K-uppgifter v.4 Lösningar

K6. Beräkna
$$\iiint_K z\,dx\,dy\,dz$$
där K ges av
$$K = \{(x,y,z) : 0 \le z \le 2 - x^2 - y^2\}.$$

Lösn: K har cirkulär symmetri!

⇝ Cylindriska koord. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$

$\Rightarrow$ $dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$.

Gränserna blir då $\theta \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, \sqrt{2}]$

och $0 \le z \le 2 - r^2$.

$$\rightsquigarrow \iiint_K z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r \int_0^{2-r^2} z\,dz\,dr\,d\theta$$
$$= \cancel{2}\pi \int_0^{\sqrt{2}} r \cdot \left[\frac{z^2}{\cancel{2}}\right]_0^{2-r^2} dr$$
$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt{2}} (2-r^2)^2\, r\,dr$$
$$= -\frac{\pi}{2\cdot 3}\left[(2-r^2)^3\right]_0^{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{4\pi}{3}.$$

■

K7: Beräkna

$$\iiint_K (1+z)\,dx\,dy\,dz$$

där $K = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 1,\ x,y,z \ge 0\}$.

Lösn.: Notera först att

$$\iiint_K 1\,dx\,dy\,dz = \text{vol}(K) = \frac{1}{8}\cdot\frac{4\pi}{3}$$

eftersom K är den delen av enhets-klotet som ligger i oktanten $x,y,z \ge 0$.

För $\iiint_K z\,dx\,dy\,dz$ behöver vi

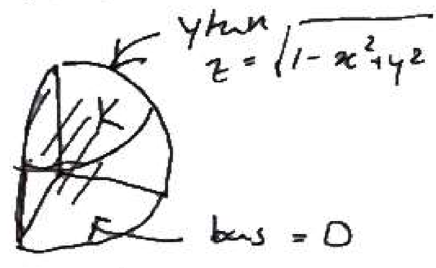
sfäriska koord.

eller notera att eftersom $z \ge 0$

så är randen av K en yta över enhetsdiskens del som ligger i $x,y \ge 0$, dvs. vi får gränser

$$0 \le z \le \sqrt{1-(x^2+y^2)}, \quad x,y \ge 0$$

och kan använda polära koordinater för basen.



då blir $\iiint_K = \iint_D \left(\int_0^{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} dz \right) dx\,dy.$

Sätt nu $\quad x = r\cos\theta$, $\quad y = r\sin\theta$, $\quad r \in [0,1]$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\rightsquigarrow \quad dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$

$$\rightsquigarrow \quad \iiint_K z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-r^2}} z \cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^1 r \cdot \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-r^2}} dr$$

$$= \frac{\pi}{2} \int \frac{(1-r^2)}{2} \cdot r\,dr$$

$$= -\frac{\pi}{16}\left[(1-r^2)^2\right]_0^1 = \frac{\pi}{16}.$$

Med sfäriska koord: $\quad x = R\cos\theta\sin\varphi$, $\quad y = R\sin\theta\sin\varphi$, $\quad z = R\cos\varphi$, $\quad R \in [0,1]$, $\theta \in [0, \pi/2]$, $\varphi \in [0, \pi/2]$

$$dx\,dy\,dz = R^2 \sin\varphi\,dR\,d\theta\,d\varphi$$

$$\rightsquigarrow \quad \iiint_K z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_0^{\pi/2} R\cos\varphi \cdot R^2\sin\varphi\,d\varphi\,dR\,d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^1\int_0^{\pi/2} \frac{R^3}{2}\sin 2\varphi\,d\varphi\,dR$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{R^3}{4}\underbrace{\left[-\cos 2\varphi\right]_0^{\pi/2}}_{=2} dR$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{R^3}{2}\,dR = \frac{\pi}{4}\left[\frac{R^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{16}.$$