MVE470 Kompletterande uppgifter lösningar
Läsvecka 1.

K1.

a) $$f(x,y) = \begin{cases} xy, & (x,y) \neq (1,1) \\ 1, & (x,y) = (1,1) \end{cases}$$

Använd t.ex. att $\lim g \cdot h = \lim g \cdot \lim h$ när HL:s gränsvärden existerar. Ser du att

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = 1 = f(1,1),$$ varför f är kontinuerlig i $(1,1)$ (övriga punkter behövs ej undersökas eftersom f är en "vanlig" funktion där).

b) $$f(x,y) = \begin{cases} \sin y, & (x,y) \neq (0,1) \\ 0, & (x,y) = (0,1). \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = \sin 1 \neq 0 = f(0,1)$$

så f är ej kontinuerlig pga diskontinuitet i $(0,1)$.

c) $$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2-2xy, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

Notera att $x^2+y^2-2xy = (x-y)^2$ som $= 0$ då $x=y$, alltså är detta en kuggfråga, $f(x,y) = (x-y)^2$ är redan en "vanlig" funktion så kontinuerlig!

d) $$f(x,y) = \begin{cases} xy, & x \neq y \\ x^2, & x = y \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} f(x,y) = \left(\lim_{x\to a} x\right)\cdot\left(\lim_{y\to a} y\right) = a^2 = f(a,a)$$

så kont. på $x=y$!

K.2: a) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{x-1}$ existerar ej!

Ty, längs med linjen $y=x$ får vi

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ y=x}} f(x,y) = \lim_{x\to 1} \frac{x-x}{x-1} = 0.$$

men längs med $y = 2x-1$ får vi

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ y=2x-1}} f(x,y) = \lim_{x\to 1} \frac{x-(2x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{x-1} = -1.$$

Eftersom dessa är olika kan ej det första gränsvärdet existera!

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+2y^2}{2x^2+y^2}$ existerar ej!

T.ex. längs med $y=x$ får vi

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2x^2}{2x^2+x^2} = 1,$$ medan

vi längs med $y=0$ får

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4}{x+y^2}$ existerar ej!

Låt först $x = t$, $y = t$

$$\to \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=t\\ y=t}} \frac{x^4}{x+y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{t+t^2} = \lim_{t\to 0} t^3 \cdot \underbrace{\frac{1}{1+t}}_{\substack{\text{begränsad}\\ \text{för } |t|\ll 1}}$$

$$= 0$$

Men längs $x = t^2 - t^{1/4}$, $y = t^{1/8}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=t^2-t^{1/4}\\ y=t^{1/8}}} \frac{x^4}{x+y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{(t^2-t^{1/4})^4}{t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t}{t^2} + \text{Begränsad} \cdot t^2$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \quad \text{som ej existerar}$$

Anm: Svar uppgift!!

Idé: Funktionen är singulär längs kurvan $x = -y^2$ så om vi går längs kurvan $x = -y^2 + \varphi(t)$, $\varphi(t)$ "liten störning" så kan vi få godtyckligt stora värden. Genom att välja $y = y(t)$ lämpligt kan vi åstadkomma :

i) $y(t)$ och $x(t) \to 0$ då $t \to 0$

ii) värdet $\to \infty$ då $t \to 0$

det var så x, y bestämdes i denna räkning.

Vill allbå att $x^4 \to 0$ långsammare än $x + y^2 = \varphi(t)$ då $t \to 0$.

d) $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$ existerar ej!

Låt $x = y$, så

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ x=y}} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} = \lim_{x \to 0} \frac{4x^2}{2x^2} = 2$$

medan $x = -y$ ger

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ x=-y}} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{2x^2} = 0 .$$

e) $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{x^2(1+y) + y^2}{x^2+y^2} = 1$

Trick! Polära koord.

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} = \lim_{r \to 0}$$

$$\leadsto \lim_{r \to 0} \frac{\cancel{r^2}\cos^2\theta\,(1 + r\sin\theta) + \cancel{r^2}\sin^2\theta}{\cancel{r^2}}$$

$$= \lim_{r \to 0} \underline{\cos^2\theta} + r\sin\theta\cos^2\theta + \underline{\sin^2\theta}$$

$$= \lim_{r \to 0} \underbrace{r}_{\to 0}\,\underbrace{\sin\theta\cos^2\theta}_{\text{begränsad}} + 1 = 1$$

f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2) = 0$

$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$

$\to \quad \lim_{r\to 0} r \ln r^2 = \lim_{r\to 0} 2r\ln r$

$= 2 \lim_{r\to 0} r\ln r .$

Dessutom, om vi sätter $r = e^{-t}$

$\lim_{r\to 0} r\ln r = \lim_{t\to\infty} e^{-t} \ln e^{-t}$

$= \lim_{t\to\infty} (-t)\cdot e^{-t}$

$= -\lim_{t\to\infty} te^{-t} = 0$ (standardgränsvärde!)