Tavelpresentation LV 6

Caroline Paulis, Thomas Arthursson, Jakob Zäll, Hampus Kihl och Otto Svensson

February 2023

1 Kurvintegraler

1.1 Sammanhängande mängder

En mängd är *sammanhängande* om den inte kan delas upp i två icke-tomma delmängder som är separerade. Man kan bygga vidare på detta och nämna att en mängd $M \subseteq \mathbf{R}^n$ är *bågvist sammanhängande* om varje par av punkter kan förbindas med en C^0-kurva helt i M. En bågvist sammanhängande mängd medföljer att mängden är sammanhängande.

1.1.1 Definition Domän

En bågvist sammanhändande öppen mängd $D \subseteq \mathbf{R}^n$ kallas *domän*.

1.2 Definition av kurvintegraler

Låt $D \subseteq \mathbf{R}^n$ och vara en domän. Partikelns läge $\mathbf{r} : [a,b] \to D$ och är en C^1-kurva. C^0-vektorfältet avbildas på $\mathbf{F} : D \to \mathbf{R}^n$. Då kan man beskriva en *kurvintegral* enligt följande:

$$I = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{1}$$

som man kallar för kurvintegralen av $\mathbf{F}$ längs kurvan γ. Rent fysikalisk kan man tolka det som arbetet som uträttas av $\mathbf{F}$ längs kurvan, eller med andra ord, energin som fältet tillför partikeln när den rör sig längs γ.

1.3 Sats för kurvintegraler

(**i**). I är oberoende av parametrisering.
(**ii**). I byter tecken vid orienteringsbyte på grund av att tangenten ändrar riktning.

1.4 Jordans sats

För att veta hur en kurva är orienterad, kan man definera detta med hjälp av en sats som kallas *Jordans sats*. Den lyder:
Låt γ vara en enkel, sluten C^0-kurva i $\mathbf{R}^2$. Då kommer allt som består av $\mathbf{R}^2$ men inte av kurvan $(\mathbf{R}^2 \backslash \gamma)$, vara exakt två sammanhängande komponenter. Komponeterna kallas för *insida* respektive *utisda* där insidan begränsas av γ som rand, medan utsidan går mot oändligheten.

1.4.1 Definition för positiv- och negativ orientering

Från föregående sektion, kan man nu per definition beskriva om en kurva γ är *positiv- eller negativ orienterad.*
Låt γ vara en enkel sluten kurva i $\mathbf{R}^2$. Kurvan är positiv orienterad, det vill säga moturs, om insidan av γ ligger till vänster om kurvan längs dess färdriktning. På motsvarade sätt kan man beskriva om en kurva är negativ orienterad, fast då befinner sig insidan på höger sida av γ längs kurvans färdriktning.

1.4.2 Konvension

Om en kurva är enkel och sluten, räcker det med att man definerar den som positivt orienterad eftersom värdet är oberoende av start- och slutpunkten. Resultatet blir detsamma oavsett vart man börjar på kurvan.

1.4.3 Metoder för beräkningar av kurvintegraler

Det finns tre metoder som man kan tillämpa för att lösa kurvintegraler:
(**A**). Parametrisering av randen och användning av envariabel-integration (dela upp den i flera C^1-stycken).
(**B**). Utnyttjar potentialer för konservativa fält (se sats 9.4.2 i boken).
(**C**). Tillämpa Greens sats (se sats 9.2.1).

1.5 Sats 9,4,2

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ domän. $\bar{F} : D \to \mathbb{R}^n$ Konservativt med potential ϕ

För varje C^1- kurva γ i D gäller:

$$\int_\gamma \bar{F}\ d\bar{r} = \phi(\bar{b}) - \phi(\bar{a}) \tag{2}$$

Där $\bar{a}$ är startpunkt och $\bar{b}$ är slutpunkt för γ

1.6 Bevis av Sats 9,4,2

Tag en parametrisering $\bar{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ av γ. Kurvintegralen oberoende av parametrisering.

$$\int_\gamma \bar{F} \cdot \ d\bar{r} = \int_a^b \ \bar{F}(\bar{r}\ (t)) \cdot \ \bar{r}'(t)dt = \int_a^b \nabla\phi\ (\bar{r}'(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\bar{r}(t)\mathrm{dt} = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\phi(\bar{r}\ (t)))dt =$$
$$= \phi(\bar{r}\ (b)) - \phi(\bar{r}\ (a)) = \phi(\bar{b}) - \phi(\bar{a}) \tag{3}$$

1.6.1 Följdsatser

- $\int_\gamma \bar{F}\ d\bar{r}$ beror endast på start och slutpunkt för γ, oberoende av vägen.
- Om γ sluten i D blir $\oint_\gamma \bar{F}\ d\bar{r} = 0$

1.6.2 Ny beräkningsmetod

Hitta potential $\phi : \bar{F}\ = \nabla\phi$ och använd sats 9.4.2.

2 Konservativa fält

2.1 Sats 9.4.3

Låt $D \subseteq \mathbf{R}^n$, $\mathbf{F} : D \to \mathbf{R}^n$ ett C^0-vektorfält.

F är konservativt om $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ är oberoende av väg, vilket är ekvivalent med $\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ för varje sluten C^1-kurva γ i D

2.1.1 Sammanfattat bevis av sats 9.4.3

Antag $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ är oberoende av väg. Man vill sedan hitta en funktion $\Phi : D \to \mathbf{R}$ som uppfyller $\nabla\Phi = \mathbf{F}$, man definerar $\Phi(\mathbf{x}) = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. γ är en godtycklig styckvis C^1-kurva från $\mathbf{a}$ till $\mathbf{x}$.

Man vill visa att $\nabla\Phi = \mathbf{F}$ som är ekvivalent med att $\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}(\mathbf{b}) = F_i(\mathbf{b})$

Fixerar $\mathbf{b}$ och i och uttrycker $\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}(\mathbf{b})$ med derivatans definition. Sedan definierar man tre kurvor. γ_1, en styckvis C^1-kurva från $\mathbf{a}$ till $\mathbf{b}$,$\gamma_{3,h}$, en raksträcka från $\mathbf{b}$ till $\mathbf{b} + h\mathbf{e}_i$, och $\gamma_{2,h}$, kurvan $\gamma_1 + \gamma_{3,h}$.

Med omskrivningar ger detta $\Phi(\mathbf{b} + h\mathbf{e}_i) - \Phi\mathbf{b} = \int_{\gamma_{3,h}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

Sedan parametriserar man $\gamma_{3,h}$ så att $\mathbf{r}(t) = \mathbf{b} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ ht \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ där positionen för ht är

i, och $0 \leq t \leq 1$.

Ytterligare omskrivningar gör att man kan utnyttja medelvärdessatsen så att $\frac{\Phi(\mathbf{b}+h\mathbf{e})-\Phi(\mathbf{b})}{h} = F_i(b + h\theta\mathbf{e}_i)$. När man sedan går i gräns, $h \to 0$ får man att $\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}(\mathbf{b}) = F_i(\mathbf{b})$, vilket skulle bevisas.

2.2 Avgöra om F ej konservativt

2.2.1 Definition av virvelfritt

Låt $\mathbf{F} = (P,Q)$ vara C^1-vektorfält i $\mathbf{R}^2$. F virvelfritt om $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

2.2.2 Sats 9.4.4

Om $D \subseteq \mathbf{R}^2$ domän, $\mathbf{F} \in C^1$ i $\mathbf{R}^2$, då gäller att $\mathbf{F}$ konservativt $\implies$ $\mathbf{F}$ virvelfritt.

Alltså, om det inte är virvelfritt, är $\mathbf{F}$ inte konservativt. Är det virvelfritt får man göra mer undersökningar om $\mathbf{F}$ konservativt eller ej.

3 Greens sats

3.1 Greens sats i $\mathbb{R}^2$

För att formulera Greens sats i $\mathbb{R}^2$ så behöver vi låta P och Q vara C^1-funktioner på en öppen mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Om $D \subseteq \Omega$ är kompakt och dess rand ∂D utgörs av en eller flera C^1-kurvor med positiv orientering så gäller

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy. \tag{4}$$

Ett exempel där Greens sats kan användas direkt är följande. Vi har en triangel med hörn i (0,0), (0,4) och (2,0) och den har positiv orientering.

Vi har också att vektorfältet

$$\bar{F} = \left(\begin{smallmatrix} 8x^2-y^2 \\ 2x^2+y \end{smallmatrix}\right)$$

Lösningen får vi genom att sätta $P = 8x^2 - y^2$ och $Q = 2x^2 + y$ och sen använda Greens sats enligt följande:

$$\int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D (4x + 2y)dxdy.$$

Där efter kan vi använda oss av fubini för att skriva om integralen.

$$2\int_0^2 \int_0^{4-2x} (2x + y)dydx = \cdots = \frac{64}{3}.$$

En annan typ av uppgift där Greens sats kan användas, men inte lika direkt, är när γ ej är sluten. Exempelvis för att beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} \bar{F} \cdot d\bar{r}$$

där

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} -y^3 + x^2 \\ x^3 + y^2 \end{bmatrix}$$

och γ är övre halvan av enhetscirkeln. Eftersom γ här inte är sluten får vi lägga till γ_2 så att $\gamma + \gamma_2 = \partial D$. γ_2 löper då förslagsvis längs x-axeln och $-1 \leq \gamma_2 \leq 1$.

Då har vi att

$$\int_{\gamma+\gamma_2} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Då följer att

$$\int_{\gamma} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy - \int_{\gamma_2} \bar{F} \cdot d\bar{r}.$$

Kurvintegralen över γ_2 som vi lade till behöver alltså subtraheras bort.

3.2 Greens sats i $\mathbb{R}^3$

Greens sats från $\mathbf{R}^2$ till $\mathbf{R}^3$. Vi kan omformulera satsen med hjälp av definitionen för rotation. Vi låter domänen $D \subseteq \mathbf{R}^3$ och $\mathbf{F}$: $D \to \mathbf{R}^3$ vara ett C^1-vektorfält.

Rotationen av $\mathbf{F}$ är då vektorfältet rot($\mathbf{F}$)=curl($\mathbf{F}$)=$\nabla\times$ $\mathbf{F}$ = (($\partial F_3/\partial y$) - ($\partial F_2/\partial z$), ($\partial F_1/\partial z$) - ($\partial F_3/\partial x$), ($\partial F_2/\partial x$) - ($\partial F_1/\partial y$)). $\mathbf{F}$ kallas virvelfritt om $\nabla\times$ $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Vi kan nu omformulera Greens sats.

$$\int_{\delta D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \nabla \times \mathbf{F} \bullet \hat{N} dS \tag{5}$$

Där $\hat{N}$ är enhet enhetsnormal till ytan D och där dxdy=ds är areaelementet i D.

3.3 Gauss sats

Divergens av $\mathbf{F}$ är skalärfältet div($\mathbf{F}$) = $\nabla\bullet$ $\mathbf{F}$ = ($\delta F_1/\delta x$)+($\delta F_2/\delta y$)+($\delta F_3/\delta z$). Om man utifrån detta omformulerar Greens sats genom att kolla på HL och VL så får man följande sats som kallas för Gaus sats.

$$\iint_{dD^*} \mathbf{G} \bullet \hat{N} = \iiint_{D^*} \nabla \bullet \mathbf{G} dV \tag{6}$$

Där $\hat{N}$ är enhetsnormal ut från D^*.