller endast i $\mathbb{R}^3$ och i klass C^2

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \times \vec{U}) &= 0 \\ \nabla \times (\nabla f) &= \vec{0} \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{U}) &= \nabla(\nabla \cdot \vec{U}) - \nabla^2 \vec{U}\end{aligned}$$

Denna identiteterna räcker det att klassen är C^1

$$\nabla \cdot (\vec{U} \times \vec{V}) = (\nabla \times \vec{U}) \cdot \vec{V} - \vec{U} \cdot (\nabla \times \vec{V})$$

4 Konservativa/virvelfria fält

Alla potentialfält är virvelfria, dvs.

$$Rot(u) = 0$$

eller

$$Curl(u) = 0$$

om vi har en funktion $\varphi(x)$, så ges ett potentialfält av vektorfältet

$$\hat{F} = \nabla \varphi(x)$$

Vi vill nu visa att varje potentialfält är virvelfritt, vilket betyder att dess curl/rotation är noll. Curl är en mått på hur mycket ett vektorfält roterar runt en punkt. Om vi kan visa att curl av ett potentialfält alltid är noll, då har vi visat att varje potentialfält är virvelfritt.

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z \end{vmatrix}$$

Den sista raden har sitt utseende då $\nabla \varphi = \text{grad } \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$. Därav

följer det att

$$\begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi''_{zy} - \varphi''_{yz}, & \varphi''_{xz} - \varphi''_{zx}, & \varphi''_{yx} - \varphi''_{xy} \end{pmatrix}$$

Eftersom termerna i varje kolumn är lika har vi att $\nabla \times (\nabla \varphi) = (0, 0, 0) = 0$. Alltså har vi visat att varje potentialfält är virvelfritt.

5 Optimering på kompakta områden

Optimering på kompakta områden innebär att lösa problem på följande generella form: Givet en kompakt mängd $D \in \mathbf{R}^n$ och en C^1 -funktion $f : D \rightarrow \mathbf{R}$, sök största och minsta värde som f antar. Dessa problem kan lösas med följande generella lösningsmetod:

1. Hitta alla inre stationära punkter: Lös $\nabla f = \vec{0}$ för $\vec{x} \in D_{\text{inre}}$. I detta steg kan man välja att inte ta med punkter på ∂D eftersom dessa kommer med i steg 2.
2. Hitta stationära punkter på ∂D . Det kan göras på följande sätt: dela först upp ∂D i C^1 -ytstycken $Y_1, \dots, Y_k$. För varje i bestämmer man därefter en C^1 -parametrisering

$$\vec{r}_i : E_i \rightarrow Y_i, \quad (3)$$

där $E_i \subseteq \mathbf{R}^{n-1}$ är ett kompakt område. Härfter kan vi tillämpa steg 1 på den sammansatta funktionen $g = f \circ \vec{r}_i$ (med E_i som det kompakta området). Processen fortsätter på samma sätt tills randen till E_i är tom. Detta kräver normalt n steg.

3. Jämför alla kandidater som kommit ur steg 1 och 2 för att finna största och minsta värde.

Observera att även om metoden fungerar generellt så kan den kräva ganska mycket arbete. Det är därför alltid en bra idé att försöka hitta största/minsta värde på andra sätt före användning av metoden ovan. Ett enkelt exempel

är

$$f(x, y) = (x + y)^2 \tag{4}$$

definierad på $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$ (en kvadrat med sidlängd 2 centrerad kring origo). Den generella lösningsmetoden fungerar, men vi kan göra det enklare för oss. Eftersom $f(x, y) \geq 0$ så är minsta värde 0 (antas i origo). Vidare ser vi att största värde är 4 (antas i $(1, 1)$ och $(-1, -1)$).