

Tavelpresentation 7B

Viktor Nilsson,
Max Carnesten,
Patrik Hjelseth
och Anton Fondelius

February 2023

Innehåll

1	Nablaräkning	1
1.1	Användningar av nablaoperatörn	1
1.2	Identiteter för Nablaräkning	2
2	Konservativa och virvelfria fält i $\mathbb{R}^3$	2
2.1	Konservativt implicerar virvelfritt	2
2.2	Enkelt sammanhängande mängder	2
3	Stokes Sats	3
3.1	Anmärkningar	3
3.2	Koppling till Greens Sats	3
3.3	Gauss sats	3
4	Optimering på kompakta områden	4
4.1	Observationer	4
4.2	Lösning till problemet	4

1 Nablaräkning

Nablaoperatorn ∇ är en viktig symbol inom vektoranalys används för att beskriva förändringar i funktioner i flera dimensioner. Nablaoperatorn används för att beräkna gradienten, divergensen och rotationen av en vektorfunktion.

Nablaoperatorn definieras som:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

1.1 Användningar av nablaoperatorn

Under beräkning med ∇ hanteras den som en tredimensionell vektor. Med hjälp av detta kan gradienten av en skalärfunktion av trevariabler, $f(x, y, z)$, definieras som:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Eftersom ∇ hanteras ungefär som en tredimensionell vektor under beräkning, så kan man få divergensen av ett vektorfält genom skalärprodukten av ∇ och vektorfältet. Divergensen av en vektorfunktion $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ används inom Gauss Sats och definieras som:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_1, F_2, F_3) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \text{div } \mathbf{F}.$$

I Stokes sats används rotationen, vilket beräknas med kryssprodukten av ∇ och ett vektorfält. Rotationen av vektorfältet, $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$, definieras därför som:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \text{rot } \mathbf{F} = \text{curl } \mathbf{F},$$

där $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_3$ är enhetsvektorer i $\mathbb{R}^3$.

1.2 Identiteter för Nablaräkning

Antag att ϕ och ψ är skalärfält och att $\mathbf{F}$ och $\mathbf{G}$ är vektorfält, av klass C^1 för identiteterna 1-6 och C^2 för de övriga. Då gäller de följande identiteterna:

$$\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi \quad (1)$$

$$\nabla \cdot (\phi\mathbf{F}) = (\nabla\phi) \cdot \mathbf{F} + \phi(\nabla \cdot \mathbf{F}) \quad (2)$$

$$\nabla \times (\phi\mathbf{F}) = (\nabla\phi) \times \mathbf{F} + \phi(\nabla \times \mathbf{F}) \quad (3)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) \quad (4)$$

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \cdot \mathbf{G})\mathbf{F} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{G} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} \quad (5)$$

$$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} \quad (6)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \quad (7)$$

$$\nabla \times (\nabla\phi) = 0 \quad (8)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F} \quad (9)$$

där skalärprodukten, $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \Delta$, är Laplaceoperatorn. Alla identiteter gäller i $\mathbb{R}^3$, och de första två även i $\mathbb{R}^n$.

2 Konservativa och virvelfria fält i $\mathbb{R}^3$

Konceptet om konservativa och virvelfria vektorfält definieras liknande i $\mathbb{R}^3$ som i $\mathbb{R}^2$. Ett vektorfält $\mathbf{F}$ är konservativt om det finns en skalärvärd funktion ϕ vars gradient $\nabla\phi = \mathbf{F}$, och ett vektorfält är virvelfritt om $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

2.1 Konservativt implicerar virvelfritt

Sats: Om $D \subseteq \mathbb{R}^3$ är en domän och $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ är ett C^1 vektorfält så gäller: $\mathbf{F}$ konservativt $\implies \mathbf{F}$ virvelfritt.

Detta bevisas enkelt genom att beräkna kryssprodukten $\nabla \times (\nabla\phi)$, som visar sig vara noll. Viktigt att observera är att implikationen endast går åt ena hållet, det finns alltså virvelfria fält som inte är konservativa, vilket tas upp i nästa sats.

Sats: Om $D \subseteq \mathbb{R}^3$ är en enkelt sammanhängande domän och $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ är ett C^1 vektorfält så gäller: $\mathbf{F}$ virvelfritt $\implies \mathbf{F}$ konservativt.

Alltså gäller det omvända om vi lägger till restriktionen att D måste vara enkelt sammanhängande.

2.2 Enkelt sammanhängande mängder

Definition: En mängd D är enkelt sammanhängande om D är bågvisst sammanhängande, och varje enkel sluten kurva i D kan kontinuerligt deformeras till en punkt utan att lämna mängden.

3 Stokes Sats

Stokes sats relaterar kurvintegralen av ett vektorfält $\mathbf{F}$ över randen av en yta D till ytintegralen av vektorfältets rotation $\text{rot}(\mathbf{F})$ över D .

Satsen lyder som följer:

Låt $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ öppen, $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} \in C^1$. Om Y är ett positivt orienterat ytstycke i Ω med positivt orienterad rand ∂Y gäller att

$$\oint_{\partial Y} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_Y (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}} \, ds \quad (10)$$

3.1 Anmärkningar

I satsen gäller att randen ∂Y måste vara positivt orienterad. Orienteringen är positiv då $\hat{\mathbf{N}} \times d\mathbf{r}$ pekar in mot Y . Annars krävs minustecken.

Om Y är en funktionsyta $z = f(x, y)$ gäller det att

$$\hat{\mathbf{N}} \, ds = \begin{bmatrix} -f'_x \\ -f'_y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

3.2 Koppling till Greens Sats

Stokes sats är en generalisering av det Greens sats säger om kurvintegraler i $\mathbb{R}^2$. Vi ser det enkelt om vi skriver om ytintegralen

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy \quad (12)$$

från Greens sats som ett specialfall av ytintegralen från Stokes sats

$$\iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{k}} \, ds \quad (13)$$

där $\hat{\mathbf{k}}$ är enhetsvektorn längs z -axeln ur $\mathbb{R}^2$ planet där D befinner sig.

3.3 Gauss sats

Ett annat specialfall av Stokes sats är Gauss sats. Gauss sats relaterar ytintegralen av ett vektorfält $\mathbf{F}$ över randen till en kropp K till trippelintegralen av vektorfältets divergens $\text{div}(\mathbf{F})$ över K .

Satsen lyder som följer:

Låt $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ öppen, $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} \in C^1$. Om $K \subset \Omega$ kompakt med rand ∂K bestående av C^1 -ytor orienterade med utåtriktad normal $\hat{\mathbf{N}}$ gäller att

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = \iiint_V \text{div } \mathbf{F} \, dV \quad (14)$$

4 Optimering på kompakta områden

Inom optimering undersöks problemet att finna det bästa utfallet för en viss process. I en matematisk formulering lyder problemet på detta vis: Givet en kompakt mängd $D \subset \mathbb{R}^n$ och en funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^1$, sök det största och minsta värde f antar.

4.1 Observationer

- (a) Eftersom D är kompakt och $f \in C^0 \supset C^1 \Rightarrow \exists f_{max}$ och $\exists f_{min}$
- (b) Varje punkt i D är antingen en inre punkt eller en randpunkt. Alltså D delas upp till $D_0 \cup \partial D$ där D_0 är mängden av inre punkter i D och ∂D är randen av D .
- (c) Om f antar ett extremvärde i en inre punkt $\bar{x}_0 \in D_0$ så följer att $\bar{x}_0$ är en lokal inre extrempunkt. Eftersom $f \in C^1$ så följer det att $\nabla f(\bar{x}_0) = \bar{0}$.
- (d) Antag att ∂D är styckvis C^1 kontinuerlig. Då kan randen delas upp i olika C^1 -kontinuerliga $(n-1)$ -dimensionella ytor $Y_i, i = 1, \dots, k$. Låt $\bar{r}_i : E_i \rightarrow Y_i$ vara en C^1 -parametrisering där $E_i \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ är en kompakt mängd. Sammansättning $f \circ \bar{r}_i : E_i \rightarrow \mathbb{R}$ bildar då en C^1 -funktion av $(n-1)$ variabler.
(a), (b), (c) gäller för funktionen $f \circ \bar{r}_i, i = 1, \dots, k$.

4.2 Lösning till problemet

Från dessa observationer följer en rekursiv procedur för att lösa problemet.

Steg 1: Finn alla inre stationära punkter. Utifrån (c) är detta detsamma som att lösa $\nabla f(\bar{x}) = \bar{0}, \bar{x} \in D_0$

Steg 2: Dela upp ∂D i C^1 -ytstycken $Y_1, \dots, Y_k$. För varje $i = 1, \dots, k$ bestäm en C^1 -parametrisering $\bar{r}_i : E_i \rightarrow Y_i$ där $E_i \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ är en kompakt mängd. Låt sedan $g_i = f \circ \bar{r}_i$ och gör steg 1 med paret (g_i, E_i) . Om randen är tom, gå till steg 3.

Steg 3: Jämför kandidaterna.

Denna procedur kräver normalt n iterationer.