

K3

Bestäm normallinjen till nivåkurvan

$$\text{av } f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{genom } (1, 2)$$

Lösning: Gradienten ger en normal till nivåkurvan så normallinjen ges på parameterform enligt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \cdot \nabla f(a, b).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{(1 + 2^2) - 2 \cdot 1}{(1 + 2^2)^2} = \frac{3}{25}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{2 \cdot 2}{(1 + 2^2)^2} = -\frac{4}{25}$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

K4: Bestäm normallinjen till nivåytan av

$$f(x, y, z) = x^2 y + y^2 z + z^2 x \quad \text{genom } (1, -1, 1).$$

Lösning: Gradienten ger en normal till nivåytan så på samma sätt som innan

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + t \cdot \nabla f.$$

$$\begin{aligned} \nabla f &= (2xy + z^2, x^2 + 2yz, y^2 + 2zx) \\ &= (-2 + 1, 1 - 2, 1 + 2) = (-1, -1, 3). \end{aligned}$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$